

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
E INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS**

NOTAS DE AULA

RICARDO ROSA

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA / IM-UFRJ

1997/2, 2000/2, 2002/1, 2004/1, 2005/1

CONTEÚDO

1. <u>Introdução</u>	4
PARTE 1 - Exemplos, Modelagem e Implementações Numéricas	11
2. <u>Exemplos</u>	12
2.1. Mecânica Newtoniana	12
2.2. Modelagem molecular e de proteínas	21
2.3. Sistemas de vórtices bidimensionais	21
2.4. Decaimento radioativo	21
2.5. Sistemas populacionais	22
2.6. Reações químicas e bioquímicas	22
2.7. Modelos em fisiologia	22
2.8. Modelos em economia	22
2.9. Circuitos elétricos	22
3. <u>Implementações numéricas</u>	23
PARTE 2 - Equações Diferenciais Ordinárias - Existência, Unicidade e Regularidade	24
4. <u>Existência e Unicidade de Soluções de EDOs</u>	25
4.1. Teorema de Picard-Lindelöf	25
4.2. Teorema de Peano	26
4.3. Soluções maximais	27
5. <u>Dependência nas Condições Iniciais e nos Parâmetros</u>	29
5.1. Dependência Lipschitz	29
5.2. Dependência C^k	31
5.3. Expansões assintóticas	36
6. <u>Soluções Globais e Sistemas Dinâmicos</u>	39
6.1. Soluções globais	39
6.2. Processos	39
6.3. Sistemas dinâmicos	41
PARTE 3 - Sistemas Lineares	45
7. <u>Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes</u>	46
7.1. Sistemas bidimensionais	46
7.2. Sistemas m-dimensionais	46
7.3. Exponencial de um operador linear	47
7.4. Exponencial de blocos de Jordan	50
7.5. Análise do oscilador harmônico	53
8. <u>Sistemas Lineares Não-Autônomos e Não-Homogêneos</u>	55
8.1. Sistemas não-autônomos homogêneos	55
8.2. Sistemas não-homogêneos e fórmula de variação de constantes	57
8.3. Fórmula de variação de constantes não-linear	59
8.4. Oscilador harmônico forçado sem atrito	60
8.5. Evolução de volumes - Fórmula de Liouville	60
PARTE 4 - Sistemas Não-Lineares - Introdução	61
9. <u>Sistemas Não-Lineares</u>	62
9.1. Objetos típicos de um sistema não-linear	62
9.2. Propriedades dos conjuntos limites	64
10. <u>Estabilidade de Pontos Fixos via Linearização</u>	66
10.1. Estabilidade em sistemas lineares autônomos homogêneos	66

10.2.	Estabilidade em sistemas lineares não-autônomos homogêneos	70
10.3.	Estabilidade em sistemas não-lineares	71
11.	<u>Método Direto de Lyapunov</u>	78
11.1.	Função de Lyapunov e o Princípio de Invariância de LaSalle	78
11.2.	Estabilidade de pontos fixos via método direto de Lyapunov	79
11.3.	Sistemas gradientes	80
12.	<u>Sistemas Conservativos e Hamiltonianos</u>	81
13.	<u>Teorema de Poincaré-Bendixson e Grau Topológico</u>	84
13.1.	O Teorema de Poincaré-Bendixson	84
13.2.	Grau topológico	86
14.	<u>Exemplos de Sistemas Não-Lineares Bidimensionais</u>	88
14.1.	Equação de Van der Pol	88
14.2.	Equação de Lotka-Volterra (predador-presa)	88
14.3.	Predador-presa com crescimento limitado	88
14.4.	Competição entre duas espécies	89
15.	<u>Estabilidade Estrutural</u>	90
15.1.	Conjugação de sistemas	90
15.2.	Equivalência de sistemas	92
15.3.	Estabilidade estrutural	92
16.	<u>Bifurcações</u>	94
16.1.	Bifurcações locais de codimensão um	94
16.2.	Bifurcações imperfeitas e “desdobramento universal”	95
16.3.	Bifurcações globais	96
17.	<u>Caos</u>	97
17.1.	O mapa ternário	97
17.2.	A ferradura de Smale e o mapa ternário duplo	98
17.3.	Conjuntos caóticos em fluxos	99
	Referências	99

1. INTRODUÇÃO

Motivação. Sistemas contínuos, discretos e complexos. Sistemas em dimensão finita, em variedades e em dimensão infinita (EDPs e equações com delay). Exemplos simples em 1D e 2D. Comportamento Qualitativo. Trajetórias, curvas integrais e órbitas. Espaço de fase e Diagrama de fase. [9, 14]

O nosso objetivo é estudar o comportamento e as propriedades das soluções de equações diferenciais ordinárias. Equações desse tipo modelam uma ampla gama de fenômenos físicos, biológicos, químicos e econômicos, entre outros. Em aplicações, equações diferenciais expressam leis envolvendo variações de certas quantidades modeladas em relação a outras, leis estas que são encontradas fartamente na natureza, sejam a partir de princípios básicos de física e de química, ou a partir de modelagens mais simplificadas, heurísticas ou empíricas. O entendimento dessas equações é, portanto, fundamental em ciência e tecnologia, além de ser fascinante do ponto de vista matemático. Muitos conceitos desenvolvidos nesse estudo podem ser naturalmente estendidos ao estudo de equações a derivadas parciais, com uma gama de aplicações ainda maior.

Estudaremos equações diferenciais da forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, e u_0 pertencente ao subconjunto \mathcal{U} de \mathbb{R}^m . Essa é uma forma vetorial sucinta de escrever um sistema de m equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Sistemas de equações de ordem mais alta também podem ser escritas como sistemas de primeira ordem, como veremos adiante.

Temos, no caso acima, um estado inicial u_0 de um certo “sistema”, digamos temperatura ou posição de um objeto, ou de vários objetos, e uma lei, representada pelo sistema de equações diferenciais, de como o estado do sistema varia com o tempo. A solução da equação acima é uma função $u = u(t) = u(t; u_0)$, que indica o estado do sistema no instante t , a partir do estado inicial u_0 no instante $t = 0$. Uma equação do tipo (1.1), com $f = f(u)$ não envolvendo a variável temporal t explicitamente, é dita *autônoma*. O mapeamento $(t, u_0) \rightarrow u(t; u_0)$ é dito um *sistema dinâmico* ou *fluxo*. Um sistema dinâmico ou fluxo pode ser global ou local, dependendo se as soluções $u = u(t; u_0)$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, ou apenas em um certo intervalo contendo $t = 0$.

Estudaremos, também, equações com f dependendo explicitamente da variável temporal t . Equações desse tipo modelam, por exemplo, fenômenos sob a influência externa de algum fator sazonal, como a radiação solar que varia com a época do ano e a hora do dia. Consideraremos, mais precisamente, $f : \mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, definida em algum subconjunto \mathcal{W} de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, e as equações tomam a forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

com $(t_0, u_0) \in \mathcal{W}$. Uma equação da forma (1.2), com f dependente da variável temporal t , é dita *não-autônoma*. A solução da equação acima é uma função $u = u(t) = u(t; t_0, u_0)$, que indica o estado do sistema no instante t , a partir do estado inicial u_0 no instante $t = t_0$. O mapeamento $(t, t_0, u_0) \rightarrow u(t; t_0, u_0)$ é dito um *processo*, que também pode ser global ou local, como no caso de fluxos.

O nosso estudo de equações diferenciais será dividido em três partes principais: (i) a parte de existência, unicidade e regularidade das soluções, que requer uma boa base de análise real; (ii) a parte de sistemas lineares, que requer uma boa base de álgebra linear; e (iii) a parte do comportamento qualitativo de equações não-lineares, cujo tratamento é um pouco mais geométrico, mas que também requer bastante análise real.

Antes desse estudo, veremos uma parte inicial com uma série de modelos envolvendo equações diferenciais. Veremos, também, como utilizar ferramentas numéricas para nos ajudar a visualizar o comportamento das soluções. Essa ferramentas podem ser diversas, desde linguagens de programação como `fortran` e `c++`, até ferramentas de mais alto nível, como `matlab`, `maple` e `octave`. A ferramenta utilizada aqui é o `scilab`, um pacote bastante parecido com o `matlab` e igualmente poderoso para os nossos interesses. Além disso, esta é uma

ferramenta de distribuição gratuita e de código livre, disponível em várias plataformas, como `windows`, `linux`, e `sun`, entre outras. Para maiores informações e para a instalação desse pacote, veja <http://www.scilab.org/>. As implementações feitas aqui em `scilab` podem ser facilmente modificadas para o `matlab` visto que os dois pacotes são bem parecidos. Essa parte numérica, no entanto, não será explorada à exaustão, nem será estudada com rigor; a ênfase será no estudo analítico.

Conforme indicado acima, em diversas aplicações, t representa o tempo e u , o estado do sistema que está sendo modelado e que se supõe evoluir com o tempo segundo uma certa lei representada pela equação diferencial. Nesse caso, dado um estado “inicial” u_0 do sistema em um tempo t_0 , buscamos o estado $u(t; t_0, u_0)$ do sistema no tempo t posterior, ou mesmo anterior, a t_0 . Isso nos leva a buscar as *soluções* $u(t; t_0, u_0)$ do sistema de equações diferenciais e às questões de *existência* e *unicidade* das soluções. É claro que devemos ter várias soluções diferentes, pois podemos variar as condições iniciais t_0 e u_0 , mas para cada par (t_0, u_0) esperamos ter apenas uma solução. É nesse sentido que buscamos estabelecer a unicidade das soluções.

Geometricamente, podemos visualizar uma solução $u(t) = u(t; t_0, u_0)$ como sendo uma curva parametrizada $\sigma(t) = (t, u(t))$ em $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. A equação $du(t)/dt = f(t, u(t))$ indica que a tangente à curva, $d\sigma(t)/dt = (1, du(t)/dt)$, tem que coincidir com o vetor $(1, f(t, u(t)))$, em cada instante de tempo t . Assim, podemos visualizar o campo de vetores $(1, f(t, u))$ para todo $(t, u) \in \mathcal{W}$ e exigir que a solução seja uma curva tangente a esse campo em todos os seus pontos. A Figura 1, por exemplo, mostra o campo de vetores $(1, (t/4 - x) \operatorname{sen}(x - t)/6)$, no plano tx , no caso $m = 1$, com $u = x$. Essa figura mostra, ainda, duas soluções da equação correspondente $dx/dt = (t/4 - x) \operatorname{sen}(x - t)/6$, uma com a condição inicial $x(0) = -0.4$ e a outra com $x(0) = 0.4$. Cada condição inicial seleciona um ponto pelo qual a curva deve passar. Sem essa condição, há uma infinidade de curvas tangentes ao campo em questão.

Podemos imaginar que o campo de vetores representa a correnteza de um rio e que a condição inicial representa um ponto do rio no qual deixamos cair uma bolinha de papel. Esta bolinha, então, segue o seu curso ao longo do rio, conforme o campo de vetores da equação diferencial. Há assim, uma infinidade de caminhos possíveis, dependendo do ponto inicial em que jogamos a bolinha de papel.

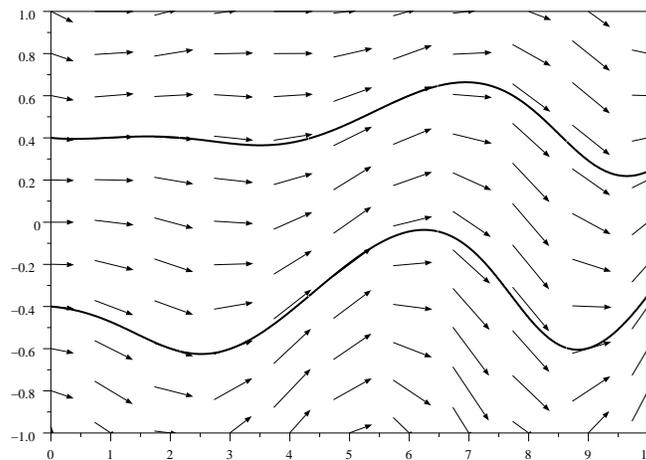


FIGURA 1. Campo de vetores $(1, (t/4 - x) \operatorname{sen}(x - t)/6)$ e soluções da equação $dx/dt = (t/4 - x) \operatorname{sen}(x - t)/6$, com condições iniciais $x(0) = -0.4$ e $x(0) = 0.4$.

Vamos considerar, agora, um sistema de duas equações lineares,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - by \\ \frac{dy}{dt} = bx - y, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde b é um certo parâmetro real. Em forma vetorial, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que é um sistema autônomo $du/dt = f(u)$, em $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $f(u) = Au$, onde A é a matriz 2×2 acima.

O sistema acima pode ser resolvido explicitamente passando-se para coordenadas polares $r\theta$, i.e. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Cada solução $u(t) = (x(t), y(t))$ é dada em coordenadas polares por¹

$$r(t) = r(0)e^{-t}, \quad \theta(t) = \theta(0) + bt.$$

Os valores de $r(0)$ e $\theta(0)$ podem ser facilmente obtidos das condições iniciais $x(0)$ e $y(0)$ nas coordenadas cartesianas.

Como no exemplo anterior, há uma infinidade de soluções desse sistema, dependendo das condições iniciais. A Figura 2 mostra a solução correspondente a $x(0) = 1.2$, $y(0) = 1.2$, quando $b = -10$. Observe que à medida que o tempo passa, a solução espirala em direção a origem, com velocidade angular constante b , no sentido trigonométrico, e com o raio decaindo exponencialmente.

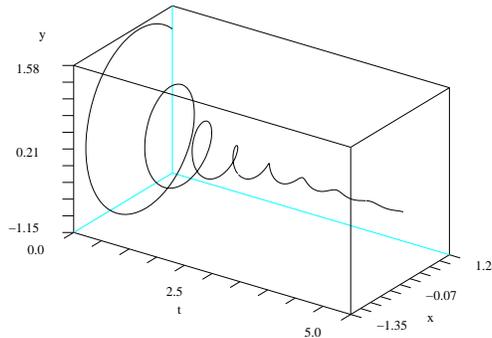


FIGURA 2.

O campo de vetores $(1, f(t, u))$, no entanto, é, em geral, mais complicado de se visualizar, quando $m > 1$. No caso do sistema ser autônomo, i.e. $f(t, u) = f(u)$, esse campo $(1, f(u))$ de vetores não depende de t . Assim, é interessante enxergar as soluções não como curvas $\sigma(t) = (t, u(t))$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, mas como curvas $u = u(t)$ em \mathbb{R}^m . Neste caso, a curva deve ser tangente ao campo $u \mapsto f(u)$, que não depende explicitamente da variável

¹Derivando-se implicitamente a relação $r^2 = x^2 + y^2$, temos $2rr' = 2xx' + 2yy' = -2x^2 - 2bxy + 2bxy - 2y^2 = -2r^2$, logo $r' = -r$. Derivando-se, agora, a relação $x = r \cos \theta$ obtemos $-x + by = x' = r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta = -r \cos \theta - r\theta' \sin \theta = -x - \theta' y$, que nos dá $\theta' = b$. Resolvendo-se cada equação $r' = -r$ e $\theta' = b$, obtemos o resultado desejado.

t. No caso $m = 2$, como no exemplo (1.3), essa redução é bastante útil. A Figura 3 mostra os campos de vetores $u \mapsto f(u)$ do sistema (1.3), quando $b = 10$ e $b = -2$, respectivamente. Podemos ver, ainda, a solução corresponde à condição inicial $(x(0), y(0)) = (1.2, 1.2)$. Nos dois casos, a solução espirala em direção à origem, primeiro no sentido anti-horário, segundo, no sentido horário.

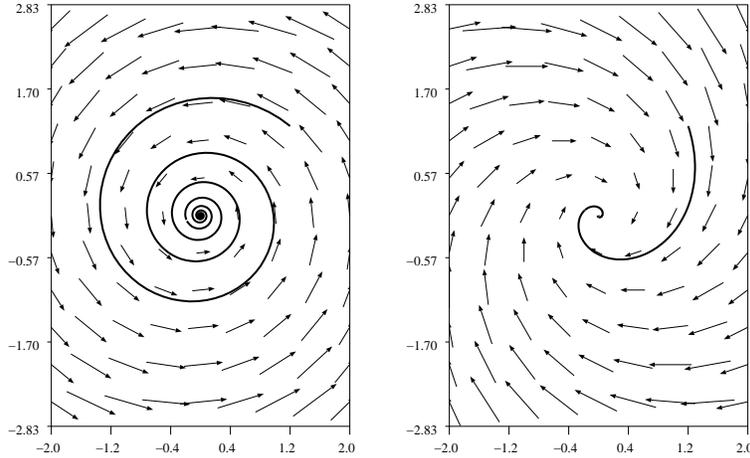


FIGURA 3.

Em alguns poucos casos, vamos poder obter fórmulas explícitas para as soluções, como feito acima. Mas, em geral, uma fórmula explícita não estará disponível. Felizmente, em muitas situações será suficiente tentar entender o comportamento “qualitativo” das soluções. Por exemplo, no caso acima é bastante revelador saber apenas que as soluções espiralam em direção à origem. Na prática, casos particulares com soluções explícitas serão úteis, também, no estudo de casos mais complicados. Estes poderão ser estudados como perturbações de casos mais simples, de maneira similar ao do estudo do gráfico de funções através de suas retas tangentes e de expansões de Taylor de ordem mais alta. Essa idéia de se entender “qualitativamente” o comportamento das soluções, sem conhecermos uma fórmula explícita para elas, que pode não estar disponível, é a tônica do estudo de sistemas dinâmicos.

Vamos ver, por exemplo, que em um sistema bidimensional $du/dt = f(u)$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $f(0) = 0$ e $Df(0) = A$, o comportamento das soluções próximas à origem é semelhante ao do sistema linear (1.3). A Figura 4 ilustra o campo de vetores e uma solução do sistema não linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - by + 2xy + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = bx - y - x^3 - 4xy^2, \end{cases}$$

nos casos $b = 10$ e $b = -2$, com a condição inicial $x(0) = 1.2$, $y(0) = -1.2$. As soluções também espiralam em direção à origem. Vamos ver resultados analíticos que garantem isso de maneira geral. Mas observe na figura que um pouco mais afastado da origem, onde a coordenada y se aproxima do valor 1.3 em módulo (no caso $b = 10$), o campo de vetores parece indicar que as soluções devem se afastar da origem. Isso se deve ao fato de que os termos quadráticos e cúbicos na equação são significativos longe da origem e modificam completamente o comportamento do sistema. Para se entender melhor o que acontece, será necessário um estudo mais aprofundado, principalmente em dimensões maiores ($m > 2$).

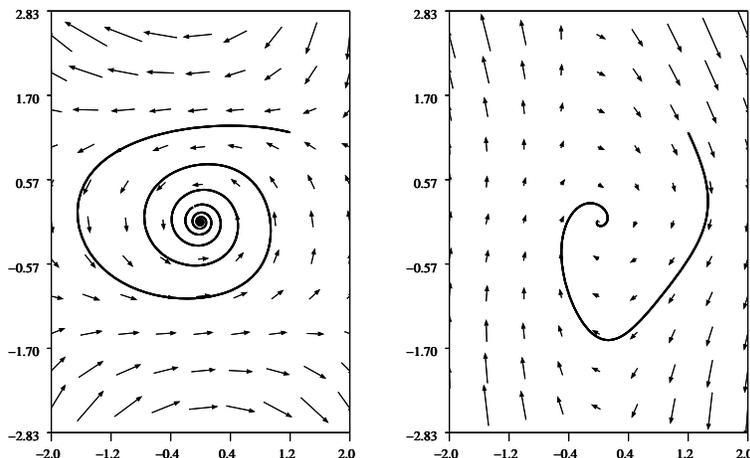


FIGURA 4.

Em um sistema autônomo associado a um campo $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, o conjunto \mathcal{U} é dito o *espaço de fase* do sistema. Cada curva $t \mapsto u(t; u_0)$ é dita uma *solução* ou *trajetória*, o conjunto de pontos $\gamma(u_0) = \{u(t; u_0)\}_t$ de uma trajetória é dita uma *órbita* do sistema. A curva $t \mapsto (t, u(t; u_0))$ é chamada de *curva integral*. A Figura 2 exhibe uma curva integral do sistema linear (1.3), ao passo que as curvas na Figura 3 ilustram órbitas do sistema.

O conjunto de todas as órbitas e de suas respectivas orientações segundo o sentido de crescimento de t é o chamado *diagrama de fase* do sistema, cujo estudo será grande parte do nosso objetivo. Vamos, em particular, tentar esboçar esse diagrama, traçando soluções típicas do sistema e indicando suas direções de maneira apropriada. Por exemplo, a Figura 5 mostra uma órbita “orientada” típica do sistema linear (1.3), nos casos $b = 10$ e $b = -2$. E ela ilustra qualitativamente o comportamento de todas as possíveis órbitas do sistema, junto com a órbita associada à solução trivial $u(t) = (x(t), y(t)) \equiv 0$, que é a origem.

Outras questões envolvem a *regularidade* das soluções em relação a t_0 e u_0 e, também, em relação a algum parâmetro extra do sistema, como a massa de um objeto, o comprimento de uma barra, o coeficiente de atrito de um material, o coeficiente de restituição de uma mola, o coeficiente de viscosidade de um fluido, etc.

Há, também, a questão da *existência global* das soluções, i.e., se cada solução $u(t; t_0, u_0)$ está definida para todo tempo $t \in \mathbb{R}$, ou, pelo menos, para todo tempo posterior $t \geq t_0$. Em relação às soluções globais, temos questões a respeito do comportamento “assintótico” das soluções, i.e., para que tipo de estados particulares elas vão de aproximar à medida que $t \rightarrow \infty$, tais como se uma mola vai tender a um estado de repouso, se vai oscilar periodicamente, ou se vai oscilar de uma forma mais complicada, caótica em algum sentido.

Um outro tipo de sistema bastante relacionado a equações diferenciais são os sistemas dinâmicos discretos, nos quais a variável temporal assume valores discretos. Por exemplo, podemos efetuar medidas de temperatura de um certo sistema a intervalos discretos, digamos, uma vez a cada hora, e, por exemplo, obter leis que relacionem a temperatura em um certo instante com a temperatura no instante anterior. Isso nos leva a estudar mapeamentos em um certo conjunto \mathcal{U} de \mathbb{R}^m . Assim, o estado do sistema será descrito pela temperatura u_n em instantes discretos, com uma lei de evolução

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

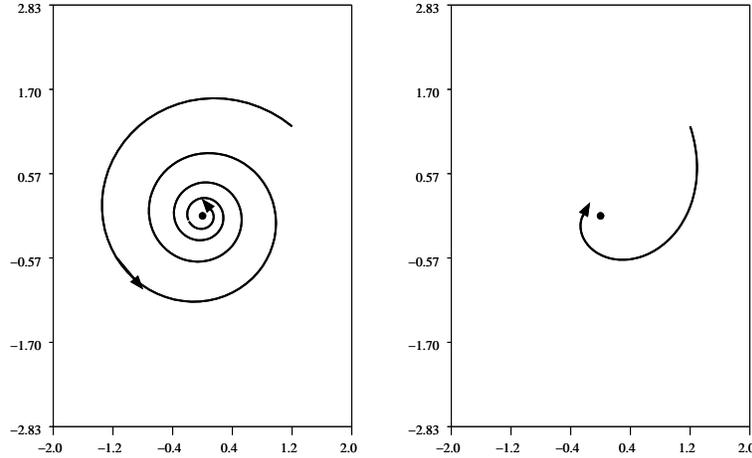


FIGURA 5.

com $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. Se f for um difeomorfismo, podemos considerar, também, instantes “passados”, $n = -1, -2, \dots$

Caso a lei de evolução varie com o tempo, teremos uma família $\{f_n\}_n$ de funções $f_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, com

$$u_{n+1} = f_n(u_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

A ênfase não será em sistemas discretos. Porém, mesmo em modelos contínuos, o estudo de sistemas discretos aparece naturalmente. Por exemplo, a partir da existência de órbitas periódicas em um sistema contínuo, é útil estudarmos o que acontece com o sistema contínuo a intervalos discretos coincidindo com o período dessa órbita.

Sistemas dinâmicos complexos, da forma

$$\frac{du(z)}{dz} = f(z, u(z)),$$

onde $z \in \mathbb{C}$ e $f : \mathcal{W} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ é um campo vetorial analítico (suas coordenadas são funções analíticas) também são de grande valia como ferramenta no estudo de sistemas reais, além de serem interessantes por si só.

Outros sistemas dinâmicos importantes são os associados a equações a derivadas parciais. Nesses sistemas, porém, o subconjunto \mathcal{U} do \mathbb{R}^n é substituído por um espaço de funções (e.g. o conjunto das funções Hölder contínuas, o conjunto das funções continuamente diferenciáveis, o conjunto das funções de quadrado integrável, etc.). Nesse caso, o estudo se torna bastante mais complicado e ainda mais fascinante.

Em outras extensões de sistemas dinâmicos, o conjunto \mathcal{U} pode ser generalizado para uma variedade diferenciável arbitrária, não necessariamente um domínio em \mathbb{R}^m . Por exemplo, podemos ter sistemas dinâmicos em uma esfera, modelando algum fenômeno na superfície terrestre, ou sistemas em uma superfície modelando um coração. Outras sistemas em variedades aparecem naturalmente a partir de restrições em um sistema cartesiano. Por exemplo, em sistemas mecânicos cuja energia é preservada ao longo das órbitas, cada órbita está restrita a uma superfície de nível da função que representa a energia.

Em todos os casos de sistemas dinâmicos mencionados acima, podemos, ainda, considerar sistemas com retardamento, i.e. nos quais a lei de evolução em um certo instante de tempo t não depende somente do estado do sistema nesse instante t , mas de um ou mais instantes anteriores, ou até mesmo de um intervalo

de tempos anteriores. São fenômenos com “memória”, ou, em casos de controle, com algum retardamento na execução de um algoritmo de controle.

Para efeito de análise, normalmente utilizaremos a norma em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ como sendo a norma da soma $|(t, u)| = |t| + |u|$, com $|u|$ indicando a norma Euclidiana em \mathbb{R}^m , mas isso não será crucial, pois todas normas em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ são equivalentes. O produto escalar em \mathbb{R}^m será denotado por $u \cdot v$ ou $\langle u, v \rangle$. Não nos preocuparemos em usar diferentes notações para normas $|\cdot|$ em espaços diferentes, exceto que usaremos $\|\cdot\|$ para normas de operadores lineares e de certos espaços de funções. Utilizaremos, ainda, a notação $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ para indicar o espaço das transformações lineares em \mathbb{R}^m munido da norma de operadores induzida pela norma em \mathbb{R}^m .

PARTE 1

EXEMPLOS E IMPLEMENTAÇÕES NUMÉRICAS

2. EXEMPLOS

Vejam alguns exemplos de equações diferenciais e de mapeamentos.

2.1. Mecânica Newtoniana. Uma classe de problemas dos mais notáveis é formada por equações baseadas na segunda lei de Newton, $F = m \times a$, ou seja, “força = massa vezes aceleração”. Se $x = x(t)$ denota a posição no espaço de um objeto de massa m , então a aceleração desse objeto é $d^2x(t)/dt^2$, e a segunda lei de Newton implica na equação de movimento

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Observe que a força, F , pode, em geral, ser função da posição x , assim como da velocidade, dx/dt , i.e., $F = F(x, dx/dt)$. Podemos escrever essa equação como um sistema ampliado de equações de primeira ordem, introduzindo a velocidade $y = dx/dt$ do objeto como uma nova variável:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{m}F(x, y). \end{cases}$$

Note que se o objeto variar livremente no espaço, serão necessárias três coordenadas para representar a sua posição, i.e. $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, e mais três coordenadas para a velocidade, $y = (y_1, y_2, y_3)$, dando um sistema de seis equações de primeira ordem. O “estado” do sistema é dado por $u = (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Sistemas conservativos – energia cinética e energia potencial

Um princípio básico em mecânica é o da conservação de energia. Tal princípio vale para sistemas “fechados”, que, a grosso modo, levam em consideração todas as quantidades físicas relevantes. Nesse caso, a energia não se perde, se transforma, passando de um quantidade física para outra, como, por exemplo, de energia cinética para energia térmica. Quando nem todas as quantidades físicas são levadas em consideração, pode haver uma “perda” de energia para fora do sistema, como é comumente modelado em sistemas com atritos. Temos, nesse caso, *sistemas dissipativos*. No momento, porém, estamos interessados em *sistemas conservativos*.

No caso de sistemas conservativos, temos, em geral, uma força $F = F(x)$, dependendo das coordenadas $x = (x_1, x_2, x_3)$, que pode ser escrita com o gradiente de uma função que ganha o nome de *energia potencial*:

$$F(x) = -\nabla V(x).$$

A *energia cinética* está associada a quantidade de movimento, e toma a forma

$$K(y) = \frac{1}{2}m|y|^2,$$

onde $y = dx/dt$. A *energia total* do sistema $u = (x, y)$ é a soma da energia cinética com a potencial:

$$E(u) = E(x, y) = K(y) + V(x),$$

que é uma quantidade conservada pelo sistema. Em outras palavras, para uma solução $u(t) = (x(t), y(t))$ do sistema, temos

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = \nabla K(y) \cdot y' + \nabla V(x) \cdot x' = y \cdot F(x) - F(x) \cdot y = 0,$$

Isso é verdade não apenas para um sistema tridimensional como acima, mas para qualquer sistema vetorial da forma

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = p, \\ \frac{dp}{dt} = F(q), \end{cases}$$

com $(p, q) \in \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$, representando um sistema de n -corpos sofrendo um conjunto de forças $F = F(q)$, com a função F dependendo apenas de q e sendo o gradiente de um potencial, $F(q) = -\nabla V(q)$. A força pode ser,

por exemplo, gravitacional, entre n corpos celestes, eletrodinâmica, entre n partículas carregadas positiva ou negativamente, ou de outra natureza. As coordenadas $p = (p^1, \dots, p^n)$, com $p^i \in \mathbb{R}^3$ representam o *momento* (gravitacional ou eletrodinâmico) de cada um dos corpos e as coordenadas $q = (q^1, \dots, q^n)$ representam as *posições generalizadas*.

Assim, a energia total

$$E(p, q) = K(p) + V(q), \quad K(p) = \frac{1}{2}|p|^2,$$

é conservada. Um sistema de n corpos celestes sob a ação gravitacional pode ser colocado nessa forma considerando-se as *coordenadas generalizadas*, formadas pelos momentos $p^j = m_j y^j$ e pela posições generalizadas $q^j = m_j x^j$ (veja abaixo).

A conservação de energia implica em que cada órbita pertence a uma “hiper-superfície” de nível (não é uma superfície no sentido clássico, i.e. um objeto bidimensional suave em um espaço tridimensional, mas sim o que chamamos de variedade; nesse caso, uma variedade de dimensão $6n - 1$ em um espaço ambiente de $6n$ coordenadas). Assim, o número de graus de liberdade (coordenadas) do sistema é reduzido de uma dimensão. Outras leis podem ser usadas para se reduzir ainda mais o sistema, como leis de conservação de momento linear e de momento angular. Essas leis são, na verdade, consequências de propriedades de simetria da energia potencial do sistema.

O sistema de dois corpos celestes

Um exemplo simples é o de dois corpos celestes sob a atração gravitacional mútua. Sejam m_1 e m_2 as massas dos dois corpos. Consideramos como sistema de referência coordenadas $x_1 x_2 x_3$ em referencial inercial (isso faz parte da lei de Newton). Assumimos que a força gravitacional aja apenas no centro de massa de cada objeto. Assim, se o centro de massa dos dois corpos se encontram nas coordenadas $x^j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j)$, onde $j = 1, 2$, a força gravitacional agindo neles tem magnitude $Gm_1 m_2 / |x^1 - x^2|^3$, onde $|x^1 - x^2|$ é a norma euclidiana do vetor $x = x^1 - x^2$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, e G é a constante gravitacional universal. A força gravitacional, no entanto, é vetorial, com a força em um corpo apontando do centro de massa deste corpo para o centro de massa do outro corpo. Em forma vetorial, podemos escrever que a força agindo nos corpos $i = 1, 2$, tem a forma

$$F_1 = -G \frac{m_1 m_2}{|x^1 - x^2|^3} (x^1 - x^2), \quad F_2 = -G \frac{m_1 m_2}{|x^1 - x^2|^3} (x^2 - x^1).$$

Observe que

$$F_1 + F_2 = 0.$$

Aplicando a lei de Newton, chegamos às equações diferenciais

$$m \frac{d^2 x^j}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{|x^1 - x^2|^3} (x^j - x^i), \quad j = 1, 2,$$

onde $i = 2$, se $j = 1$, e $i = 1$, se $j = 2$. Na forma de sistema de equações de primeira ordem, temos

$$\begin{cases} \frac{dx^j}{dt} = y^j, \\ \frac{dy^j}{dt} = -G \frac{m_i}{|x^1 - x^2|^3} (x^j - x^i). \end{cases}$$

Como temos três coordenadas para representar os vetores-posição x^1 e x^2 e os vetores-velocidade y^1 e y^2 , então temos um sistema de 12 equações.

Felizmente, este sistema pode ser bastante reduzido, graças a propriedades de simetria do campo potencial gravitacional. Essas simetrias são interpretadas na forma de leis físicas. As mais óbvias são as de conservação de centro de massa e de momento linear. O centro de massa do sistema é dado pelo vetor

$$C_M = \frac{m_1 x^1 + m_2 x^2}{m_1 + m_2}.$$

Esta quantidade varia com o tempo, assim como o centro de massa de cada corpo. Derivando essa relação duas vezes em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d^2 C_M}{dt^2} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left(m_1 \frac{d^2 x^1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x^2}{dt^2} \right) = \frac{1}{m_1 + m_2} (F_1 + F_2) = 0.$$

Assim, o centro de massa é da forma

$$C_M(t) = c_0 + c_1 t,$$

para constantes vetoriais C_0, C_1 . Em linguagem física, o centro de massa também está em movimento inercial. Assim, podemos considerar um novo sistema de coordenadas com a origem exatamente no centro de massa do sistema, equivalendo às hipóteses $c_0 = c_1 = 0 = (0, 0, 0)$. Assim, temos que o centro de massa é uma quantidade conservada do sistema, o que pode ser escrito matematicamente pela relação

$$\frac{m_1 x^1 + m_2 x^2}{m_1 + m_2} = 0$$

Da mesma forma, a derivada de $C_M(t)$ é zero, o que nos leva à conservação de momento linear, valendo a relação

$$m_1 y^1 + m_2 y^2 = 0.$$

As equações acima formam um sistema de 6 equações algébricas que impõe restrições ao movimento dos corpos. As quantidades conservadas são chamadas de integrais do sistema. Cada uma delas implica em uma relação de uma das variáveis do sistema de equações diferenciais em função das outras, diminuindo o número de variáveis do problema. O sistema original de 12 equações fica, assim, reduzido a um sistema de 6 equações. Isso pode ser visto mais explicitamente pelas relações

$$x^2 = -\frac{m_1}{m_2} x^1, \quad y^2 = -\frac{m_1}{m_2} y^1$$

que seguem das relações acima.

Na verdade, devido à forma do potencial gravitacional, a segunda relação não precisa ser utilizada explicitamente nessa redução. De fato, utilizando-se apenas a relação entre x^1 e x^2 , vemos que as equações para cada corpo se tornam independentes entre si (desacopladas). Assim, as equações de Newton para o corpo de massa m_j se tornam

$$\begin{cases} \frac{dx^j}{dt} = y^j, \\ \frac{dy^j}{dt} = -G \frac{M_j}{|x^j|^3} x^j, \end{cases}$$

onde

$$M_j = \frac{m_i^3}{(m_j + m_i)^2}.$$

Temos, assim, sistemas independentes de seis equações para cada corpo.

Uma outra forma de reduzir o sistema para seis equações é, simplesmente, introduzindo as variáveis

$$x = x^2 - x^1, \quad y = y^2 - y^1,$$

que dão as posições e velocidades relativas entre os dois corpos. Assim, temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -G \frac{M}{|x|^3} x, \end{cases}$$

onde

$$M = m_1 + m_2$$

é a massa total do sistema. Nesse referencial, a origem está no corpo de massa m_1 , que não está em movimento inercial. Mas independentemente disso, reduzimos o problema ao sistema de seis equações acima. A quantidade conservada correspondente à energia desse sistema é

$$E = \frac{1}{2}|y|^2 - \frac{GM}{|x|}.$$

De fato, pode-se verificar diretamente que $dE/dt = 0$.

Esse sistema pode ser reduzido a um sistema de quatro coordenadas se observarmos outras simetrias nos termos do lado direito do sistema. De fato, qualquer plano que passa pela origem é *invariante*. Mais precisamente, se escrevermos o sistema na forma $du/dt = f(u)$, onde $u = (x, y) \in \mathbb{R}^6$ e $f(x, y) = (y, F(x))$, então se Π é um plano em \mathbb{R}^3 que passa pela origem e se $x \in \Pi$, segue que $F(x) \in \Pi$. Logo, se $u \in \Pi \times \Pi$, então $F(u) = (y, f(x))$ pertence a $\Pi \times \Pi$. (Em linguagem matemática mais precisa, se $u \in \mathcal{M} = \Pi \times \Pi$, então $F(u)$ pertence ao plano tangente a \mathcal{M} em u , que, neste caso, pode ser identificado com o próprio $\Pi \times \Pi$, mas que no caso de uma superfície qualquer, seria a generalização correta.) Assim, escolhendo o plano inicial de acordo com as condições iniciais (o plano contendo a posição inicial $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ e a velocidade inicial $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))$), a menos que eles sejam coincidentes, nesse caso o sistema pode ser reduzido a duas variáveis), a órbita estará sempre neste plano, sendo necessárias apenas quatro variáveis para representar o estado do satélite, duas para a posição e duas para o vetor velocidade.

Além disso, o sistema de referências pode ser escolhido de forma que o plano x_1x_2 coincida com o plano determinado pelas condições iniciais. Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_1 = -\frac{GMx_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}, \\ \dot{y}_2 = -\frac{GMx_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}, \end{cases}$$

onde, para simplificar, utilizamos \dot{x}_i e \dot{y}_i para denotar as derivadas temporais dessas quantidades. Temos, assim, um sistema de quatro equações.

Essa redução para um plano está associada à lei de conservação de momento angular (é uma parte dela). Essa lei expressa o fato de que o momento angular h , dado pelo produto vetorial

$$h = x \times My,$$

é constante. Isso pode ser verificado diretamente da equação e da derivação

$$\dot{h} = M\dot{x} \times y + Mx \times \dot{y} = My \times y - GM^2x \times \frac{x}{|x|} = 0.$$

A última igualdade segue do fato do produto vetorial ser nulo para vetores colineares. A conservação do momento angular leva a um sistema algébrico de três equações, reduzindo o sistema diferencial de três equações. Duas delas foram reduzidas assumindo-se que x e y pertencem a um mesmo plano, o que é, de fato, consequência da conservação de momento angular. A redução da terceira coordenada pode ser feita da seguinte forma.

Passamos para coordenadas polares (r, θ) . Assim, consideramos

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

e suas respectivas derivadas temporais.

$$\begin{aligned} y_1 &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, & y_2 &= \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y}_1 &= \ddot{r} \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \theta + r\dot{\theta}^2 \cos \theta, & \dot{y}_2 &= \ddot{r} \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Observe que o vetor derivada \dot{y} pode ser escrito como

$$\dot{y} = \left(\frac{\ddot{r}}{r} + \dot{\theta}^2 \right) x + \frac{1}{r}(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})x^\perp,$$

onde x^\perp é o vetor perpendicular a x , segundo a regra da mão direita. Mas, pela lei de Newton, \dot{y} aponta para a origem, i.e. é colinear a x e perpendicular a x^\perp . Logo, o coeficiente multiplicando x^\perp deve se anular, i.e.

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0.$$

Essa é a terceira simetria que segue da lei de conservação de momento angular. De fato, em coordenadas polares, e assumindo a redução para o plano, temos

$$h = x \times My = Mr^2\dot{\theta},$$

logo,

$$\dot{h} = 0 = M2r\dot{r}\dot{\theta} + Mr^2\ddot{\theta} = Mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}).$$

Utilizando-se a a relação $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ na equação vetorial para y , chegamos, também, à equação

$$\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2},$$

Essas duas equações formam um sistema de duas equações de segunda ordem. Introduzindo-se as variáveis $s = \dot{r}$ e $\psi = \dot{\theta}$, temos o seguinte sistema de quatro equações de primeira ordem, que é a versão em coordenadas polares do sistema de primeira ordem anterior:

$$\begin{cases} \dot{r} = s, \\ \dot{\theta} = \psi, \\ \dot{s} = -\frac{GM}{r^2} - r\psi^2, \\ \dot{\psi} = -\frac{2s\psi}{r}. \end{cases}$$

Na verdade, o sistema pode ser parcialmente desacoplado, pois θ não aparece do lado direito do sistema. Assim, podemos considerar apenas o sistema tridimensional

$$\begin{cases} \dot{r} = s, \\ \dot{s} = -\frac{GM}{r^2} - r\psi^2, \\ \dot{\psi} = -\frac{2s\psi}{r}. \end{cases}$$

Uma vez resolvido esse sistema, podemos achar θ a partir da equação $\dot{\theta} = \psi$.

Da lei de conservação de energia na forma polar e lembrando que $\dot{\theta} = \psi$, tiramos a relação

$$Mr^2\psi = \text{constante} = \mu,$$

para alguma constante não-negativa μ .

Essa é uma relação válida para cada solução do sistema. A constante μ depende, assim, da solução, e pode ser determinada a partir das condições iniciais. O conjunto de todas as soluções varia no espaço de dimensão quatro (r, s, θ, ψ) . Porém, cada solução está restrita a um conjunto menor, dado pela relação $Mr^2\psi = \mu$, para uma certa constante $\mu \geq 0$. Esse conjunto pode ser interpretado como uma “hiper-superfície” de nível. Variando μ , percorremos todas as possíveis soluções. Observe, ainda, que em cada “hiper-superfície” de nível, que tem dimensão três, há infinitas soluções, pois cada solução tem dimensão um (parametrizada pela variável temporal).

Levando em consideração que $\psi = \mu/Mr^2$, chegamos a família de sistemas bilineares

$$\begin{cases} \dot{r} = s, \\ \dot{s} = -\frac{GM}{r^2} - \frac{\mu^2}{M^2r^3}. \end{cases}$$

As quantidades θ e ψ podem ser recuperadas posteriormente, a partir de r e s .

Finalmente, temos a lei de conservação de energia total. Após a “eliminação” de um dos corpos no sistema e passando-se para coordenadas polares, utilizando-se de $|y|^2 = s^2 + (r\psi)^2$ e $\psi = \mu/rM$, temos

$$E = \frac{1}{2} \left(s^2 + \frac{\mu^2}{M^2 r^2} \right) + GM \frac{1}{r}.$$

Como cada órbita tem sua energia total preservada, cada órbita deve pertencer a uma curva de nível da função energia total $E = E(r, s)$. Em cada curva de nível $E(r, s) = E_0$, obtemos uma relação entre s e r . Substituindo essa relação na segunda equação do sistema, obtemos uma única equação de primeira ordem em r . Após resolvermos essa equação, podemos encontrar s a partir da primeira equação do sistema.

Porém, vamos prosseguir de maneira um pouco diferente. Observe que a relação de conservação de momento angular, $Mr^2\dot{\psi} = \mu$, implica em $\psi = \dot{\theta}$ ser positivo (a menos no caso degenerado $r = 0$). Assim, é possível inverter a função $\theta = \theta(t)$ e escrever, pelo menos em teoria, t em função de θ . Com isso, qualquer uma das outras coordenadas, r, s, ψ , também pode ser escrita em função de θ . Vamos, assim, considerar θ como a variável independente e escrever a solução em função dela. A idéia é obter uma equação diferencial, a mais simples possível, que nos permita uma integração explícita. Com esse objetivo, vamos considerar a a nova variável

$$w = \frac{1}{r},$$

e procurar uma equação diferencial de w em relação a θ . Para isso, podemos calcular

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{w^2 \dot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{w^2 s}{\psi}.$$

Como $\mu = Mr^2\dot{\psi} = M\psi/w^2$, obtemos

$$\frac{dw}{d\theta} = -\frac{M}{\mu} s.$$

Derivando em relação a t , temos

$$\dot{s} = -\frac{\mu}{M} \frac{d}{dt} \frac{dw}{d\theta} = -\frac{\mu}{M} \frac{d^2 w}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu}{M} \dot{\theta} \frac{d^2 w}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{M} \psi \frac{d^2 w}{d\theta^2} = -\frac{\mu^2}{M^2} w^2 \frac{d^2 w}{d\theta^2}.$$

Da segunda equação do sistema, temos

$$\dot{s} = -\frac{GM}{r^2} - \frac{\mu^2}{M^2 r^3}.$$

Logo, temos a identidade

$$\frac{\mu^2}{M^2} w^2 \frac{d^2 w}{d\theta^2} = \frac{GM}{r^2} + \frac{\mu^2}{M^2 r^3} = GM w^2 + \frac{\mu^2}{M^2} w^3.$$

Simplificando,

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} = \frac{GM^3}{\mu^2} + w.$$

Esta é uma equação linear de segunda ordem, cuja solução pode ser obtida explicitamente.

Órbita de um satélite - sistema restrito

Um outro exemplo simplificado é o de um satélite de massa m , orbitando um corpo celeste de massa $M \gg m$. Consideramos como sistema de referência coordenadas $x_1 x_2 x_3$ com a origem no centro de massa do corpo celeste de massa M . Desprezamos a influência do satélite no corpo celeste, assumindo, como aproximação, que o corpo celeste esteja em movimento inercial e que, em particular, não sofra a influência do satélite. Assumimos, ainda, que a força gravitacional aja apenas no centro de massa de cada objeto. Assim, se o centro de massa do satélite se encontra nas coordenadas $x = (x_1, x_2, x_3)$, a força gravitacional agindo nele tem a forma $F = -GmMx/|x|^3$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ é a norma euclidiana e G é a constante gravitacional universal. Em forma vetorial, temos

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -G \frac{mM}{|x|^3} x.$$

Na forma de sistema de equações de primeira ordem, temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -G \frac{M}{|x|^3} x. \end{cases}$$

Em coordenadas $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, temos um sistema de seis coordenadas. Esse sistema é exatamente o tratado anteriormente e as soluções, ou seja, as possíveis órbitas do satélite, são as cônicas.

O sistema de n -corpos celestes

Podemos ter, ainda, vários corpos celestes, com a força em cada um deles dependendo das posições relativas dos vários corpos, segundo a lei da gravitação universal. Se o número de objetos for n , precisaremos de $6n$ coordenadas para representar a configuração de todos os corpos no espaço, dando um sistema de $6n$ equações de primeira ordem na variável $u = (x, y) \in \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$.

Denotando por $x^j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j)$, $y^j = (y_1^j, y_2^j, y_3^j) \in \mathbb{R}^3$, $j = 1, \dots, n$, as posições e as velocidades do centro de massa de cada um dos n corpos, em relação a um referencial inercial, a força de atração gravitacional no j -ésimo corpo tem a forma

$$F^j(x) = F^j(x^1, \dots, x^n) = -G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_i m_j}{|x^j - x^i|^3} (x^j - x^i).$$

Assim, temos o sistema de equações

$$m_j \frac{d^2 x^j}{dt^2} = F^j(x), \quad j = 1, \dots, n.$$

que pode ser escrito como um sistema de $6n$ equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dx^j}{dt} = y^j, \\ \frac{dy^j}{dt} = \frac{1}{m_j} F^j(x). \end{cases}$$

No caso de n corpos, temos que o campo $F = (F^1, \dots, F^n)$ se escreve como o gradiente de uma função em $x = (x^1, \dots, x^n)$:

$$F(x) = -\nabla V(x), \quad V(x) = \frac{G}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{m_i m_k}{|x^k - x^i|} = G \sum_{\substack{i,k=1 \\ i < k}}^n \frac{m_i m_k}{|x^k - x^i|}$$

A função $V(x)$ é a *energia potencial gravitacional*. A *energia cinética* está associada a quantidade de movimento, e toma a forma

$$K_j = \frac{1}{2} m_j \left| \frac{dx^j}{dt} \right|^2,$$

para cada corpo celeste. Usando a notação $y = (y^1, \dots, y^n)$, $y^j = dx^j/dt$ para a velocidade do centro de massa de cada corpo celeste, temos que a energia cinética do sistema é a soma da energia cinética de cada corpo,

$$K(y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j |y^j|^2.$$

A *energia total* do sistema $u = (x, y)$ é a soma da energia cinética com a potencial:

$$E(u) = E(x, y) = K(y) + V(x),$$

que é uma quantidade conservada pelo sistema. Em outras palavras, para uma solução $u(t) = (x(t), y(t))$ do sistema, temos

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = \nabla K(y) \cdot y' + \nabla V(x) \cdot x' = y \cdot F(x) - F(x) \cdot y = 0,$$

O sistema de n -corpos pode ser colocado na forma geral

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = p, \\ \frac{dp}{dt} = F(q). \end{cases}$$

considerando-se as *coordenadas generalizadas*, formadas pelo momento $p^j = m_j y^j$ e pela posição generalizada $q^j = m_j x^j$. Assim,

As leis de conservação do centro de massa, de momento linear e de momento angular reduzem o sistema de nove dimensões (três cada uma). Assim, em um sistema de n -corpos, temos $6n - 9$ coordenadas. A conservação da energia total reduz de mais uma dimensão, nos levando a $6n - 10$ dimensões. Outras duas dimensões podem ser dispensadas graças a simetrias extras (simetria de nóculo), nos dando $6n - 12$. Ainda assim, para três ou mais corpos, temos um número de graus de liberdade alto o suficiente para complicar extremamente o problema.

O sistema restrito planar de três corpos

Nesta simplificação, assumimos que um dos corpos tem massa muito inferior a dos outros dois e desprezamos a ação gravitacional que ele exerce nos outros dois. Dessa maneira, o sistema fica parcialmente “desacoplado”, com o movimento dos corpos de massa maior independente do corpo de massa menor. O sub-sistema para os corpos de massa maior é um sistema de dois corpos e pode ser resolvido separadamente.

Uma outra simplificação passa por assumir que o movimento é planar, ou seja, o plano formado pelos três corpos não varia ao longo do movimento. Assim, precisamos de apenas duas coordenadas para representar a posição de cada corpo, digamos $x^j = (x_1^j, x_2^j)$, $j = 1, 2, 3$. Denotamos as velocidades correspondentes por $y^j = (y_1^j, y_2^j)$.

Em seguida, supomos resolvido o sub-sistema de dois corpos, conhecendo, digamos, as suas posições $x^2 = x^2(t)$ e $x^3 = x^3(t)$. Isso nos leva a um sistema não-autônomo com quatro incógnitas $x = x^1 = (x_1, x_2)$ e $y = y^1 = (y_1, y_2)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{m_1} F(x, t), \end{cases}$$

onde

$$F(x, t) = -G \frac{m_1 m_2}{|x - x^2|^3} (x - x^2(t)) - G \frac{m_1 m_3}{|x - x^3|^3} (x - x^3(t)).$$

Corpo em queda livre

No caso de um corpo em queda livre na superfície da terra, a força gravitacional pode ser aproximada por $F = -mg$, onde m denota a massa do corpo e h , a sua altitude. Assim, temos a equação

$$h'' = -g.$$

A energia potencial neste caso é $V(h) = gh$. Se considerarmos a resistência do ar, obteremos a equação

$$h'' = -gh - \alpha(h')^2.$$

Ambas equações podem ser colocadas na forma de sistemas de primeira ordem, porém, o sistema com atrito não está na forma em que a energia total é preservada.

Equações da mola

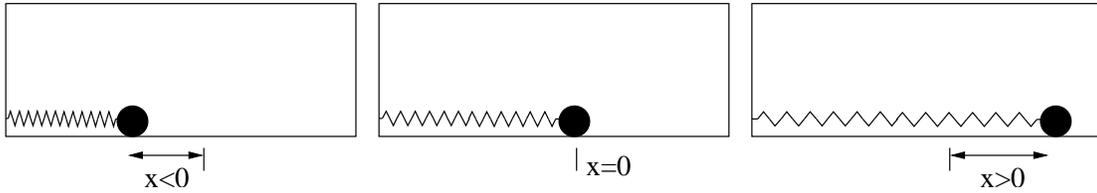


FIGURA 6. Mola comprimida, em repouso e esticada, respectivamente.

Imagine uma mola com uma extremidade presa a uma parede e com a outra extremidade presa a um objeto de massa m , como mostrado na Figura 6. Suponha que esse objeto possa se deslocar apenas em uma direção, conforme ilustrado, e seja x uma variável escalar representando o deslocamento desse objeto ao longo dessa direção, com $x = 0$ sendo a posição de repouso. Desprezando o peso da mola e o atrito do objeto com o chão, a lei de Hooke diz que a força agindo sobre a mola é proporcional ao deslocamento em relação à posição de repouso. Nesse caso, $F = -kx$, onde $k > 0$ representa um coeficiente de resistência. Quanto maior o coeficiente k , maior a resistência da mola a perturbações. Assim, a lei de Newton nos leva à equação da mola,

$$x'' = -kx, \quad (2.1)$$

onde $x'' = d^2x/dt$. Na forma de sistema de equações de primeira ordem, podemos escrever

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -kx. \end{cases} \quad (2.2)$$

Em certas situações, a mola pode apresentar leis de resistência diferentes, por exemplo, $F = -k_1x + k_2x^3$, com $k_1 > 0$ e $k_2 \neq 0$. No caso $k_2 > 0$, temos uma *mola dura*, e no caso $k_2 < 0$, temos uma *mola macia*. No caso de considerarmos atrito, teremos uma contribuição da forma $-\alpha x'$ à força. Assim, a equação da mola com atrito pode ser escrita na forma

$$x'' + g(x) + \alpha x' = 0, \quad (2.3)$$

onde $g(x) = kx$ ou $g(x) = k_1x + k_2x^2$. Na forma de sistemas,

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -g(x) - \alpha y. \end{cases} \quad (2.4)$$

Equação do pêndulo

Considere uma haste “sem peso” de comprimento l , com uma extremidade fixa e a outra segurando um objeto pontual de massa m (veja Figura 7) que se desloca ao longo de um arco de uma circunferência (de raio l). Seja g a aceleração da gravidade e seja $\theta = \theta(t)$ o ângulo que a haste faz com o eixo vertical no instante de tempo t .

A componente tangencial ao movimento da força gravitacional exercida no objeto é $-mg \sin \theta$. A velocidade angular do objeto é θ' e a sua velocidade tangencial é $l\theta'$. A sua aceleração tangencial é $l\theta''$. Pela segunda lei de Newton temos, então, que $-mg \sin \theta = ml\theta''$, logo

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t).$$

Fazendo $\psi(t) = \theta'(t)$, podemos escrever a equação acima como um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} \theta' = \psi \\ \psi' = -\frac{g}{l} \sin \theta. \end{cases}$$

Pêndulo com atrito

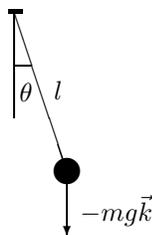


FIGURA 7. Pêndulo

Se levarmos em consideração um atrito existente na extremidade fixa da haste, obtemos uma força proporcional a $-\theta'$ se opondo ao sentido de movimento e levando à equação

$$\theta'' = -\frac{c}{ml}\theta' - \frac{g}{l}\sin\theta,$$

onde c é o coeficiente de atrito. Para simplificar, podemos mudar a escala de tempo introduzindo a função $\eta(t) = \theta(\sqrt{l/gt})$ e chegando a

$$\eta'' = -k\eta' - \sin\eta,$$

para uma constante $k \geq 0$. Fazendo $x = \eta$ e $y = \eta'$ chega-se ao sistema bidimensional

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x - ky, \end{cases}$$

2.2. Modelagem molecular e de proteínas. A segunda lei de Newton pode ser aplicada, também, para se determinar a estrutura geométrica de moléculas e, em particular, de proteínas. Essa estrutura é dada pela posição relativa dos diversos átomos que formam uma molécula.

2.3. Sistemas de vórtices bidimensionais.

2.4. Decaimento radioativo. Um outro exemplo clássico é o da lei do decaimento radioativo, descoberta pelo físico neozelandês Rutherford. Essa lei diz respeito a átomos de certos elementos, ditos radioativos, que se desintegram espontaneamente em átomos de outros elementos.

Para uma certa unidade de tempo τ , há uma certa probabilidade p de decaimento por unidade de tempo, que depende do material radioativo. Durante um intervalo Δt , essa probabilidade de decaimento se torna $p\Delta t/\tau$. Se a massa total do material radioativo em um instante t for $x(t)$, então, em média, a quantidade de massa que deverá decair durante esse intervalo Δt de tempo é dada por $(p\Delta t/\tau)x(t)$. Denotando por Δx a variação de massa nesse intervalo de tempo, temos a relação

$$\Delta x = -\frac{p}{\tau}x(t)\Delta t.$$

Fazendo Δt tender a zero, obtemos a equação diferencial para o decaimento radioativo:

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t),$$

onde $k = p/\tau$ é uma constante positiva que depende do elemento radioativo em questão (e.g. rádio, polônio, carbono 14, urânio 235). Essa lei expressa que a taxa de decaimento da massa de um material radioativo em relação ao tempo é proporcional à massa do material.

Para uma quantidade inicial x_0 de material radioativo, a quantidade restante após um tempo t é a solução

$$x(t) = x_0 e^{-kt}$$

da equação diferencial. A *meia-vida* do elemento radioativo é o tempo $\tau_{1/2}$ para o qual $\exp(-k\tau_{1/2}) = 1/2$. Com a medida da massa de uma amostra de um material radioativo em dois instantes diferentes, é possível determinar a constante k e a meia-vida do material. Em seguida, dado uma porção do mesmo material encontrada em um objeto de idade indeterminada, é possível, através do exame da massa dessa porção de material, de uma estimativa da quantidade de material existente inicialmente e da fórmula de decaimento de massa, estimar a idade do objeto.

2.5. Sistemas populacionais. Há, ainda, “leis” obtidas “heurísticamente”, sem tanto embasamento em leis físicas ou químicas fundamentais como a lei de Newton. Exemplos desse tipo são comuns em ecologia, por exemplo, em relação ao crescimento de uma população segundo taxas de natalidade e mortalidade, ou em relação às populações de uma ou mais espécies interagindo de alguma forma.

No caso de uma única população, em certo intervalo de tempo Δt , a taxa de crescimento da população pode ser expressa por $\Delta x/\Delta t$, onde x indica o número de habitantes e Δx a variação da população nesse intervalo de tempo. Uma hipótese natural é de que essa taxa de crescimento seja proporcional ao número de habitantes, ou seja

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = kx.$$

Assumindo que essa proporção não varie com o tempo e fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos a lei

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Dada uma população x_0 em um instante t_0 , a população no instante t será, segundo essa lei, $x(t) = x_0 \exp(k(t-t_0))$.

Fatores ambientais e sociais, porém, podem fazer com que a taxa de crescimento não seja diretamente proporcional ao número de habitantes. Um modelo clássico é $k = k_0 - \alpha_0 x$, onde α_0 indica que a taxa de crescimento médio diminuiu conforme a população aumenta, indicando, por exemplo, escassez de recursos e problemas sociais.

No caso de duas populações interagindo entre si, se uma população tem $x(t)$ indivíduos e outra tem $y(t)$ indivíduos, podemos ter uma relação da forma

$$\begin{cases} x' = (a - by - \lambda x)x, \\ y' = (c - dx - \mu y)y, \end{cases}$$

com $a, b, c, d, \lambda, \mu > 0$ e $x, y \geq 0$.

2.6. Reações químicas e bioquímicas.

2.7. Modelos em fisiologia.

2.8. Modelos em economia.

2.9. Circuitos elétricos.

3. IMPLEMENTAÇÕES NUMÉRICAS

PARTE 2

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS -
EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE**

4. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE EDOS

Teorema de Picard-Lindelöf. Unicidade e não-unicidade. Teorema de Peano. Solução maximal. [9, 13]

4.1. Teorema de Picard-Lindelöf.

Definição 4.1. $Lip_x(\mathcal{W}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, \mathbb{R}^m); \exists L \geq 0, |f(t, y) - f(t, x)| \leq L|y - x|, \forall (t, x), (t, y) \in \mathcal{W}\}, \forall \mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Definição 4.2. $Lip_{loc,x}(\mathcal{W}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, \mathbb{R}^m); f \in Lip_x(K), \forall K \subset \mathcal{W} \text{ compacto}\}, \forall \mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Teorema 4.3 (Picard-Lindelöf). *Sejam $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{W} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; |x - x_0| \leq r, |t - t_0| \leq \delta\}$, $r, \delta > 0$. Se $f \in Lip_x(\mathcal{W})$, então existe um único $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^m)$, tal que $(t, x(t)) \in \mathcal{W}$, $x' = f(t, x)$ e $x(t_0) = x_0$, onde $\varepsilon = \min\{\delta, r/M\}$ e $M = \max_{\mathcal{W}} |f|$.*

Dem.: (Existência) Seja $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ e defina em I a seqüência de funções

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s)) ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por indução, obtemos

$$|x_n(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_{n-1}(s))| ds \leq M|t - t_0| \leq M \frac{r}{M} = r,$$

de modo que $(t, x_n(t)) \in \mathcal{W}, \forall t \in I$. Agora,

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq M|t - t_0|,$$

e, por indução,

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \int_{t_0}^t L|x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)| ds \leq \frac{L^{n-1}M}{(n-1)!} \int_{t_0}^t |s - t_0|^{n-1} ds \leq \frac{L^{n-1}M|t - t_0|^n}{n!} \leq \frac{L^{n-1}M\varepsilon^n}{n!},$$

$$\implies |x_{n+m}(t) - x_n(t)| \leq \sum_{n+1}^{n+m} |x_j(t) - x_{j-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{L^j \varepsilon^j}{j!} = \frac{M}{L} \frac{L^n \varepsilon^n}{n!} e^{\varepsilon L},$$

$$\implies x_n \rightarrow x \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m) \text{ uniformemente.}$$

No limite:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

de modo que x é \mathcal{C}^1 em I , $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ e, como \mathcal{W} é fechado, $(t, x(t)) \in \mathcal{W}$.

(Unicidade) Se $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$ também é tal que $(t, y(t)) \in \mathcal{W}$, $y' = f(t, y)$ e $y(t_0) = x_0$, então, em $[t_0, t_0 + \varepsilon]$, $w(t) = |y(t) - x(t)|$ satisfaz

$$w(t) \leq \int_{t_0}^t Lw(s) ds.$$

Integrando em t de t_0 a t_1 , com $t_0 < t_1 \leq t_0 + \varepsilon$, obtemos

$$\int_{t_0}^{t_1} w(t) dt \leq L \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^t w(s) ds dt = L \int_{t_0}^t \int_s^{t_1} w(s) dt ds = L \int_{t_0}^{t_1} w(s)(t_1 - s) ds \leq L(t_1 - t_0) \int_{t_0}^{t_1} w(t) dt,$$

de modo que para $0 < t - t_0 < L^{-1}$ temos $w(t) = 0$. É fácil continuar esse argumento para concluir que em todo o intervalo $[t_0, t_0 + \varepsilon]$, $w \equiv 0$, ou seja, $y(t) \equiv x(t)$. A demonstração é análoga em $[t_0 - \varepsilon, t_0]$ (ou apenas inverta o tempo). Uma outra demonstração da unicidade pode ser obtida através do lema de Gronwall, que veremos depois para a continuidade das soluções em relação à condição inicial x_0 . \square

Corolário 4.4. *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_{loc,x}(\mathcal{W})$. Então para qualquer $(t_0, x_0) \in \mathcal{W}$, existe $\varepsilon > 0$ e um único $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^m)$ tal que $(t, x(t)) \in \mathcal{W}$, $x' = f(t, x)$ e $x(t_0) = x_0$.*

Observação 4.5. *A unicidade (e existência) pode ser garantida também se a continuidade Lipschitz for relaxada para $|f(t, y) - f(t, x)| \leq L\varphi(|y - x|)$ com $\varphi : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ contínua, não decrescente e tal que $\int_0^1 1/\varphi(r) dr = \infty$ [5, 8]. A forma de $\varphi(r)$ para $r \geq 1$ não importa pois o resultado é local. Um caso particular é $\varphi(r) = r(1 + \ln r^{-1})$, $0 < r < 1$, que tem aplicação na equação de Euler, uma EDP que modela o movimento de fluidos incompressíveis não-viscosos. Note que para $0 < r < e^{-1}$, temos $r(1 + \ln r^{-1}) \leq 2r \ln r^{-1}$ e uma primitiva de $1/(r \ln r^{-1})$ é $-\ln \ln r^{-1}$ de forma que a integral acima diverge.*

Observação 4.6. *A continuidade de f em t pode ser relaxada para incluir termos independentes de x que sejam descontínuos ou até distribuições. [8]*

4.2. Teorema de Peano.

Exemplo 4.7. *$f(x) = x^{2/3}$ é \mathcal{C}^1 longe da origem, então $\forall x_0 \neq 0, \exists \varepsilon > 0$ e uma única solução de $x' = x^{2/3}$ em $(-\varepsilon, \varepsilon)$, com $x(0) = x_0$. Mas se $x_0 = 0$, o Teorema de Picard não garante a existência de solução pois $x^{2/3}$ é apenas Hölder e não Lipschitz-contínua em qualquer vizinhança da origem.*

Teorema 4.8 (Peano). *Seja $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e seja $\mathcal{W} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; |x - x_0| \leq r, |t - t_0| \leq \delta\}$, $r, \delta > 0$. Se $f \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, \mathbb{R}^m)$, então existe $x \in \mathcal{C}^1((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \mathbb{R}^m)$, tal que $(t, x(t)) \in \mathcal{W}$, $x' = f(t, x)$ e $x(t_0) = x_0$, onde $\varepsilon = \min\{\delta, r/M\}$ e $M = \max_{\mathcal{W}} |f|$.*

Dem.: Pelo Teorema de Stone-Weierstrass, \exists polinômios $p_n \rightarrow f$ uniformemente em \mathcal{W} (que podemos tomar tais que $\max_{\mathcal{W}} |f - p_n| \leq 1/n$). Então, pelo Teorema de Picard, existe uma solução $x_n \in \mathcal{C}^1(I_n, \mathbb{R}^m)$ de $x'_n = p_n(t, x_n)$, $x_n(t_0) = x_0$, com $(t, x_n(t)) \in \mathcal{W}$, onde $I_n = [t_0 - \varepsilon_n, t_0 + \varepsilon_n]$ e $\varepsilon_n = \min\{\delta, r/(M + n^{-1})\}$. Como \mathcal{W} é limitado, $\{x_n\}_n$ é uniformemente limitada. Além disso,

$$|x_n(t) - x_n(s)| \leq \int_s^t |p_n(\tau, x_n(\tau))| d\tau \leq (M + n^{-1})|t - s| \leq (M + 1)|t - s|,$$

ou seja, $\{x_n\}_n$ é equicontínua. O Teorema de Arzela-Ascoli nos diz que existe $x \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ e uma subsequência $x_{n_j} \rightarrow x$ pontualmente em $I = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) = \cup_n I_n$ e uniformemente em qualquer subintervalo compacto de I . No limite quando $j \rightarrow \infty$, obtemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

de modo que $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$, $x' = f(t, x)$ e $x(t_0) = x_0$. □

Observação 4.9. *O Teorema de Peano não garante a unicidade. De fato, a equação $x' = x^{2/3}$ com a condição $x(0) = 0$ possui a solução $x(t) \equiv 0$, assim como a solução $\tilde{x}(t) = (t/3)^3$ e uma infinidade de outras soluções $x_{a,b}$, $a \leq 0 \leq b$, com $x_{a,b}(t) = ((t - a)/3)^3$, se $t < a$, $x_{a,b}(t) = 0$, se $a \leq t \leq b$ e $x_{a,b}(t) = ((t - b)/3)^3$, se $t > b$.*

Observação 4.10. *Os Teoremas de Picard e de Peano não garantem um intervalo máximo de existência da solução. Por exemplo, $f(x) = 1 + x^2$ é \mathcal{C}^1 em \mathbb{R} e é globalmente Lipschitz em cada intervalo limitado $[-r, r]$, com $M = \max_{[-r,r]} |f| = M(r) = 1 + r^2$. Como $r/M(r) = r/(1 + r^2)$ alcança o valor máximo $1/2$, o Teorema de Picard garante, no máximo, a existência (e unicidade) de solução do problema $x' = 1 + x^2$, $x(0) = 0$, no intervalo $[-1/2, 1/2]$. Mas a solução é explicitamente $x(t) = \operatorname{tg} t$, que está definida em $(-\pi/2, \pi/2)$.*

Observação 4.11. *No caso de uma equação escalar da forma $x' = f(x)$, como acima, com $f(x)$ diferente de zero na região de interesse, a solução pode ser obtida integrando-se a relação $dx/f(x) = dt$, que nos dá $\int_{x_0}^x 1/f(s) ds = t - t_0$. Analogamente, podemos obter a solução da equação escalar $x' = f(x)/g(t)$, com $f(x)$ e $g(t)$ diferentes de zero na região de interesse, integrando-se $dx/f(x) = dt/g(t)$, que leva a $\int_{x_0}^x 1/f(s) ds = \int_{t_0}^t 1/g(s) ds$. A relação $dx/f(x) = dt/g(t)$ é, na verdade, uma relação entre formas diferenciais no plano xt e as trajetórias são “soluções” da equação $\omega = 0$, onde $\omega = dx/f(x) - dt/g(t)$. Como $dx/f(x)$ é uma forma*

exata e não contém dt , a integral de $dx/f(x)$ ao longo de uma trajetória é igual a integral ao longo da projeção dessa trajetória no eixo x . Algo análogo pode se dizer de $dt/g(t)$, o que nos leva a equação integral acima para achar $x = x(t)$. [1]

4.3. Soluções maximais.

Definição 4.12 (Solução maximal). *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_{loc,x}(\mathcal{W})$. Para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{W}$, defina o intervalo $I_m(t_0, x_0)$ como sendo a união de todos os intervalos $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 tais que existe $x \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ com $(t, x(t)) \in \mathcal{W}$, $x' = f(t, x)$ e $x(t_0) = x_0$. (Note que pelo Teorema de Picard existe pelo menos um intervalo I dessa forma.) Pela unicidade de soluções, garantida pelo Teorema de Picard, duas soluções definidas respectivamente em intervalos I e J como acima coincidem na interseção $I \cap J$ e, portanto, podemos concluir que há uma única solução definida em todo o intervalo aberto $I_m(t_0, x_0)$, que denotamos por $x(t; t_0, x_0)$.*

Definição 4.13. *Denotamos por $T_m^+(t_0, x_0)$ e $T_m^-(t_0, x_0)$ o supremo e o ínfimo, respectivamente, do intervalo $I_m(t_0, x_0)$. Então $I_m(t_0, x_0) = (T_m^-(t_0, x_0), T_m^+(t_0, x_0))$, com $-\infty \leq T_m^+(t_0, x_0) < t_0 < T_m^-(t_0, x_0) \leq +\infty$. Além disso, definimos $I_m^+(t_0, x_0) = [t_0, T_m^+(t_0, x_0))$ e $I_m^-(t_0, x_0) = (T_m^-(t_0, x_0), t_0]$. No caso autônomo, definimos $I_m(x_0) = I_m(0, x_0)$, $T_m^+(x_0) = T_m^+(0, x_0)$, $T_m^-(x_0) = T_m^-(0, x_0)$, $I_m^+(x_0) = [0, T_m^+(x_0))$ e $I_m^-(x_0) = (T_m^-(x_0), 0]$.*

Teorema 4.14. *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_{loc,x}(\mathcal{W})$. Seja $(t_0, x_0) \in \mathcal{W}$. Então*

$$(t, x(t; t_0, x_0)) \rightarrow \partial\mathcal{W}, \quad \text{quando } t \nearrow T_m^+(t_0, x_0) \text{ e } t \searrow T_m^-(t_0, x_0),$$

no sentido de que $\forall K \subset \mathcal{W}$ compacto, existe $I \subset I_m(t_0, x_0)$ compacto tal que $(t, x(t; t_0, x_0)) \in \mathcal{W} \setminus K, \forall t \in I_m(t_0, x_0) \setminus I$.

Dem.: Se o resultado fosse falso, teríamos $T_m^+(t_0, x_0) < +\infty$ e existiriam um compacto $K \subset \mathcal{W}$ e uma seqüência $t_j \nearrow T_m^+(t_0, x_0)$ tais que $(t_j, x(t_j)) \in K, \forall j$, onde $x(t_j) = x(t_j, t_0, x_0)$. (Ou então teríamos algo análogo para $T_m^-(t_0, x_0)$.)

Sendo K compacto, então $\text{dist}(w, \partial\mathcal{W}) \geq \varepsilon, \forall w \in K$, para algum $\varepsilon > 0$. Considerando, então, a família de equações

$$\begin{cases} y_j' = f(t, y_j), \\ y_j(t_j) = x(t_j), \end{cases}$$

teríamos, pelo Teorema de Picard, soluções únicas y_j definidas, respectivamente, em intervalos $[t_j - \tau_j, t_j + \tau_j]$, onde $\tau_j = \min\{\delta_j, r_j/M_j\}$, com $\delta_j, r_j > \varepsilon/2$ e $M_j \leq \max_{B_{\varepsilon/2}(K)} |f|$. Com isso, $\tau_j \geq \tau$ para algum $\tau > 0$ e existiria um $J \in \mathbb{N}$ tal que $T_m^+ - \tau < t_J < T_m^+$ onde $T_m^+ = T_m^+(t_0, x_0)$, de forma que $t_J + \tau > T_m^+$.

Basta agora mostrar que

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & T_m^-(t_0, x_0) < t \leq t_J, \\ y_J(t), & t_J < t < t_J + \tau, \end{cases}$$

seria solução de $\tilde{x}' = f(t, \tilde{x})$ com $\tilde{x}(t_0) = x_0$, pois ela estaria definida além de T_m^+ o que seria uma contradição com a definição de T_m^+ .

Para $t > t_J$,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= y_J(t) = y_J(t_J) + \int_{t_J}^t f(s, y_J(s)) ds \\ &= x(t_J) + \int_{t_J}^t f(s, \tilde{x}(s)) ds \\ &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t_J} f(s, x(s)) ds + \int_{t_J}^t f(s, \tilde{x}(s)) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}(s)) ds, \end{aligned}$$

o que obviamente também valeria para $T_m^-(t_0, x_0) < t \leq t$. Portanto, \tilde{x} seria C^1 e seria uma solução em $(T_m^-(t_0, x_0), T_J + \tau)$ com $T_J + \tau > T_m^+$, o que completa a demonstração. \square

Observação 4.15. Se $\mathcal{W} = (a, +\infty) \times \mathcal{U}$, então o teorema acima diz que ou $T_m^+(t_0, x_0) = +\infty$ ou $T_m^+(t_0, x_0) < +\infty$ e, nesse caso, $x(t; t_0, x_0) \rightarrow \partial\mathcal{U}$, quando $t \nearrow T_m^+(t_0, x_0)$. Em particular, se $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, então ou $T_m^+(t_0, x_0) = +\infty$ ou $T_m^+(t_0, x_0) < +\infty$ e, nesse caso, $|x(t, t_0, x_0)| \rightarrow +\infty$ quando $t \nearrow T_m^+(t_0, x_0)$. Analogamente para $T_m^-(t_0, x_0)$.

Corolário 4.16. A demonstração acima de que \tilde{x} é solução de $\tilde{x}' = f(t, \tilde{x})$ com $\tilde{x}(t_0) = x_0$ mostra que $x(t; t_1, x(t_1; t_0, x_0)) = x(t; t_0, x_0), \forall (t_0, x_0) \in \mathcal{W}, \forall t, t_1 \in I_m(t_0, x_0)$, com $I_m(t_1, x(t_1; t_0, x_0)) = I_m(t_0, x_0)$.

Problemas

4.1 Uma equação $x' = f(t, x)$ é dita homogênea se $f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x), \forall \lambda > 0$. Mostre que para qualquer $\lambda > 0, \xi(\tau) = \lambda^{-1}x(\lambda\tau)$ também é solução dessa equação, *i.e.*, $d\xi(\tau)/d\tau = f(\tau, \xi(\tau))$. Em outras palavras, o conjunto das órbitas de uma equação homogênea é invariante pelo grupo de transformações $\{G_s\}_s, s \in \mathbb{R}$, definido por $G_s(t, x) = (e^s t, e^s x)$ (onde $e^s = 1/\lambda > 0$, na notação acima, com $(\tau, \xi) = G_s(t, x)$).

4.2 Mostre que a mudança de variáveis $x = yt$, com $t > 0$, transforma uma equação homogênea em uma equação com variáveis separáveis. Resolva a equação

$$x' = \frac{3x - t}{2t}, \quad x(1) = 2.$$

4.3 Mostre que a mudança para coordenadas polares $t = r \cos \theta, x = r \sin \theta$ também transforma uma equação homogênea $x' = f(t, x)$ em uma equação com variáveis separáveis $dr/d\theta = g(r)h(\theta)$.

4.4 Uma equação $x' = f(t, x)$ é dita quase-homogênea com pesos α e β se $f(\lambda^\alpha t, \lambda^\beta x) = \lambda^{\beta-\alpha} f(t, x), \forall \lambda > 0$. (Note que uma equação homogênea corresponde ao caso particular em que $\alpha = \beta = 1$.) Seja $x = x(t)$ uma solução de $x' = f(t, x)$. Mostre que para qualquer $\lambda > 0, \xi(\tau) = \lambda^{-\beta} x(\lambda^\alpha \tau)$ também é solução dessa equação, *i.e.*, $d\xi(\tau)/d\tau = f(\tau, \xi(\tau))$. Em outras palavras, o conjunto das órbitas de uma equação quase-homogênea com pesos α e β é invariante pelo grupo de transformações $\{G_s\}_s, s \in \mathbb{R}$, definido por $G_s(t, x) = (e^{\alpha s} t, e^{\beta s} x)$ (onde $e^s = 1/\lambda > 0$ na notação acima, com $(\tau, \xi) = G_s(t, x)$).

4.5 Mostre que a mudança de coordenadas $x^\alpha = t^\beta y$ transforma uma equação quase-homogênea $x' = f(t, x)$ com pesos α e β em uma equação com variáveis separáveis $y'(t) = g(y)/t$.

4.6 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Suponha que existam duas soluções distintas definidas em $[0, T], T > 0$, do problema $x' = f(x), x(0) = x_0$. Mostre que há uma infinidade de soluções distintas.

4.7 Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^m$ um aberto conexo e seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^m$ analítica. Seja $w_0 \in \mathcal{U}$. Mostre, adaptando o Teorema de Picard-Lindelöf, que existe uma vizinhança de w_0 em \mathcal{U} e uma única função $w = w(z)$ holomorfa nessa vizinhança que satisfaz $w(0) = w_0$ e

$$\frac{d}{dz} w(z) = f(w(z)).$$

Conclua que se f é uma função real analítica então as soluções de $x' = f(x)$ são funções reais analíticas no seu domínio de definição.

4.8 Estenda o resultado do problema anterior para o caso de uma função analítica $f(z, w)$.

4.9 Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas com f e h localmente Lipschitz. Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ y' = g(x)h(y), \end{cases}$$

tem soluções locais únicas.

4.10 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Adapte o método de iteração de Picard para mostrar a existência e a unicidade de soluções locais das seguintes equações diferenciais integrais:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + \int_0^t g(x(s)) ds \\ x(0) = x_0; \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \int_0^t g(x(s)) ds \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

5. DEPENDÊNCIA NAS CONDIÇÕES INICIAIS E NOS PARÂMETROS

Lema de Gronwall e continuidade Lipschitz em relação às condições iniciais. Teorema do ponto fixo uniforme. (Teoremas da função implícita e da função inversa.) Dependência nas condições iniciais e nos parâmetros. [4, 8, 13]

5.1. Dependência Lipschitz.

Lema 5.1 (Gronwall). *Sejam $\xi, \beta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que $\beta \geq 0$ e*

$$\xi(t) \leq \xi_0 + \int_{t_0}^t \beta(s)\xi(s) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

para algum $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Então,

$$\xi(t) \leq \xi_0 e^{\int_{t_0}^t \beta(s) ds}, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Dem.: Defina

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \xi_0 + \int_{t_0}^t \beta(s)\xi(s) ds. \\ \implies \eta &\in \mathcal{C}^1([t_0, t_1]), \quad \xi(t) \leq \eta(t) \quad \text{e} \quad \eta'(t) = \beta(t)\xi(t) \leq \beta(t)\eta(t), \\ \implies \left(\eta(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s) ds}\right)' &\leq 0 \quad \implies \eta(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s) ds} - \eta(t_0) \leq 0, \\ \implies \xi(t) \leq \eta(t) &\leq \eta(t_0)e^{\int_{t_0}^t \beta(s) ds} = \xi_0 e^{\int_{t_0}^t \beta(s) ds}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.2. *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e seja $f \in Lip_x(\mathcal{W})$ com constante de Lipschitz L . Então, para quaisquer (t_0, x_1) e (t_0, x_2) em \mathcal{W} temos*

$$|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_2)| \leq |x_1 - x_2| e^{L|t-t_0|},$$

para todo $t \in I_m(t_0, x_1) \cap I_m(t_0, x_2)$.

Dem.: Usando a forma integral da equação diferencial, temos que a função $w(t) = |x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_2)|$ satisfaz

$$w(t) \leq |x_1 - x_2| + L \int_{t_0}^t w(s) ds,$$

para todo $t \in [t_0, T_m^+(t_0, x_1)) \cap [t_0, T_m^+(t_0, x_2))$. Uma aplicação do lema de Gronwall a w prova o resultado desejado quando $t \geq t_0$. O resultado para $t < t_0$ pode ser obtido invertendo-se o tempo e utilizando-se a equação diferencial satisfeita por $\tau \mapsto x(-\tau, t_0, x_0)$. □

Corolário 5.3. *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_{loc,x}(\mathcal{W})$. Então, para qualquer compacto $K \subset \mathcal{W}$, existe $L_K \geq 0$ tal que para quaisquer (t_0, x_1) e (t_0, x_2) em K temos*

$$|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_2)| \leq |x_1 - x_2| e^{L_K|t-t_0|},$$

para todo $t \in I_m(t_0, x_1) \cap I_m(t_0, x_2)$ tal que $x(s; t_0, x_1), x(s; t_0, x_2) \in K$, para todo s entre t_0 e t .

Dem.: Basta considerar f restrita ao compacto K e aplicar o Teorema 5.2. □

Corolário 5.4. *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_{loc,x}(\mathcal{W})$. Dados $(t_0, x_1), (t_0, x_2) \in \mathcal{W}$ e dado um intervalo I incluído compactamente em $I_m(t_0, x_1) \cap I_m(t_0, x_2)$, existe $L_I \geq 0$ tal que*

$$|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_2)| \leq |x_1 - x_2| e^{L_I|t-t_0|},$$

para todo $t \in I$.

Dem.: Basta aplicar o corolário anterior ao conjunto (compacto em \mathcal{W})

$$K = \{x(t, t_0, x_1); t \in \tilde{I}\} \cup \{x(t, t_0, x_2); t \in \tilde{I}\},$$

onde \tilde{I} é o menor intervalo que contém I , t_1 e t_2 . □

Teorema 5.5. *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e seja $f \in Lip_x(\mathcal{W})$ limitada. Seja L a constante de Lipschitz de f em relação a x e seja M o supremo de f em \mathcal{W} . Então, para quaisquer (t_1, x_1) e (t_2, x_2) em \mathcal{W} com $t_1 \in I_m(t_2, x_2)$ e $t_2 \in I_m(t_1, x_1)$, temos*

$$|x(t; t_1, x_1) - x(t; t_2, x_2)| \leq \{|x_1 - x_2| + M|t_1 - t_2|\}e^{L(\min|t-t_1|, |t-t_2|)},$$

para todo $t \in I_m(t_1, x_1) \cap I_m(t_2, x_2)$.

Dem.: Como

$$x(t; t_i, x_i) = x_i + \int_{t_i}^t f(s, x(s; t_i, x_i)) ds, \quad i = 1, 2,$$

a diferença $w(t) = |x(t; t_1, x_1) - x(t; t_2, x_2)|$ satisfaz, em $[t_i, +\infty) \cap I_m(t_1, x_1) \cap I_m(t_2, x_2)$, para $i = 1$ ou 2 ,

$$\begin{aligned} w(t) &\leq |x_1 - x_2| + \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(t; t_j, x_j)) ds \right| + \int_{t_i}^t |f(s, x(s; t_1, x_1)) - f(s, x(s; t_2, x_2))| ds \\ &\leq |x_1 - x_2| + M_K|t_1 - t_2| + L_K \int_{t_i}^t w(s) ds, \end{aligned}$$

onde $j = 1$, se $i = 2$, e $j = 2$ se $i = 1$. O resultado para $t \geq t_0$ pode agora ser facilmente obtido com o uso do lema de Gronwall. O resultado para $t < t_0$ pode ser obtido invertendo-se o tempo. □

Corolário 5.6. *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_{loc,x}(\mathcal{W})$. Então, para qualquer compacto $K \subset \mathcal{W}$, existem constantes $L_K, M_K \geq 0$ tais que para quaisquer (t_1, x_1) e (t_2, x_2) em K com $t_1 \in I_m(t_2, x_2)$ e $t_2 \in I_m(t_1, x_1)$, temos*

$$|x(t; t_1, x_1) - x(t; t_2, x_2)| \leq \{|x_1 - x_2| + M_K|t_1 - t_2|\}e^{L_K(\min|t-t_1|, |t-t_2|)},$$

para todo $t \in I_m(t_1, x_1) \cap I_m(t_2, x_2)$ tal que $x(s; t_1, x_1), x(s; t_2, x_2) \in K$ para todo s entre t_1 e t e entre t_2 e t .

Dem.: Basta considerar f restrita ao compacto K e aplicar o Teorema 5.5. □

Corolário 5.7. *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_{loc,x}(\mathcal{W})$. Dados $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in \mathcal{W}$ e dado um intervalo I incluído compactamente em $I_m(t_1, x_1) \cap I_m(t_2, x_2)$, existem $L_I, M_I \geq 0$ tais que*

$$|x(t; t_1, x_1) - x(t; t_2, x_2)| \leq \{|x_1 - x_2| + M_I|t_1 - t_2|\}e^{L_I(\min|t-t_1|, |t-t_2|)},$$

para todo $t \in I$.

Dem.: Basta aplicar o corolário anterior ao conjunto (compacto em \mathcal{W})

$$K = \{x(t, t_1, x_1); t \in \tilde{I}\} \cup \{x(t, t_2, x_2); t \in \tilde{I}\},$$

onde \tilde{I} é o menor intervalo que contém I , t_1 e t_2 . □

Proposição 5.8. *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_{loc,x}(\mathcal{W})$. Seja $\mathcal{D} = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; (t_0, x_0) \in \mathcal{W} \text{ e } t \in I_m(t_0, x_0)\}$, que é o domínio de definição da solução $x(t; t_0, x_0)$ da equação $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Então \mathcal{D} é aberto e a transformação $(t_0, x_0) \mapsto x(t; t_0, x_0)$ é localmente Lipschitz contínua onde estiver definida.*

Dem.: Pelo resultado de existência local de solução é fácil deduzir que qualquer ponto da forma (t_0, t_0, x_0) , com $(t_0, x_0) \in \mathcal{W}$, é interior a \mathcal{D} . Seja, agora, $(T, t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ com $T \neq t_0$. Vamos considerar o caso em que $T > t_0$, pois o outro caso é análogo.

Como o intervalo $[t_0, T]$ é compacto e \mathcal{W} é aberto, existe um compacto $K \subset \mathcal{W}$ que é uma vizinhança do conjunto compacto $x([t_0, T], t_0, x_0)$. Mais precisamente, sendo $x([t_0, T], t_0, x_0)$ compacto, existe um $\varepsilon > 0$ tal

que a bola fechada em \mathbb{R}^m de raio ε e centrada em $x(t, t_0, x_0)$ está toda contida em K para qualquer $t \in [t_0, T]$. Note que com isso temos $T_m^-(t_0, x_0) < t_0 - \varepsilon < T + \varepsilon < T_m^+(t_0, x_0)$ pelo Teorema 4.14.

Sejam L_K e M_K como no Teorema 5.6 para o compacto K . Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta(1 + M_K)e^{L_K(T+\varepsilon-t_0)} < \varepsilon$, que implica, em particular, em $\delta < \varepsilon$, de modo que $x(t; t_0, x_0)$ está definido para $t \in [t_0 - \delta, T + \varepsilon]$. Então, para qualquer (t_1, x_1) tal que $|t_1 - t_0| + |x_1 - x_0| < \delta < \varepsilon$, temos pelo Teorema 5.6 que

$$\begin{aligned} |x(t; t_1, x_1) - x(t; t_0, x_0)| &\leq \{|x_1 - x_0| + M_K|t_1 - t_0|\}e^{L_K(\min t-t_1, t-t_0)} \\ &\leq (1 + M_K)\delta e^{L_K(T+\varepsilon-t_0)} < \varepsilon, \end{aligned} \quad (5.1)$$

para todo $t \in [t_0 - \delta, T + \varepsilon] \cap I_m(t_1, x_1)$. Portanto, $x(t; t_1, x_1) \in K$ para todo $t \in [t_0 - \delta, T + \varepsilon] \cap I_m(t_1, x_1)$. Pelo Teorema 4.14, $x(t; t_1, x_1)$ se “aproxima” do bordo $\partial\mathcal{W}$, e, portanto, sai do compacto K , quando t se “aproxima” dos extremos de $I_m(t_1, x_1)$. Logo, necessariamente $[t_0 - \delta, T + \varepsilon] \subset I_m(t_1, x_1)$. Em outras palavras, o conjunto $\{(t, x_1, t_1); |t - T| < \varepsilon, |t_1 - t_0| + |x_1 - x_0| < \delta\}$ está contido em \mathcal{D} , o que mostra que \mathcal{D} é aberto. A continuidade Lipschitz segue da estimativa (5.1) \square

Observação 5.9. Note que a Proposição 5.8 mostra que $(t_0, x_0) \mapsto T_m^+(t_0, x_0)$ é semicontínua inferior em \mathcal{W} e $(t_0, x_0) \mapsto T_m^-(t_0, x_0)$ é semicontínua superior em \mathcal{W} .

Observação 5.10. O sistema $x' = x^2 - yx^3$, $y' = y$ é um exemplo em que $T_m^+(x_0, y_0)$ e $T_m^-(x_0, y_0)$ são descontínuos. Por exemplo, $T_m^+(x_0, y_0) = +\infty$ para $y_0 > 0$ e $T_m^+(x_0, y_0) < +\infty$ para $y_0 \leq 0$, portanto há uma descontinuidade em $y_0 = 0$.

5.2. Dependência C^k .

Exemplo 5.11. Considere a equação escalar $x' = |x|$. Como $f(x) = |x|$ é Lipschitz, então $x(t; t_0, x_0)$ está bem definido e é Lipschitz em (t_0, x_0) , pelo teorema acima. Nesse caso, em particular, a solução é analítica em t , mas não é C^1 em x_0 , pelo menos perto de $x_0 = 0$. De fato, a solução é $x(t; t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$, se $x_0 \geq 0$, e $x(t; t_0, x_0) = x_0 e^{-(t-t_0)}$, se $x_0 < 0$. Então, $x_{x_0} = e^{t-t_0}$, se $x_0 > 0$, e $x_{x_0} = -e^{-(t-t_0)}$, se $x_0 < 0$, que é descontínuo em $x_0 = 0$ (t e t_0 estão fixos). No caso em questão, como $f(x) = |x|$ independe de t , então $x(t; t_0, x_0)$ é analítica em t_0 , também (além de em t).

Exemplo 5.12. Considere a equação escalar $x' = t(1 + |x|)$. Essa equação simples tem variáveis separáveis e pode ser integrada explicitamente, mas a expressão da solução é complicada. Pode-se mostrar que, apesar de $f(t, x) = t(1 + |x|)$ ser analítica em t , a solução $x(t; t_0, x_0)$ não é nem C^1 em t_0 nem C^2 em t . Mais precisamente, para x_1 e t_1 fixos, com $x_1 < 0$ e $t_1 \neq 0$, a transformação $t_0 \mapsto x(t_{x_1, t_1}; t_0, x_1)$ não é diferenciável em $t_0 = t_1$, onde $t_{x_1, t_1} = \sqrt{2 \ln(1 - x_1) + t_1^2}$, e a transformação $t \mapsto x(t; t_1, x_1)$ não é C^2 em $t = t_{x_1, t_1}$. O tempo t_{x_1, t_1} indica o momento em que a solução $x(t; t_1, x_1)$ se anula e, portanto, passa pelo ponto em que $f(t, x)$ não é diferenciável.

Para estabelecer que $x(t; t_0, x_0)$ é C^1 , em x_0 , por exemplo, assumindo que $f = f(t, x)$ é C^1 em (t, x) , podemos formalmente derivar a equação diferencial em relação a x_0 e obter que $\partial_{x_0} x(t; t_0, x_0)$ satisfaz a equação diferencial $(\partial_{x_0} x)' = D_x f(t, x) \partial_{x_0} x$, com $\partial_{x_0} x(t_0) = [\text{Identidade em } \mathbb{R}^m]$, no espaço de fase dos operadores lineares em \mathbb{R}^m , que é isomorfo a $\mathbb{R}^{m \times m}$. Como essa é uma equação linear em $\partial_{x_0} x$, basta que $f(t, x)$ seja C^1 para que a solução exista e seja única. Em seguida, temos que mostrar que $\partial_{x_0} x$ é contínua em x_0 , o que não é difícil, e que é realmente a diferencial de $x(t; t_0, x_0)$ em relação a x_0 .

Contudo, preferimos outro caminho, que no fundo faz isso tudo de uma maneira implícita. Usaremos o teorema do ponto fixo uniforme e trataremos de uma vez só e de uma maneira mais limpa a dependência em (t_0, x_0, λ) da solução $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ da equação

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $l \in \mathbb{N}$, é um parâmetro (ou vários) do problema.

Teorema 5.13 (Ponto Fixo de Banach-Cacciopoli). *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $T : M \rightarrow M$ uma contração, i.e., $\exists \theta \in [0, 1)$, tal que $d(T(y), T(x)) \leq \theta d(y, x), \forall x, y \in M$. Então, existe um único ponto fixo $\bar{x} \in M$, i.e., $\bar{x} = T(\bar{x})$, e, além disso, $\forall x_0 \in M, T^n(x_0) \rightarrow \bar{x}$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Dem.: Seja $x_0 \in M$ e considere a seqüência $x_n = T^n(x_0) = T(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}$. Então,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \theta d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \theta^n d(T(x_0), x_0).$$

Logo,

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{j=n}^{n+m-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=n}^{n+m} \theta^j d(T(x_0), x_0) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(T(x_0), x_0).$$

Portanto, $\{x_n\}_n$ é uma seqüência de Cauchy em M e converge para um certo $\bar{x} \in M$, pois M é completo. Pela continuidade de T , passando ao limite na relação $x_n = T(x_{n-1})$ obtemos $\bar{x} = T(\bar{x})$. Se $y \in M$ é tal que $y = T(y)$, então $d(\bar{x}, y) = d(T(\bar{x}), T(y)) \leq \theta d(\bar{x}, y)$, logo $\bar{x} = y$ pois $\theta \neq 1$. Como x_0 é arbitrário e \bar{x} é único, as contas acima mostram que $T^n(x_0) \rightarrow \bar{x}, \forall x_0 \in M$. \square

Corolário 5.14. *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $T : M \rightarrow M$ um operador contínuo tal que T^k seja uma contração para algum $k \in \mathbb{N}$. Então existe um único ponto fixo $\bar{x} \in M$ de T e para qualquer $x_0 \in M$, temos $T^n(x_0) \rightarrow \bar{x}$.*

Dem.: Aplique o teorema anterior a T^k para achar um ponto fixo $\bar{x} \in M$ de T^k . Tome $x_0 = T(\bar{x})$ de modo que

$$\bar{x} = \lim_n T^{nk}(T(\bar{x})) = \lim_n T(T^{nk}(\bar{x})) = T(\lim_n T^{nk}(\bar{x})) = T(\bar{x}),$$

o que mostra que \bar{x} é ponto fixo de T . A unicidade, agora, é fácil e a convergência segue do fato de que qualquer subsequência da forma $T^{nk+l}(x_0) = T^{nk}(T^l(x_0))$ converge para \bar{x} , quando $n \rightarrow \infty$, onde $l = 0, 1, 2, \dots, k-1$. \square

Teorema 5.15 (Princípio da Contração Uniforme). *Sejam X e Y espaços de Banach, $U \subset X, V \subset Y$ abertos e $T : \bar{U} \times V \rightarrow \bar{U}$ uma contração uniforme em \bar{U} , i.e., existe $\theta \in [0, 1)$ tal que $|T(x_1, y) - T(x_2, y)| \leq \theta |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in \bar{U}, \forall y \in V$. Seja $g(y)$ o único ponto fixo de $T(\cdot, y)$ em \bar{U} , $g : V \rightarrow \bar{U}$. Se $T \in \mathcal{C}^k(\bar{U} \times V, X), k \in \mathbb{N}$, então $g \in \mathcal{C}^k(V, X)$. (T analítico $\Rightarrow g$ analítico, também.)*

Dem.: (Continuidade)

$$\begin{aligned} g(y_1) - g(y_2) &= T(g(y_1), y_1) - T(g(y_2), y_2) = T(g(y_1), y_1) - T(g(y_1), y_2) + T(g(y_1), y_2) - T(g(y_2), y_2), \\ &\Rightarrow |g(y_1) - g(y_2)| \leq |T(g(y_1), y_1) - T(g(y_1), y_2)| + \theta |g(y_1) - g(y_2)|. \end{aligned}$$

Como $0 \leq \theta < 1$ e T é contínuo,

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq \frac{1}{1-\theta} |T(g(y_1), y_1) - T(g(y_1), y_2)| \rightarrow 0, \quad (5.3)$$

quando $y_2 \rightarrow y_1$, o que prova a continuidade de $g = g(y)$.

(Diferenciabilidade) Da relação $g(y) = T(g(y), y)$, temos formalmente

$$D_y g(y) = D_x T(g(y), y) D_y g(y) + D_y T(g(y), y).$$

Portanto $D_y g(y) \in \mathcal{L}(Y, X)$, se existir, é ponto fixo do operador $\Phi : \mathcal{L}(Y, X) \times Y \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ definido por

$$\Phi(M, y) = D_x T(g(y), y) M + D_y T(g(y), y),$$

que é contínuo quando T é \mathcal{C}^1 . Note que $\|D_x T(g(y), y)\| \leq \theta, \forall y \in V$, de forma que

$$\|\Phi(M_1, y) - \Phi(M_2, y)\| \leq \theta \|M_1 - M_2\|.$$

Sendo Φ uma contração uniforme, temos para cada $y \in V$ um ponto fixo $M(y)$. Precisamos mostrar que $M(y)$ é de fato a diferencial de $g(y)$.

$$\begin{aligned}
& |g(y+h) - g(y) - M(y)h| \\
&= |T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)M(y)h - D_y T(g(y), y)h| \\
&\leq |T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) - D_y T(g(y), y)h| \\
&\quad + |D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) - M(y)h| \\
&\leq |T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) - D_y T(g(y), y)h| \\
&\quad + \theta |g(y+h) - g(y) - M(y)h|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{|g(y+h) - g(y) - M(y)h|}{|h|} \\
&\leq \frac{1}{1-\theta} \frac{|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) - D_y T(g(y), y)h|}{|h|} \\
&\leq \frac{1}{1-\theta} \frac{|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) - D_y T(g(y), y)h|}{|g(y+h) - g(y)| + |h|} \frac{|g(y+h) - g(y)| + |h|}{|h|}.
\end{aligned}$$

Mas T é \mathcal{C}^1 de modo que por continuidade existe uma constante $K \geq 0$ tal que para $|h|$ suficientemente pequeno temos

$$|g(y+h) - g(y)| \leq (\text{usando (5.3)}) \leq \frac{1}{1-\theta} |T(g(y), y+h) - T(g(y), y)| \leq \frac{1}{1-\theta} K|h|.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
& \frac{|g(y+h) - g(y) - M(y)h|}{|h|} \\
&\leq \frac{1}{1-\theta} \frac{|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) - D_y T(g(y), y)h|}{|g(y+h) - g(y)| + |h|} \left(1 + \frac{K}{1-\theta}\right).
\end{aligned}$$

Quando $|h| \rightarrow 0$, temos $|g(y+h) - g(y)| \rightarrow 0$ pela estimativa acima, de modo que o quociente

$$\frac{|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) - D_y T(g(y), y)h|}{|g(y+h) - g(y)| + |h|} \rightarrow 0,$$

pela definição de $T(x, y)$ ser diferenciável em (x, y) . Portanto,

$$\frac{|g(y+h) - g(y) - M(y)h|}{|h|} \rightarrow 0, \quad \text{quando } h \rightarrow 0,$$

mostrando que $g = g(y)$ é diferenciável com $D_y g(y) = M(y)$.

(Continuidade \mathcal{C}^k) Prosseguimos por indução. Assim, sendo T de classe \mathcal{C}^k , temos que Φ definido acima é de classe \mathcal{C}^{k-1} , de forma que seu ponto fixo $D_y g(y)$ é \mathcal{C}^{k-1} em y pela hipótese de indução, o que implica em $g = g(y)$ ser de classe \mathcal{C}^k . \square

Com o princípio da contração uniforme, podemos facilmente provar o teorema da função implícita e, consequentemente, o da função inversa, como mostramos a seguir.

Teorema 5.16 (Função Implícita). *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos e $(x_0, y_0) \in U \times V$. Seja $F : U \times V \rightarrow Z$ de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, com $F(x_0, y_0) = 0$ e $D_x f(x_0, y_0)$ inversível com inversa limitada. Então existem $U_0 \times V_0 \subset U \times V$ vizinhança aberta de (x_0, y_0) e $\varphi : V_0 \rightarrow U_0$ de classe \mathcal{C}^k tais que $F(\varphi(y), y) = 0, \forall y \in V_0$. Mais precisamente, temos que $F(x, y) = 0$, com $(x, y) \in U_0 \times V_0$, se e somente se $x = \varphi(y)$. (E se F é analítica, então φ é analítica.)*

Dem.: Temos

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow D_x F(x_0, y_0)^{-1} F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = x - D_x F(x_0, y_0)^{-1} F(x, y).$$

Defina $\Phi : U \times V \rightarrow Z$ por $\Phi(x, y) = x - D_x F(x_0, y_0)F(x, y)$. Note que Φ é \mathcal{C}^k . Além disso,

$$D_x \Phi(x_0, y_0) = I - D_x F(x_0, y_0)^{-1} D_x F(x_0, y_0) = I - I = 0,$$

onde I é o operador identidade em X . Com isso, fixando um $\theta \in (0, 1)$, temos

$$\|D_x \Phi(x, y)\| \leq \theta < 1, \quad \forall (x, y) \in U_1 \times V_1,$$

em uma certa vizinhança $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ de (x_0, y_0) . Logo,

$$|\Phi(x_1, y) - \Phi(x_2, y)| \leq \theta |x_1 - x_2|, \quad \forall (x_1, y), (x_2, y) \in U_1 \times V_1.$$

Podemos, também, assumir, graças à continuidade de $D_y F$, que nessa mesma vizinhança $U_1 \times V_1$ de (x_0, y_0) , temos $\|D_y F(x, y)\| \leq K$, para algum $K \geq 0$.

Seja agora $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\overline{U}_0 \subset U_1$, onde $U_0 = \{x \in U; |x - x_0| < \varepsilon\}$. Seja também $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $V_0 = \{y \in V; |y - y_0| < \delta\}$ e tal que $V_0 \subset V_1$ e $\delta < (1 - \theta)\varepsilon/K$. Então,

$$\begin{aligned} |\Phi(x, y) - x_0| &= |\Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0)| \leq |\Phi(x, y) - \Phi(x_0, y)| + |\Phi(x_0, y) - \Phi(x_0, y_0)| \\ &\leq \theta |x - y_0| + K |y - y_0| \leq \theta \varepsilon + K \delta < \varepsilon, \quad \forall (x, y) \in \overline{U}_0 \times V_0. \end{aligned}$$

Logo, $\Phi : \overline{U}_0 \times V_0 \rightarrow U_0$ é de classe \mathcal{C}^k e é uma contração uniforme. Portanto, o ponto fixo $g(y) = \Phi(g(y), y)$ é de classe \mathcal{C}^k e é a função procurada tal que $F(g(y), y) = 0$. Como o ponto fixo $g(y)$ é único em U_0 segue que $F(x, y) = 0, (x, y) \in U_0 \times V_0$ se e somente se $x = g(y)$. \square

Observação 5.17. A função $\Phi = \Phi(x, y)$ que aparece na demonstração do teorema da função inversa está associada ao método de Newton para achar zero de funções. De fato, sendo $\Phi(\cdot, y)$ uma contração, a seqüência $x_n = \Phi(x_{n-1}, y)$ converge para o zero $g(y)$ de $\Phi(\cdot, y)$. Nessa forma, esse método é apropriado para achar zero de funções por continuação, i.e., conhecendo-se o zero x_0 de $F(\cdot, y_0)$ pode-se achar o zero de $F(\cdot, y)$ para y próximo de y_0 . (Note que precisamos de $D_x F^{-1}$ no ponto (x_0, y_0) .) Isso tem aplicações em teoria das bifurcações, que veremos posteriormente.

Teorema 5.18 (Função Inversa). Sejam X e Y espaços de Banach, $U \subset X$ aberto, $x_0 \in U$ e $f : U \rightarrow Y$ de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N}$, com $Df(x_0)$ inversível e com inversa limitada. Então existem $U_0 \subset U$ e $V_0 \subset Y$, vizinhanças abertas de x_0 e $f(x_0)$, respectivamente, e uma função $g : V_0 \rightarrow U_0$ de classe \mathcal{C}^k tal que $g(f(x)) = x, \forall x \in U_0$, e $f(g(y)) = y, \forall y \in V_0$. (f analítica $\Rightarrow g$ analítica.)

Dem.: Aplique o teorema da função implícita à função $(x, y) \mapsto f(x) - y : U \times Y \rightarrow X \times Y$. Com isso, obtemos $g : V_0 \rightarrow U_1$ de classe \mathcal{C}^k , com U_1 e V_0 vizinhanças abertas de x_0 e $f(x_0)$, respectivamente, e tal que $f(x) = y$, com $(x, y) \in U_1 \times V_0$, se e somente se $x = g(y)$. Seja, então, $U_0 = f^{-1}(V_0) \cap U_1$, de modo que $U_0 \subset U_1$ também é uma vizinhança aberta de x_0 . Além disso, é fácil ver que $f(g(y)) = y, \forall y \in V_0$ e $g(f(x)) = x, \forall x \in U_0$. \square

Observação 5.19. É fácil ver que os teoremas da função implícita e da função inversa são de fato equivalentes. Para provar o teorema da função implícita a partir do da função inversa, note que a hipótese de $D_x F(x_0, y_0)$ ser inversível com inversa limitada implica em X ser isomorfo a Z e que podemos construir uma função $\Phi : U \times V \rightarrow X \times Y$ definida por $\Phi(x, y) = (D_x F(x_0, y_0)^{-1} F(x, y), y)$ que é inversível com inversa limitada em (x_0, y_0) , pois $D\Phi(x_0, y_0)$ tem a forma

$$D\Phi(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} I_X & * \\ 0 & I_Y \end{bmatrix},$$

onde I_X e I_Y são os operadores identidade em X e Y , respectivamente. O teorema da função inversa garante, então, a existência da inversa Φ^{-1} de classe \mathcal{C}^k em uma vizinhança de (x_0, y_0) . Pela forma de $\Phi(x, y)$, é fácil ver que $\Phi^{-1}(x, y)$ tem a forma $\Phi^{-1}(x, y) = (\Psi(x, y), y)$. Temos, então, que $x = D_x F(x_0, y_0)^{-1} F(\Psi(x, y), y)$. Fazendo $x = 0$, obtemos $0 = D_x F(x_0, y_0)^{-1} F(\Psi(0, y), y)$, logo $F(\Psi(0, y), y) = 0$, de modo que $g(y) = \Psi(0, y)$ é a função procurada.

Voltemos para a dependência das soluções de uma equação diferencial nas condições iniciais e nos parâmetros.

Teorema 5.20. *Sejam $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e $\Lambda \subset \mathbb{R}^l$ abertos. Seja $f : \mathcal{W} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N}$. Seja $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ a solução de*

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

que está definida em $\mathcal{D} = \{(t, t_0, x_0, \lambda); (t_0, x_0, \lambda) \in \mathcal{W} \times \Lambda, t \in I_m(t_0, x_0, \lambda)\}$, onde $I_m(t_0, x_0, \lambda)$ é o intervalo maximal de existência de cada solução. Então \mathcal{D} é aberto, $(t, t_0, x_0, \lambda) \mapsto x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é de classe \mathcal{C}^k em \mathcal{D} e $t \mapsto x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é de classe \mathcal{C}^{k+1} em $I_m(t_0, x_0, \lambda)$ com $\partial_t^{k+1} x(t; t_0, x_0, \lambda)$ contínua em \mathcal{D} .

Dem.: A demonstração do fato de \mathcal{D} ser aberto segue como na demonstração da Proposição 5.8.

Seja $V \subset \mathcal{W}$ aberto incluído compactamente em \mathcal{W} . Logo, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a vizinhança fechada \overline{V}_ε de raio ε do compacto \overline{V} está contida em \mathcal{W} . Seja M o máximo de f no compacto \overline{V}_ε e seja L a constante de Lipschitz de f em relação a x em \overline{V}_ε . Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta \leq \varepsilon/2$, $\delta M \leq \varepsilon/2$ e $\delta L \leq 1/2$. Vamos mostrar, utilizando o teorema do ponto fixo uniforme, que para qualquer $(t_0, x_0, \lambda) \in V \times \Lambda$, a solução $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ está definida no mesmo intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e é de classe \mathcal{C}^k em (t, t_0, x_0, λ) .

Considere a mudança de variáveis $\tau = (t - t_0)$ e seja $y(\tau) = x(t_0 + \tau) - x_0$, de modo que $y = y(\tau; t_0, x_0, \lambda)$ satisfaz a equação

$$y'(\tau) = f(t_0 + \tau, y(\tau), \lambda), \quad y(0) = x_0. \quad (5.4)$$

Com isso, se $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ está definido para $t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta$ e é tal que $|x(t; t_0, x_0, \lambda) - x_0| \leq \varepsilon/2$ nesse intervalo, então $y(\tau; t_0, x_0, \lambda)$ está definido em $[-\delta, \delta]$, é tal que $|y(\tau; t_0, x_0, \lambda) - x_0| \leq \varepsilon/2$ e é ponto fixo de

$$\Phi(y, x_0, \lambda)(\tau) = x_0 + \int_0^\tau f(t_0 + s, y(s), \lambda) ds, \quad \forall \tau \in [-\delta, \delta].$$

O domínio de definição de Φ é $\Sigma \times V \times \Lambda$, onde

$$\Sigma = \{y \in \mathcal{C}([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^m); |y(t) - x_0| \leq \varepsilon/2, \forall t \in [-\delta, \delta]\},$$

que é a bola fechada de raio $\varepsilon/2$ e centro em x_0 do espaço de Banach das funções contínuas de $[-\delta, \delta]$ em \mathbb{R}^m com a norma do máximo $\|y\| = \max_{[-\delta, \delta]} |y(t)|$. Note que Φ está bem definido nesse domínio pois no integrando na definição de Φ , temos $(t_0 + s, y(s)) \in \overline{V}_\varepsilon \subset \mathcal{W}$ quando $y \in \Sigma$. De fato, $(t_0, x_0) \in V$ e $|(t_0 + s, y(s)) - (t_0, x_0)| \leq |s| + |y(s) - x_0| \leq \delta + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$.

Sendo f de classe \mathcal{C}^k , segue que Φ também é de classe \mathcal{C}^k . Temos, também, que

$$|\Phi(y, t_0, x_0, \lambda)(\tau) - x_0| \leq M|\tau| \leq M\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \tau \in [-\delta, \delta].$$

Logo $\Phi(y, t_0, x_0, \lambda) \in \Sigma$. Além disso,

$$\begin{aligned} |\Phi(y_1, t_0, x_0, \lambda)(\tau) - \Phi(y_2, t_0, x_0, \lambda)| &\leq L \left| \int_0^\tau |y_1(s) - y_2(s)| ds \right| \\ &\leq \delta L \|y_1 - y_2\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|, \quad \forall \tau \in [-\delta, \delta], \end{aligned}$$

pois $\delta L < 1/2$. Então,

$$\|\Phi(y_1, t_0, x_0, \lambda) - \Phi(y_2, t_0, x_0, \lambda)\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|,$$

o que mostra que $\Phi : \Sigma \times V \times \Lambda \rightarrow \Sigma$ é uma contração uniforme. Como f é de classe \mathcal{C}^k , então Φ também é de classe \mathcal{C}^k . Portanto, pelo princípio da contração uniforme (Teorema 5.15), existe $y = y(t_0, x_0, \lambda) : V \times \Lambda \rightarrow \Sigma$ de classe \mathcal{C}^k que é ponto fixo de $\Phi(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$. Então, $y(\tau; t_0, x_0, \lambda)$ é solução de (5.4) e, com isso, temos $x(t; t_0, x_0, \lambda) = y(t - t_0; t_0, x_0, \lambda)$ de classe \mathcal{C}^k em $(t_0, x_0, \lambda) \in V \times \Lambda$.

Quanto à regularidade em t , podemos deduzir por indução que x é de classe \mathcal{C}^{k+1} em t , pelo menos localmente, *i.e.*, em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, e é \mathcal{C}^k juntamente nas variáveis (t, t_0, x_0, λ) . De fato, como a norma em Σ é a norma do máximo e $y = y(t_0, x_0, \lambda)$ é contínua com valores em Σ , segue que $x = x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é contínua juntamente em (t, t_0, x_0, λ) . Da equação diferencial, segue, então, que $\partial_t x$ é contínua em $(t; t_0, x_0, \lambda)$. Assumindo por indução que x é de classe \mathcal{C}^j em (t, t_0, x_0, λ) , para $j < k$, temos, pela equação diferencial

$x' = f(t, x)$, que x é de classe \mathcal{C}^{j+1} em t com $\partial_t^{j+1}x$ dependendo continuamente em todas as variáveis $(t; t_0, x_0, \lambda)$. Como $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é também de classe \mathcal{C}^k , logo \mathcal{C}^{j+1} , em (t_0, x_0, λ) , segue que x é \mathcal{C}^{j+1} juntamente em $(t; t_0, x_0, \lambda)$. Isso completa a indução, mostrando que x é \mathcal{C}^k em $(t; t_0, x_0, \lambda)$. Da equação diferencial $x' = f(t, x, \lambda)$, concluímos, finalmente, que $\partial_t^{k+1}x$ existe e é contínua em $(t; t_0, x_0, \lambda)$.

Para estender essa regularidade para $t \in I_m(t_0, x_0)$ longe de t_0 , note que, pelo Corolário 4.16, podemos dividir o intervalo $[t_0, t]$ em subintervalos de extremos $t_0 < t_0 + \delta < t_0 + 2\delta < \dots < t_0 + n\delta < t$ e escrever

$$\begin{aligned} x(t; t_0, x_0, \lambda) &= x(t; t_0 + n\delta, x(t_0 + n\delta; t_0, x_0, \lambda), \lambda) \\ &= x(t; t_0 + n\delta, x(t_0 + n\delta, t_0 + (n-1)\delta, \dots, x(t_0 + \delta, t_0, x_0, \lambda), \dots, \lambda, \lambda). \end{aligned}$$

Portanto, enquanto t for tal que a solução entre t_0 e t está toda contida em V , temos que $x(t; t_0, x_0, \delta)$ se escreve como uma composição finita de funções com a regularidade desejada, e, portanto, também tem essa regularidade.

Como V é aberto arbitrário incluído compactamente no aberto \mathcal{W} , podemos estender esse resultado para todo o \mathcal{W} e para todo o intervalo aberto de definição das soluções, completando a demonstração. \square

Observação 5.21. *Vimos, primeiramente, que se $f = f(t, x)$ é contínua em (t, x) e Lipschitz em x , então $x(t; t_0, x_0)$ é \mathcal{C}^1 em t e Lipschitz em (t_0, x_0) . Vimos, em seguida, que se $f(t, x, \lambda)$ é \mathcal{C}^k em (t, x, λ) , $k \in \mathbb{N}$, então $x(t; t_0, x_0)$ é \mathcal{C}^k em (t, t_0, x_0, λ) e \mathcal{C}^{k+1} em t com $\partial_t^{k+1}x(t; t_0, x_0, \lambda)$ contínua em $(t; t_0, x_0, \lambda)$. Mas podemos ter uma informação mais precisa olhando para a demonstração do Teorema 5.20:*

A regularidade em x_0 depende apenas da regularidade de $f(t, x, \lambda)$ em x . Mais precisamente, se $f(t, x, \lambda)$ é contínua em (t, x) e é \mathcal{C}^k em x , então $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é \mathcal{C}^k em x_0 . Para isso, note que Φ na demonstração do Teorema 5.20 é de classe \mathcal{C}^k em (z, x_0) e os outros parâmetros t_0 e λ podem ser mantidos fixos na aplicação do teorema do ponto fixo uniforme.

A regularidade apenas em t_0 depende, em geral, da regularidade de $f = f(t, x, \lambda)$ em (t, x) e não apenas em t . Mesmo que f seja \mathcal{C}^∞ em t , mas apenas \mathcal{C}^k em x , a solução $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é, em geral, apenas \mathcal{C}^k em t_0 , a menos que f seja independente de t e, nesse caso, a regularidade em t_0 é a mesma que a em t , ou seja, \mathcal{C}^{k+1} , o que veremos em seguida.

A regularidade de $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ em λ depende da regularidade de $f(t, x, \lambda)$ em (x, λ) . Mais precisamente, se $f(t, x, \lambda)$ é contínua em (t, x, λ) e é \mathcal{C}^k em (x, λ) , então $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é \mathcal{C}^k em (x_0, λ) . Para isso, note que Φ na demonstração do Teorema 5.20 é de classe \mathcal{C}^k em (z, x_0, λ) e o outro parâmetro t_0 pode ser mantido fixo na aplicação do teorema do ponto fixo uniforme.

A regularidade de $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ em t é a mesma que a regularidade de $f(t, x, \lambda)$ em (t, x) “mais um”. Mais precisamente, se $f(t, x, \lambda)$ é \mathcal{C}^k em (t, x) , então $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é \mathcal{C}^{k+1} em t com $\partial_t^{k+1}x(t; t_0, x_0, \lambda)$ contínua em $(t; t_0, x_0)$, o que pode ser deduzido através da equação diferencial $x' = f(t, x)$.

Não veremos a regularidade analítica em detalhes, mas, por exemplo, se $f = f(t, x, \lambda)$ é analítica em (x, λ) , então $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é analítica em (t_0, x_0, λ) , e se $f = f(t, x, \lambda)$ é analítica em (t, x, λ) , então $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é analítica em (t, t_0, x_0, λ) .

Finalmente, o estudo da regularidade em λ poderia ter sido reduzido ao caso do da regularidade em x considerando o sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda), \\ \lambda' = 0, \\ x(t_0) = x_0, \\ \lambda(t_0) = \lambda_0. \end{cases}$$

5.3. Expansões assintóticas. Com os resultados de regularidade anteriores, podemos resolver certas equações diferenciais escrevendo as soluções até uma certa ordem em expansões assintóticas. Por exemplo, considere a equação

$$\begin{cases} x' = x + \lambda \ln x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Temos $f(x, \lambda) = x + \lambda \ln x$ de classe \mathcal{C}^∞ (de fato, analítica) em $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, então a solução $x(t; \lambda)$ (com $t_0 = 0$ e $x_0 = 1$ fixos, para simplificar) também é de classe \mathcal{C}^∞ (de fato, analítica) no seu domínio de definição.

Sabemos, também, que para $\lambda = 0$, a solução é $x(t; 0) = e^t$. Derivando a equação em relação a λ , temos que $\partial_\lambda x$ satisfaz

$$\begin{cases} (\partial_\lambda x)' = \partial_\lambda x + \ln x + \frac{\lambda}{x} \partial_\lambda x, \\ \partial_\lambda x(0) = 0. \end{cases}$$

Para $\lambda = 0$, usando que $x(t; 0) = e^t$, temos

$$(\partial_\lambda x)' = \partial_\lambda x + t, \quad \partial_\lambda x(0; 0) = 0,$$

cuja solução é $\partial_\lambda x(t; 0) = e^t - 1 - t$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} x(t; \lambda) &= x(t; 0) + \partial_\lambda x(t; 0)\lambda + \mathcal{O}(|\lambda|^2) \\ &= e^t + \lambda(e^t - 1 - t) + \mathcal{O}(|\lambda|^2), \end{aligned}$$

que é uma aproximação de primeira ordem em λ válida para t limitado (onde podemos limitar a segunda derivada de $x(t; \lambda)$ em relação a λ).

Problemas

- 5.1 Considere o sistema do Problema 4.9 e denote por $u(t; x_0, y_0)$ a solução com condições iniciais $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ e por $I_m(x_0, y_0)$ o intervalo maximal de definição dessa solução. Mostre que o domínio de definição $D = \{(t, x_0, y_0); x_0, y_0 \in \mathbb{R}, t \in I_m(x_0, y_0)\}$ é aberto e que u é contínuo em D . (Sugestão: use o fato de que g é uniformemente contínua em subconjuntos compactos). Seja $T_m^+(x_0, y_0) = \sup I_m(x_0, y_0)$. Mostre, também, que se $T_m^+(x_0, y_0) < +\infty$, para um certo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, então $|u(t; x_0, y_0)| \rightarrow +\infty$ quando $t \nearrow T_m^+(x_0, y_0)$.
- 5.2 Considere o sistema do Problema 5.1 acima. Assuma que g é localmente Hölder contínua, *i.e.*, existe $\theta \in (0, 1]$ tal que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^2$, existe $C_K \geq 0$ tal que

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq C_K |x_1 - x_2|^\theta, \quad \forall x_1, x_2 \in K.$$

Mostre que para todo compacto $U \subset \mathbb{R}^2$, existe uma constante D_U tal que

$$|u(t; x_1, y_1) - u(t; x_2, y_2)| \leq D_U (|x_1 - x_2|^\theta + |y_1 - y_2|)$$

para todo $(t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in D$ tal que $u(s; x_1, y_1), u(s; x_2, y_2) \in U, \forall s \in [0, t]$.

- 5.3 Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$. Denote por $x(t; x_0)$ a solução da equação $x' = f(x)$ com $x(0) = x_0 \in \mathcal{U}$ e por $I_m(x_0)$ o intervalo maximal de definição dessa solução. Seja $y(t; x_0, y_0)$ a solução da equação $y'(t) = Df(x(t; x_0))y(t)$ com $y(0; x_0, y_0) = y_0$. Mostre que $y(t; x_0, y_0)$ está definida em $I_m(x_0)$. Usando o Lema de Gronwall, mostre que se $x_0 \in \mathcal{U}$ e I_K é um subintervalo compacto de $I_m(x_0)$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$|x(t; x_0 + h) - x(t; x_0) - y(t; x_0, h)| \leq \varepsilon |h|, \quad \forall t \in I_K, \forall |h| < \delta.$$

Deduza que $x_0 \mapsto x(t; x_0)$ é continuamente diferenciável em \mathcal{U} para todo $t \in I_m(x_0)$. Mostre que $(t; x_0) \mapsto x(t; x_0)$ é continuamente diferenciável no seu domínio de definição.

- 5.4 Demonstre a seguinte generalização do Lema de Gronwall: sejam $w, \alpha, \beta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que $\beta(t) \geq 0$ e

$$w(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)w(s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Então,

$$w(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \beta(s)\alpha(s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Se α é constante, mostre que desigualdade de Gronwall segue da desigualdade acima após uma simples integração.

- 5.5 Demonstre a seguinte generalização do Lema de Gronwall devida a R. Manê: Seja M um espaço métrico completo munido de uma relação de ordem \preceq reflexiva, transitiva e fechada no sentido de que se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ em M com $x_n \preceq y_n$, então $x \preceq y$. Seja $F : M \rightarrow M$ uma transformação que preserva a ordem \preceq e tal que uma potência F^k , para algum $k \in \mathbb{N}$, é uma contração estrita. Então, se $x \preceq F(x)$ e $F(y) \preceq y$, segue que $x \preceq y$.
- 5.6 Faça os detalhes do Exemplo 3.11 dessa seção.
- 5.7 Mostre que a solução $x(t; x_0)$ da equação diferencial escalar $x' = 1 + |x|$ é continuamente diferenciável em relação a x_0 em todo $(t, x_0) \in \mathbb{R}^2$.
- 5.8 Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'' = -\varepsilon(x')^2 \\ y'' = -g + \varepsilon(y')^2 \end{cases}$$

que modela a trajetória de um projétil de coordenadas $(x(t), y(t))$ próximo à superfície da terra (g é a aceleração da gravidade assumida constante) e sob uma resistência do ar proporcional ao quadrado de sua velocidade ($\varepsilon > 0$). Considere as seguintes condições iniciais:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h, \quad x'(0) = v, \quad y'(0) = 0,$$

onde h e v são constantes positivas. Aproxime a solução $(x(t), y(t)) = (x(t; \varepsilon), y(t; \varepsilon))$ por uma função linear em ε e use essa aproximação para estimar o tempo de vôo do projétil ($t_m > 0$ tal que $y(t_m) = 0$) e o seu alcance ($x(t_m)$).

- 5.9 Sejam R o raio da Terra, M a sua massa e G a constante gravitacional (tudo em unidades de medida compatíveis). Seja x a altura de um objeto a partir da superfície da Terra. Sob a ação da gravidade, x satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{(R+x)^2}$$

com condições iniciais, digamos, $x(0) = 0$ e $x'(0) = v_0 > 0$. Exatamente na superfície da terra ($x = 0$), obtemos a aceleração da gravidade $g = GM/R$. Podemos, assim, escrever a equação na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{(1+R^{-1}x)^2}.$$

Ache valores apropriados de $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que sob a mudança de variáveis $\tau = \beta t$ e $y(\tau) = \alpha x(t)$ a equação se torne

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(1+\varepsilon y)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

Observe que α e β têm, respectivamente, as dimensões de comprimento e tempo, de modo que y e τ são adimensionais. (A equação em y é a forma *adimensional* da equação em x .) Resolva a equação em y tomando $\varepsilon = 0$ e ache a altura máxima (passando o resultado para as coordenadas x e t) alcançada pelo objeto e o seu tempo de vôo (tempo que leva para retornar à superfície da Terra), segundo essa aproximação. (Compare os resultados obtidos com os valores de α e β .) Ache, agora, uma aproximação linear em ε da solução da equação em y . Mostre que a estimativa do tempo de vôo segundo essa última aproximação é maior.

6. SOLUÇÕES GLOBAIS E SISTEMAS DINÂMICOS

Soluções globais de EDOs. Processos. Propriedade de grupo e sistemas dinâmicos. Exemplos.
[9, 1, 8]

6.1. Soluções globais.

Proposição 6.1. *Seja $f \in Lip_{loc,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ com*

$$|f(t, x)| \leq a|x| + b, \quad \forall (t, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m,$$

onde $a, b \geq 0$. Então $I_m(t_0, x_0) = \mathbb{R}$ para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Dem.: Temos,

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq |x_0| + \left| \int_{t_0}^t a|x(s)| + b ds \right| \\ &\leq |x_0| + b|t - t_0| + a \left| \int_{t_0}^t |x(s)| ds \right|. \end{aligned}$$

Portanto, usando o Lema de Gronwall, obtemos

$$|x(t)| \leq (|x_0| + b|t - t_0|)e^{a|t-t_0|},$$

logo $x(t)$ é limitado para t limitado. Então, pelo Teorema 4.14, segue que $T_m^+(t_0, x_0) = -\infty$ e $T_m^-(t_0, x_0) = +\infty$, i.e., $I_m(t_0, x_0) = \mathbb{R}$. \square

Exemplo 6.2. *Qualquer equação linear $x' = A(t)x + b(t)$ com $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ e $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínuas é tal que todas as suas soluções são globais.*

Exemplo 6.3. *Qualquer equação $x' = f(t, x)$ onde f é limitada ou globalmente uniformemente Lipschitz em x , além de contínua, é tal que todas as suas soluções são globais. Por exemplo, $x' = \log(1 + x^2)$, pois $x \mapsto \log(1 + x^2)$ é globalmente Lipschitz, e $x' = \operatorname{sen}(x^2)$, pois $x \mapsto \operatorname{sen}(x^2)$ é limitado.*

Exemplo 6.4 (Equação do Pêndulo). *Na equação do pêndulo, temos o sistema*

$$\begin{cases} \theta' = \psi \\ \psi' = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

que é da forma $x' = f(x)$ em \mathbb{R}^2 com f globalmente Lipschitz. Logo, todas as soluções são globais.

Exemplo 6.5 (Pêndulo com atrito). *Na equação do pêndulo com atrito, temos o sistema*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen} x - ky, \end{cases}$$

cujas soluções são, também, todas globais.

6.2. Processos. Há outros casos em que todas as soluções são globais se restringirmos o espaço de fase do sistema. Por exemplo, considere $x' = x^3 - x$. Se $|x_0| \leq 1$, então a solução está definida globalmente, mas se $|x_0| > 1$, ela explode em tempo finito. Podemos, então, considerar $\mathcal{U} = \{x; |x| \leq 1\}$ e $f(x) = x^3 - x$ restrito a \mathcal{U} , de modo que todas as soluções são globais.

Considere, então,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $f \in \text{Lip}_{loc,x}(\mathbb{R} \times \mathcal{U})$ e tal que as soluções $x(t; t_0, x_0)$ são todas globais, *i.e.*, $I_m(t_0, x_0) = \mathbb{R}$, para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U}$. Isso implica em $x(t; t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Podemos, com isso, definir uma família $\{U(t; t_0)\}_{t, t_0}$ de operadores \mathcal{U} definida para cada $t, t_0 \in \mathbb{R}$ por

$$U(t; t_0)x_0 = x(t; t_0, x_0), \quad \forall x_0 \in \mathcal{U}.$$

Essa família tem as seguintes propriedades:

- i) $U(t; t_0) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ é localmente Lipschitz;
- ii) $\forall x_0 \in \mathcal{U}, \forall t_0 \in \mathbb{R}, t \mapsto U(t; t_0)x_0$ é continuamente diferenciável em \mathbb{R} ;
- iii) $U(t; t_1)U(t_1; t_0) = U(t; t_0), \forall t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$;
- iv) $U(t_0; t_0) = \text{Identidade em } \mathcal{U}, \forall t_0 \in \mathbb{R}$.

Definição 6.6. *Seja \mathcal{U} um espaço métrico completo. Um processo em \mathcal{U} é uma família $\{U(t; t_0)\}_{t, t_0}$ de operadores em \mathcal{U} com as seguintes propriedades:*

- i) $U(t; t_0) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ é contínua;
- ii) $\forall x_0 \in \mathcal{U}, \forall t_0 \in \mathbb{R}, t \mapsto U(t; t_0)x_0$ é contínua em \mathbb{R} ;
- iii) $U(t; t_1)U(t_1; t_0) = U(t; t_0), \forall t, t_1, t_0 \in \mathbb{R}$;
- iv) $U(t_0; t_0) = \text{Identidade em } \mathcal{U}, \forall t_0 \in \mathbb{R}$.

Definição 6.7. *Os operadores $U(t; t_0), t, t_0 \in \mathbb{R}$, obtidos da equação (6.1) cujas soluções são todas globais são ditos os operadores fundamentais da equação (6.1). A família de operadores $\{U(t; t_0)\}_{t, t_0}$ é chamada de processo associado à, ou gerado pela, equação (6.1).*

Exemplo 6.8. *O processo associado à equação escalar $x' = 2tx$ é $U(t, t_0) = \exp(t^2 - t_0^2)$.*

Observação 6.9. *Nem todos os processos são provenientes de equações diferenciais ordinárias, por exemplo: $(U(t; t_0)f)(s) = f(s + t - t_0)$ em $\mathcal{U} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ limitada e uniformemente contínua}\}$ munido da norma do máximo. Note que neste caso \mathcal{U} é de dimensão infinita e $t \mapsto U(t; t_0)f$ não é \mathcal{C}^1 . Além disso, $t \mapsto U(t; t_0)$ não é contínuo; temos, apenas, a continuidade de $t \mapsto U(t; t_0)f$. Essa situação é a regra em processos gerados por equações a derivadas parciais.*

Exemplo 6.10. *Se considerarmos $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ e $U(t; t_0)x_0$ como sendo a única solução de $x' = x^{2/3}, x(t_0) = x_0$ que é estritamente crescente (veja Observação 4.9), então $\{U(t; t_0)\}_{t, t_0}$ é um processo.*

Observação 6.11. *Sob certas condições de regularidade, podemos fazer o caminho inverso e associar um processo a uma equação diferencial ordinária. Por exemplo, se $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ e as trajetórias $t \mapsto U(t; t_0)x_0$ são todas diferenciáveis, então podemos definir $f(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} (U(t+h; t)x - x)/h$, associando o processo à equação $x' = f(t, x)$. A regularidade de f , no entanto, dependeria de mais regularidade no processo, inclusive para a questão da unicidade das soluções da equação diferencial obtida.*

Observação 6.12. *Podemos estudar processos apenas através dos operadores fundamentais $\{U_0(t)\}_t$ definidos por $U_0(t) = U(t; 0)$, pois podemos escrever $U(t; t_0) = U_0(t)U_0(t_0)^{-1}$, onde a inversa $U_0(t_0)^{-1}$ existe e é dada por $U_0(t_0)^{-1} = U(0; t_0)$. De fato, segue da definição 6.6, propriedade iii), que $U(t; t_0)^{-1} = U(t_0; t)$. Por outro lado, dada uma família $\{U_0(t)\}_t$ de operadores contínuos e inversíveis, cujas trajetórias sejam contínuas e com $U_0(0) = [\text{Identidade}]$, então $U(t; t_0) = U_0(t)U_0(t_0)^{-1}$ gera um processo. Por exemplo, se $g = g(t)$ é uma função escalar positiva com $g(0) = 1$, então $U_0(t)x = g(t)x, \forall x \in \mathbb{R}^m$ é tal que $U(t; t_0)x = U_0(t)U_0(t_0)^{-1}$ gera um processo. Se g for diferenciável, esse processo está associado à equação diferencial $x' = g'(t)x/g(t)$.*

Considere, agora, a equação $x' = -3t^2x^3/2$. Suas soluções são

$$x(t) = x(t; t_0, x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_0^2(t^3 - t_0^3)}},$$

cujos intervalos maximais de definição são

$$I_m(t_0, x_0) = \left(\left[t_0^3 - \frac{1}{x_0^2} \right]^{1/3}, +\infty \right).$$

Quando x_0 aumenta, $T_m^-(x_0, t_0)$ tende a t_0 . Logo, os operadores $U(t; t_0)$ só estão bem definidos em todo o espaço de fase se $t \geq t_0$. Nesse caso, os operadores $U(t; t_0)$ não são inversíveis.

Definição 6.13. *Os operadores $U(t; t_0)$, $t \geq t_0$, obtidos da equação (6.1) cujas soluções estão todas definidas em $[t_0, +\infty)$ são ditos os operadores fundamentais da equação (6.1). A família de operadores $\{U(t; t_0)\}_{t \geq t_0}$ é chamada de semiprocessos associado à, ou gerado pela, equação (6.1).*

Definição 6.14. *Seja \mathcal{U} um espaço métrico completo. Um semiprocessos em \mathcal{U} é uma família $\{U(t; t_0)\}_{t \geq t_0}$ de operadores em \mathcal{U} com as seguintes propriedades:*

- i) $U(t; t_0) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ é contínua;
- ii) $\forall x_0 \in \mathcal{U}, \forall t_0 \in \mathbb{R}, t \mapsto U(t; t_0)x_0$ é contínua em $[t_0, +\infty)$;
- iii) $U(t; t_1)U(t_1; t_0) = U(t; t_0)$, $\forall t \geq t_1 \geq t_0$;
- iv) $U(t_0; t_0) = \text{Identidade em } \mathcal{U}$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

Observação 6.15. *No caso de semiprocessos, os operadores $U_0(t) = U(t; 0)$ considerados na Observação 6.12 não são inversíveis e não são suficientes para descrever os semiprocessos.*

6.3. Sistemas dinâmicos. Quando a função f em (6.1) independe de t , obtemos uma classe importante de equações diferenciais. O estudo dessas equações é o nosso objetivo principal.

Definição 6.16. *Uma equação diferencial da forma*

$$x' = f(x)$$

é dita autônoma e uma equação diferencial da forma

$$x' = f(t, x)$$

é dita não-autônoma.

Proposição 6.17. *Os operadores fundamentais $U(t; t_0)$ associados a uma equação diferencial autônoma cujas soluções são únicas e globais são tais que $U(t; t_0) = U(t - t_0; 0)$, $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$. Se as soluções não são globais mas estão definidas em $[t_0, +\infty)$, temos $U(t; t_0) = U(t - t_0; 0)$, $\forall t \geq t_0$.*

Dem.: Se $x(t) = U(t; t_0)x_0$ e $y(t) = U(t - t_0; 0)x_0$, então $x' = f(t, x) = f(x)$ e $y' = f(t - t_0, y) = f(y)$ com $x(t_0) = x_0 = y(t_0)$. Logo, pela unicidade das soluções, temos $x(t) = y(t)$. \square

Para um sistema autônomo, basta considerar a família $\{S(t)\}_t$ dos operadores fundamentais $S(t) = U_0(t) = U(t; 0)$. Nesse caso, obtemos um grupo ou um semigrupo de operadores:

Definição 6.18. *Um grupo de operadores em um espaço métrico completo \mathcal{U} é uma família $\{S(t)\}_t$ de operadores em \mathcal{U} com as seguintes propriedades:*

- i) $S(t) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ é contínuo;
- ii) $\forall x_0 \in \mathcal{U}, t \mapsto S(t)x_0$ é contínuo em \mathbb{R} ;
- iii) $S(t)S(\tau) = S(t + \tau)$, $\forall t, \tau \in \mathbb{R}$;
- iv) $S(0) = \text{Identidade em } \mathcal{U}$.

Definição 6.19. Um semigrupo de operadores em um espaço métrico completo \mathcal{U} é uma família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores em \mathcal{U} com as seguintes propriedades:

- i) $S(t) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ é contínuo;
- ii) $\forall x_0 \in \mathcal{U}, t \mapsto S(t)x_0$ é contínuo em \mathbb{R}^+ ;
- iii) $S(t)S(\tau) = S(t + \tau), \forall t, \tau \geq 0$;
- iv) $S(0) = \text{Identidade em } \mathcal{U}$.

Definição 6.20. Um sistema dinâmico em um espaço métrico completo \mathcal{U} é um grupo ou um semigrupo de operadores em \mathcal{U} .

Definição 6.21. Os operadores $S(t), t \in \mathbb{R}$, obtidos de uma equação diferencial autônoma

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (6.2)$$

cujas soluções são únicas e globais são ditos operadores fundamentais associados a (6.2). A família de operadores $\{S(t)\}_t$ é chamada de grupo fundamental ou grupo ou sistema dinâmico associado à, ou gerado pela, equação (6.2). Se as soluções estão, em geral, definidas apenas em $[0, +\infty)$, então $\{S(t)\}_t$ é dito semigrupo fundamental ou semigrupo ou sistema dinâmico associado à, ou gerado pela, equação (6.2), e os operadores $S(t)$ ainda são chamados de operadores fundamentais.

Observação 6.22. Na tentativa de extrair a essência dos mecanismos envolvidos na dinâmica das equações diferenciais, se tornou comum restringir o estudo a equações definidas em variedades compactas, onde as soluções estão sempre definidas globalmente, eliminando certos problemas técnicos. Por isso, é comum encontrar definições de sistemas dinâmicos que excluem o caso de semigrupos. É comum, também, encontrar a terminologia de fluxos, para grupos, e semifluxos, para semigrupos, e, ainda, semi-sistemas-dinâmicos, para semigrupos. Podemos, também, considerar sistemas dinâmicos locais, onde o intervalo de definição varia com as condições iniciais (o que definimos por $x(t; t_0, x_0)$). Mas, não importando as variações sobre o tema e as nomenclaturas utilizadas, o objetivo é sempre estudar a dinâmica envolvida em sistemas que evoluem com um parâmetro, que pode ou não expressar tempo.

Exemplo 6.23. O sistema dinâmico associado à equação escalar $x' = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$, é dado por $S(t) = e^{at}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6.24. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto limitado cujo bordo é uma variedade de classe C^1 . Seja $\nu = \nu(x)$ a normal exterior do bordo de Ω . Seja f de classe C^1 no fecho $\overline{\Omega}$ de Ω . Se o produto escalar $f(x) \cdot \nu(x) < 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, então a equação diferencial $x' = f(x)$ define um semigrupo em $\overline{\Omega}$, i.e., para todo $x_0 \in \overline{\Omega}$, existe um único $x = x(t) = S(t)x_0$ definido e continuamente diferenciável em \mathbb{R}^+ , tal que $x' = f(x)$ em \mathbb{R}^+ e $x(0) = x_0$.

Exemplo 6.25. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto limitado cujo bordo $\partial\Omega$ é uma órbita periódica de $x' = f(x)$ onde f é uma função de classe C^1 definida em uma vizinhança de Ω . Então $x' = f(x)$ gera um grupo de operadores em $\overline{\Omega}$. Por exemplo, considere

$$\begin{cases} x' = x(1 - x^2 - y^2) - by \\ y' = y(1 - x^2 - y^2) + bx, \end{cases}$$

com Ω sendo a bola aberta em \mathbb{R}^2 de raio 1 e centrada na origem. Passando para coordenadas polares, temos $r' = r(1 - r^2)$ e $\theta' = b$, ficando fácil ver que $r = 1$ é uma órbita periódica do sistema acima.

Observação 6.26. O nosso objetivo principal é estudar sistemas dinâmicos, ou, mais precisamente, equações autônomas. Mas mesmo no estudo de equações autônomas certas equações não-autônomas aparecem naturalmente da seguinte forma: se $x = x(t; t_0, x_0)$ é solução de $x' = f(x)$ (por exemplo, uma solução periódica) e estamos interessados em estudar o comportamento do sistema em uma vizinhança de x , então podemos considerar a diferencial $\partial_{x_0} x = \partial_{x_0} x(t; t_0, x_0)$ de x , que satisfaz a equação diferencial não-autônoma $\partial_{x_0} x' = Df(x(t))\partial_{x_0} x$.

Ao considerarmos sistemas dinâmicos, tentaremos, sempre que possível, representar certos aspectos da dinâmica do sistema esboçando o seu *diagrama de fase*, que é o conjunto de todas as órbitas do sistema munidas do seu sentido de evolução. Esse esboço será feito traçando-se algumas órbitas e uma seta indicando o sentido de evolução dessas órbitas. Esse diagrama pode ser complementado com a representação do campo de vetores gerado por $f = f(x)$, que são tangentes às órbitas. Graças à unicidade das soluções, só há uma órbita passando por cada ponto do espaço de fase. As órbitas não se cruzam! Elas definem, na verdade, uma relação de equivalência no espaço de fase. Poderíamos até dar uma definição mais formal de diagrama de fase envolvendo relações de equivalência e algo mais para indicar o sentido de evolução, mas não faremos isso.

Em um sistema não-autônomo, o campo de vetores $f(x, t)$ varia com t e o diagrama de fase como definido acima não tem sentido. Mas podemos transformar uma equação não-autônoma em uma autônoma aumentando a dimensão do espaço em uma unidade. De fato, dada uma equação

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

podemos considerar

$$\begin{cases} y' = f(\sigma, x) \\ \sigma' = 1 \\ y(\tau_0) = y_0 \\ \sigma(\tau_0) = \sigma_0, \end{cases}$$

cujos espaço de fase é formado por (y, σ) em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Fazendo $y_0 = x_0$ e $\sigma_0 = t_0$, temos $\sigma(\tau) = \tau$ e $y'(\tau) = f(\tau, y)$, logo $y(\tau) = x(\tau)$. Essa técnica é mais útil quando $f = f(t, x)$ é periódica em t (ou, mais geralmente, quasi-periódica ou, ainda, *almost-periodic*). Nesse caso, podemos considerar como espaço de fase $\mathbb{R}^m \times S^1$. A vantagem é que S^1 é uma variedade compacta, e ser compacto é sempre uma boa qualidade. O porquê disso nesse caso ficará claro mais tarde.

Nas próximas duas seções, vamos fazer um estudo mais detalhado de sistemas gerados por equações lineares. Para essas equações, os próximos resultados são óbvios.

Proposição 6.27. *Seja $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ contínua e sejam $U(t; t_0)$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, os operadores fundamentais da equação linear*

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

cujas soluções estão definidas globalmente. Então, os operadores $U(t; t_0)$ são lineares, i.e., $U(t; t_0)(x_1 + \alpha x_2) = U(t; t_0)x_1 + \alpha U(t; t_0)x_2$.

A versão do resultado acima para equações autônomas é a seguinte:

Proposição 6.28. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ e seja $\{S(t)\}_t$ o grupo gerado pela equação autônoma $x' = Ax$. Então, $S(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

□

Problemas

- 6.1 Considere o Problema 4.9. Mostre que se f e h são globalmente Lipschitz, então as soluções estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.
- 6.2 Considere o Problema 4.10 e mostre que se f e g são globalmente Lipschitz, então as soluções estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.
- 6.3 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 com f globalmente Lipschitz e g não-negativa. Mostre que as soluções da equação

$$x' = f(x) - xg(x)$$

geram um semigrupo de transformações em \mathbb{R} .

- 6.4 Convença-se das afirmações feitas nos Exemplos 4.24 e 4.25.

6.5 Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz. Mostre que se

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x) \cdot x}{|x|^2} < +\infty,$$

então as soluções de $x' = f(x)$ estão definidas globalmente.

6.6 Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função localmente Lipschitz e homogênea de grau maior que um, *i.e.*, existe $r > 1$ tal que $f(sx) = s^r f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e todo $s > 0$. Mostre que se $f(x)$ é um múltiplo positivo de x para algum $x \in \mathbb{R}^m$ não-nulo, então alguma solução da equação diferencial $x' = f(x)$ explode em tempo finito, *i.e.*, não está definida para todo $t \geq 0$.

6.7 Dos sistemas bidimensionais abaixo, com $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$, determine quais têm todas as suas soluções definidas para todo $t \geq 0$:

$$a) \begin{cases} x' = -y^2, \\ y' = xy; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x' = xy^2, \\ y' = y(y^2 - x^2); \end{cases} \quad c) \begin{cases} x' = x \operatorname{sen} y, \\ y' = y(2 - x^4); \end{cases}$$

6.8 Considere a equação diferencial integral

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + \int_{t_0}^t g(x(s)) ds \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

onde f e g são globalmente Lipschitz em \mathbb{R} . Como no Problema 6.2 acima, as soluções $x(t; t_0, x_0)$, onde $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Verifique se a família de funções $\{U(t, t_0)\}_{t, t_0}$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, dada por $U(t; t_0)x_0 = x(t; t_0, x_0)$ é um processo em \mathbb{R} .

6.9 Considere as equações do Problema 6.2. Considere a variável auxiliar $y' = g(x)$ e mostre que as equações em questão podem ser transformadas (imersas, na verdade) em sistemas dinâmicos bidimensionais.

PARTE 3**SISTEMAS LINEARES**

7. SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Função exponencial. Classificação de pontos fixos. [9, 1, 8, 5]

Considere a equação

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (7.1)$$

onde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Para resolver essa equação e estudar a sua dinâmica, vamos utilizar a forma canônica de Jordan de A , achando coordenadas apropriadas no espaço de fase para simplificar a equação. Note que se B é uma transformação similar a A , então existe P inversível tal que $P^{-1}AP = B$. Logo, se $x = x(t)$ é solução de (7.1), então $y = P^{-1}x$ satisfaz

$$y' = P^{-1}x' = P^{-1}Ax = P^{-1}APy = By,$$

com $y(0) = P^{-1}x_0$. A volta também é verdade. Temos, então, o seguinte resultado:

Proposição 7.1. *Sejam $A, B, P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tais que P é inversível e $P^{-1}AP = B$. Seja $\{S(t)\}_t$ o grupo fundamental associado a $x' = Ax$ e seja $\{T(t)\}_t$ o grupo fundamental associado a $y' = By$. Então $P^{-1}S(t)P = T(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

□

Portanto, precisamos entender as equações lineares envolvendo blocos de Jordan e, depois, entender o que acontece com essas equações sob mudanças de variáveis.

7.1. Sistemas bidimensionais. Em \mathbb{R}^2 , temos os seguintes casos possíveis:

- (1) Auto-valores reais distintos λ_1, λ_2 .
 - (a) Quando $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, a origem é um *nó atrator*.
 - (b) Quando $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, a origem é um *nó repulsor*.
 - (c) Quando $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, a origem é um *ponto de sela*.
- (2) Auto-valores reais iguais λ .
 - (a) Quando $\lambda < 0$, a origem é um *nó impróprio atrator*.
 - (i) Caso diagonalizável
 - (ii) Caso não-diagonalizável
 - (b) Quando $\lambda > 0$, a origem é um *nó impróprio repulsor*.
 - (i) Caso diagonalizável
 - (ii) Caso não-diagonalizável
- (3) Autovalores complexos (conjugados) $\alpha \pm i\beta$.
 - (a) Quando $\alpha < 0$, a origem é um *foco atrator*.
 - (b) Quando $\alpha > 0$, a origem é um *foco repulsor*.
 - (c) Quando $\alpha = 0$, a origem é um *centro*

Além desses, temos os casos *degenerados*, onde um ou ambos autovalores são nulos.

Podemos, também, obter a classificação da origem (como ponto fixo) diretamente do traço $\text{tr } A$ e do determinante $\det A$ de A , pois eles são invariantes por similaridade e iguais a soma e ao produto dos autovalores, respectivamente.

7.2. Sistemas m-dimensionais. Em \mathbb{R}^m , $m \geq 3$, temos generalizações das situações encontradas em \mathbb{R}^2 . As mais notáveis são as com mais de dois autovalores imaginários puros, onde podemos ter órbitas periódicas, se eles (esses autovalores) forem racionalmente dependentes, ou quasi-periódicas, se eles forem racionalmente independentes. Também podemos ter blocos nilpotentes associados a autovalores complexos. De qualquer forma, podemos fazer as seguintes classificações:

- (1) Se todos os autovalores de A têm parte real negativa, então a origem é um ponto fixo *atrator*.
- (2) Se todos os autovalores de A têm parte real positiva, então a origem é um ponto fixo *repulsor*.
- (3) Se alguns autovalores de A têm parte real positiva e outros têm parte real negativa, mas nenhum tem parte real nula, então a origem é um ponto fixo de *sela*

7.3. Exponencial de um operador linear. No caso da equação escalar $x' = ax$, $x(0) = x_0$, onde $a \in \mathbb{R}$, a solução se escreve $x(t) = x_0 e^{at}$. Podemos generalizar essa idéia para um sistema de equações dando sentido à exponencial de um operador linear.

No caso da função escalar e^a , ela é normalmente definida como sendo a função inversa do logaritmo definido por

$$\log b = \int_1^b \frac{1}{s} ds, \quad \forall b > 0.$$

Mostra-se, então, que a e^a satisfaz

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}; \quad (7.2)$$

$$(e^a)^{-1} = e^{-a}, \quad \forall a \in \mathbb{R}; \quad (7.3)$$

e tem as seguintes propriedades

$$\frac{d}{dt} e^{at} = a e^{at}; \quad (7.4)$$

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \quad (7.5)$$

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n; \quad (7.6)$$

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-n}; \quad (7.7)$$

$$e^a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\zeta}}{\zeta - a} d\zeta; \quad (7.8)$$

onde γ é uma curva fechada simples no plano complexo envolvendo a .

No caso de um operador linear $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, podemos definir e^A (ou $\exp(A)$) usando qualquer uma das cinco propriedades acima. Como ponto de partida, temos

Proposição 7.2. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Então a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (7.9)$$

converge absolutamente em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ definindo um operador que denotamos por e^A ou $\exp(A)$ e dito a exponencial de A .

Dem.: Temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$$

mostrando, pelo teste de Weierstrass, que $\sum A^n/n!$ converge absolutamente em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. □

Como resultado mais importante, temos

Teorema 7.3. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, e seja $\{S(t)\}_t$ o grupo fundamental gerado por $x' = Ax$. Então $S(t) = e^{tA}$ e*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dem.: Para $|t| < T$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|tA\|^n}{n!} \leq e^{T\|A\|},$$

logo, pelo teste de Weierstrass,

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

converge absolutamente e uniformemente para t em subintervalos compactos de \mathbb{R} . Portanto, podemos diferenciar termo a termo e obter

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1} A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} A \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = A e^{tA}$$

em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Logo, $x(t) = e^{tA}x_0$ é solução de $x' = Ax$ com $x(0) = e^0x_0 = x_0$. Pela unicidade das soluções da equação diferencial $x' = Ax$ temos que $e^{tA}x_0 = S(t)x_0$, logo $e^{tA} = S(t)$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.

Uma outra demonstração é começar com $x(t) = S(t)x_0$ e observar que $x = x(\cdot)$ é o limite da seqüência de Picard

$$\begin{aligned} x_0(t) &\equiv x_0, \\ x_1(t) &= x_0 + \int_0^t Ax_0(s) ds = x_0 + tAx_0, \\ x_2(t) &= x_0 + \int_0^t Ax_1(s) ds = x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2}A^2x_0, \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \left(I + tA + \cdots + \frac{t^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!} \right) x_0 \end{aligned}$$

e, portanto, $S(t) = e^{tA}$. □

Omitimos a demonstração da próxima proposição.

Proposição 7.4. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Então,*

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{A}{n} \right)^n; \quad (7.10)$$

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{A}{n} \right)^{-n}; \quad (7.11)$$

$$e^A = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\zeta} (A - \zeta I)^{-1} d\zeta; \quad (7.12)$$

onde γ é uma curva fechada simples envolvendo todo o espectro de A .

Observação 7.5. *Poderíamos ter tomado como definição de e^A qualquer uma das expressões na Proposição 7.4. No caso de equações a derivadas parciais, porém, a única definição válida é (7.11); uma variação de (7.12) (mais precisamente, uma variação em γ) é válida em alguns casos, mas as formas (7.9) e (7.10) não têm sentido, em geral.*

Observação 7.6. *A expressão em (7.12) segue da fórmula integral de Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta,$$

válida quando γ é uma curva fechada simples no plano complexo envolvendo z e f é uma função analítica. Para uma função inteira f , podemos definir $f(A)$ para um operador $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ (ou qualquer operador linear limitado A em um espaço de Banach), através de

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (A - \zeta I)^{-1} d\zeta,$$

independentemente da escolha de γ , desde que γ envolva todo o espectro de A , caso em que a inversa $R(\zeta) = (A - \zeta I)^{-1}$ está definida para todo $\zeta \in \gamma$. Podemos fazer isso também para uma função analítica f não inteira desde que o espectro de A esteja todo contido no domínio de analiticidade de f .

Quanto às extensões de (7.2) e (7.3) é fácil ver que

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^m,$$

que segue da propriedade de grupo $S(t+s) = S(t)S(s)$ de $e^{tA} = S(t)$. Com isso, temos, também,

$$I = e^0 = e^{(t-t)A} = e^{tA}e^{-tA}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

logo, fazendo $t = 1$,

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}, \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m).$$

O caso mais delicado é o da extensão de $e^{a+b} = e^a e^b = e^b e^a$, pois, em geral, matrizes não comutam.

Proposição 7.7. *Sejam $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Se $AB = BA$, então*

$$e^A e^B = e^{A+B} \tag{7.13}$$

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A \tag{7.14}$$

Dem.: Primeiramente,

$$e^A e^B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} B = \sum_{n=0}^{\infty} B \frac{A^n}{n!} = B e^A.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{tA} e^{tB}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} e^{(t+h)B} - e^{tA} e^{tB}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} e^{tB} + e^{tA} \frac{e^{(t+h)B} - e^{tB}}{h} \right\} \\ &= A e^{tA} e^{tB} + e^{tA} B e^{tB} = A e^{tA} e^{tB} + B e^{tA} e^{tB} \\ &= (A + B) e^{tA} e^{tB}. \end{aligned}$$

Logo, pela unicidade das soluções da equação diferencial $x' = (A + B)x$, temos que

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $t = 1$, obtemos (7.14). □

Vale lembrar, finalmente, que, pela Proposição 7.1, temos

$$P^{-1} e^A P = e^{P^{-1} A P}.$$

Essa relação também pode ser demonstrada diretamente da série de potências:

$$P^{-1} e^A P = P^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) P = \sum_{n=0}^{\infty} P^{-1} \frac{A^n}{n!} P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P^{-1} A P)^n}{n!} = e^{P^{-1} A P}.$$

Em resumo, temos as seguintes propriedades dos operadores fundamentais $e^{tA} = S(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

1. $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A;$
2. $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!};$
3. $e^{tA} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{tA}{n}\right)^n;$
4. $e^{tA} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n};$
5. $e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\zeta} (\zeta I - A)^{-1} d\zeta;$
6. $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA};$
7. $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA};$
8. $e^{tA}B = Be^{tA}, \quad \text{se } AB = BA;$
9. $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}, \quad \text{se } AB = BA;$
10. $P^{-1}e^{tA}P = e^{tP^{-1}AP}, \quad \forall P \text{ inversível.}$

7.4. Exponencial de blocos de Jordan. Podemos escrever explicitamente as soluções de equações da forma $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ através da forma de Jordan $B = P^{-1}AP$ de A , pois vimos que $e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$. Basta, então, que saibamos escrever a exponencial de blocos de Jordan.

Se

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix},$$

em blocos, *i.e.*, os B_i 's são sub-blocos e os sub-blocos não indicados são nulos, então

$$e^{tB} = \begin{bmatrix} e^{tB_1} & & & \\ & e^{tB_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tB_k} \end{bmatrix},$$

o que pode ser facilmente visto pela série de A , pois

$$B^n = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B_1^n & & & \\ & B_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k^n \end{bmatrix}.$$

Os blocos de Jordan reais são

$$B = [\lambda], \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{bmatrix},$$

e resolver por indução:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{01}e^{\lambda t}, \\ x_2(t) &= (x_{02} + x_{01}t)e^{\lambda t}, \\ &\vdots \\ x_k(t) &= \left(x_{0k} + x_{0k-1}t + \cdots + x_{01} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

No caso complexo, considere o sistema

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y. \end{cases}$$

Passando para coordenadas polares, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, temos o sistema

$$\begin{cases} r' = \alpha r \\ \theta' = \beta. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) &= \theta_0 + \beta t. \end{aligned}$$

Como $\cos \theta(t) = \cos(\theta_0 + \beta t) = \cos \theta_0 \cos \beta t - \sin \theta_0 \sin \beta t$, temos

$$x(t) = r(t) \cos \theta(t) = e^{\alpha t} (r_0 \cos \theta_0 \cos \beta t - r_0 \sin \theta_0 \sin \beta t) = e^{\alpha t} (x_0 \cos \beta t - y_0 \sin \beta t).$$

Analogamente, temos $y(t) = e^{\alpha t} (x_0 \sin \beta t + y_0 \cos \beta t)$. Portanto,

$$\exp \left(t \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

Outra maneira de obter isso é complexificando, escrevendo

$$Q^{-1} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix},$$

e obtendo

$$\begin{aligned} \exp \left(t \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) &= \exp \left(t Q \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix} Q^{-1} \right) \\ &= Q \exp \left(t \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \right) Q^{-1} \\ &= Q \begin{bmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-i\beta)t} \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= e^{\alpha t} Q \begin{bmatrix} e^{i\beta t} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta t} \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= e^{\alpha t} Q \begin{bmatrix} \cos \beta t + i \sin \beta t & 0 \\ 0 & \cos \beta t - i \sin \beta t \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que o mesmo operador Q é tal que

$$Q^{-1} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} \cos \beta t + i \sin \beta t & 0 \\ 0 & \cos \beta t - i \sin \beta t \end{bmatrix}.$$

De fato, é fácil verificar que Q independe de α e β e é dado por

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Omitimos a análise do último caso, com um bloco nilpotente associado a autovalores complexos, pois ele é mais envolvido computacionalmente, mas é apenas uma combinação dos casos acima.

7.5. Análise do oscilador harmônico.

Problemas

- 7.1 Se $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, denote por $\sigma(L) \subset \mathbb{C}$ o espectro de L , *i.e.*, o conjunto de seus autovalores. Se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, mostre que $\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)}$.
- 7.2 Considere \mathbb{R}^m munido de um produto interno e seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Mostre que $(e^A)^* = e^{A^*}$, onde “*” indica o operador adjunto. Mostre que se A é (1) normal, (2) auto-adjunta, (3) anti-simétrica, então e^A é (1) normal, (2) auto-adjunta, (3) ortogonal.
- 7.3 Sejam $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Mostre que $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ se e somente se $AB = BA$.
- 7.4 Considere \mathbb{R}^m munido de um produto interno e seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ anti-simétrica. Seja $M = \{x; Ax = 0\}$, o núcleo de A e seja P_M a projeção ortogonal sobre M . Mostre que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{sA} ds = P_M.$$

- 7.5 Sejam $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tais que $AB = BA$. Mostre que se a origem é um ponto fixo atrator (resp. repulsor) para $x' = Ax$ e $y' = By$, então ela também o é para $x' = (A+B)x$. E se a origem for um ponto fixo de sela para $x' = Ax$ e $y' = Ay$, podemos afirmar o mesmo para $x' = (A+B)x$?
- 7.6 Construa um exemplo em \mathbb{R}^2 para mostrar que, em geral, o resultado do problema anterior não se estende para o caso em que A e B não comutam.
- 7.7 Classifique o sistema bidimensional $x' = Ax$ e esboce o seu diagrama de fase nos seguintes casos:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 \end{bmatrix}; & \text{b) } A &= \begin{bmatrix} 2/5 & 6/5 \\ 6/5 & -7/5 \end{bmatrix}; & \text{c) } A &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -2/3 & -1 \end{bmatrix}; \\ \text{d) } A &= \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -7/3 \end{bmatrix}; & \text{e) } A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; & \text{f) } A &= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- 7.8 Considere o sistema $x' = Ax$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a - 3/4 & -5/4 \\ 5/4 & a + 3/4 \end{bmatrix},$$

com $a \in \mathbb{R}$. Sendo os autovalores de A complexos, determine os valores de a para os quais a origem é um foco atrator, um foco repulsor e um centro. Ache uma matriz real P tal que $P^{-1}AP$ esteja na forma canônica real de Jordan. Como A não é ortogonal, P leva uma circunferência em uma elipse. Para determinar os semi-eixos principais dessa elipse, utilizamos a decomposição em valores singulares de P , que diz que existem matrizes ortogonais reais U e V tais que $U^*PV = \Sigma$, onde $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$ é uma matriz diagonal com $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. As colunas de U são os autovetores ortonormais u_1 e u_2 da matriz simétrica PP^* e σ_1^2 e σ_2^2 são os autovalores dessa matriz PP^* . Verifique a partir da fórmula $P = U\Sigma V^*$ que a circunferência unitária é levada por P na elipse de semi-eixos $\sigma_1 u_1$ e $\sigma_2 u_2$. Tendo isso em mente, esboce o diagrama de fase do sistema em questão para valores típicos de a .

- 7.9 Podemos resolver a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

em $\mathcal{U} = \{(x, y); ax + by \neq 0\}$, resolvendo o sistema linear

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

e, se possível, invertendo $x = x(t)$ e fazendo $y = y(t(x))$. Estude condições em termos dos dados iniciais $y(x_0) = y_0$ e dos autovalores e autovetores da matriz acima que garantam a existência de soluções $y = y(x)$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ ou para todo $x > 0$. (Sugestão: olhe para o diagrama de fase do sistema linear.)

7.10 Usando o método descrito no problema anterior, ache a solução da equação

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

8. SISTEMAS LINEARES NÃO-AUTÔNOMOS E NÃO-HOMOGÊNEOS

Solução fundamental. Fórmula de Variação de Constantes. Variação de Volumes e Fórmula de Liouville. [9, 1, 8]

8.1. **Sistemas não-autônomos homogêneos.** Considere

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (8.1)$$

cuja família de operadores fundamentais denotamos por $T(t; t_0)$. No caso de uma equação escalar $x' = a(t)x$, $x(t_0) = x_0$, a solução é $x(t) = x_0 \exp(\int_{t_0}^t a(s) ds)$. Portanto, somos tentados a escrever a solução de (8.1) como

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds} x_0,$$

que envolve a exponencial do operador

$$\int_{t_0}^t A(s) ds,$$

que nada mais é do que operador obtido integrando-se cada entrada da matriz $A(s)$. No entanto, nem sempre isso é verdade. Isso está associado ao fato dos operadores lineares não comutarem em geral.

Proposição 8.1. *Seja $A = A(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ e seja $\{T(t; t_0)\}_{t, t_0}$ a família dos operadores fundamentais associados à equação (8.1). Se $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ para todos $s, t \in \mathbb{R}$, então*

$$T(t; t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds}, \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{R},$$

e

$$\frac{d}{dt} e^{\int_{t_0}^t A(s) ds} = A(t) e^{\int_{t_0}^t A(s) ds} = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds} A(t).$$

Dem.: . Se $A(t)$ e $A(s)$ comutam, então

$$\begin{aligned} \left(\int_t^{t+h} A(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) &= \int_{t_0}^t \left(\int_t^{t+h} A(\tau) d\tau \right) A(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t \int_t^{t+h} A(\tau) A(s) d\tau ds \\ &= \int_{t_0}^t \int_t^{t+h} A(s) A(\tau) d\tau ds \\ &= \int_{t_0}^t A(s) \left(\int_t^{t+h} A(\tau) d\tau \right) ds \\ &= \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) \left(\int_t^{t+h} A(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 7.7,

$$\begin{aligned} \frac{\exp\left(\int_{t_0}^{t+h} A(s) ds\right) - \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right)}{h} &= \frac{\exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds + \int_t^{t+h} A(s) ds\right) - \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right)}{h} \\ &= \frac{\exp\left(\int_t^{t+h} A(s) ds\right) \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right) - \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right)}{h} \\ &= \left(\frac{\exp\left(\int_t^{t+h} A(s) ds\right) - I}{h} \right) \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right) \end{aligned}$$

Da série de potências da exponencial de um operador, temos

$$\frac{1}{h} \left(\exp \left(\int_t^{t+h} A(s) ds \right) - I \right) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} A(s) ds + \mathcal{O}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} A(t)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) = A(t) \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) A(t),$$

onde a última igualdade segue da comutatividade entre $A(t)$ e $A(s)$. Logo, pela unicidade das soluções da equação diferencial em questão, temos

$$T(t; t_0) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right).$$

□

Observação 8.2. *Veja o Problema 8.1 para uma generalização da Proposição 8.1 acima.*

Exemplo 8.3. *Considere a equação*

$$\begin{cases} x'_1 = 2tx_1 + x_2 \\ x'_2 = x_1 + 2tx_2. \end{cases}$$

que é da forma $x' = A(t)x$, onde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2t & 1 \\ 1 & 2t \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que $A(t)A(s) = A(s)A(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$, logo a solução pode ser obtida através da Proposição 8.1. Temos

$$\int_{t_0}^t A(s) ds = \begin{bmatrix} t^2 - t_0^2 & t - t_0 \\ t - t_0 & t^2 - t_0^2 \end{bmatrix} = (t - t_0) \begin{bmatrix} t + t_0 & 1 \\ 1 & t + t_0 \end{bmatrix},$$

que é diagonalizável com autovalores independentes de t , o que facilita os cálculos mas não é necessário. Temos, de fato

$$P^{-1} \begin{bmatrix} t + t_0 & 1 \\ 1 & t + t_0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} t + t_0 + 1 & 0 \\ 0 & t + t_0 - 1 \end{bmatrix},$$

onde

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

com $P = P^{tr} = P^{-1}$ (P é uma reflexão pura). Com isso,

$$\begin{aligned} T(t; t_0) &= \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) = P \exp \left((t - t_0) P^{-1} \begin{bmatrix} t + t_0 + 1 & 0 \\ 0 & t + t_0 - 1 \end{bmatrix} P \right) P^{-1} \\ &= \dots = e^{t^2 - t_0^2} \begin{bmatrix} \cosh(t - t_0) & \sinh(t - t_0) \\ \sinh(t - t_0) & \cosh(t - t_0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se os operadores $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, não comutam, então não podemos, em geral, explicitar mais as soluções. Podemos, contudo, obter algumas informações:

Proposição 8.4. *Seja $A = A(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ e seja $\{T(t; t_0)\}_{t, t_0}$ a família dos operadores fundamentais associados à equação $x' = A(t)x$. Então $T(t; t_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$,*

$$\frac{d}{dt} T(t; t_0) = A(t)T(t; t_0), \quad \text{em } \mathcal{L}(\mathbb{R}^m),$$

$$\frac{d}{dt_0} T(t; t_0) = -T(t; t_0)A(t_0), \quad \text{em } \mathcal{L}(\mathbb{R}^m),$$

e, em geral, $T(t; t_0)$ não comuta nem com $A(t)$ nem com $A(t_0)$.

Dem.: Só nos resta mostrar a identidade envolvendo a derivada em relação a t_0 . Os outros resultados já foram demonstrados antes. Temos

$$\begin{aligned} \frac{T(t; t_0 + h) - T(t; t_0)}{h} &= \frac{T(t; t_0 + h) - T(t; t_0 + h)T(t_0 + h; t_0)}{h} = T(t; t_0 + h) \frac{I - T(t_0 + h; t_0)}{h} \\ &= -T(t; t_0 + h) \frac{T(t_0 + h; t_0) - I}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -T(t; t_0)A(t_0). \end{aligned}$$

□

Proposição 8.5. *Seja $A = A(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$. O espaço de soluções $\Xi = \{x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m); x' = A(t)x\}$ é um espaço vetorial de dimensão m .*

Dem.: Primeiramente, sendo a equação linear e homogênea, é fácil ver que um múltiplo escalar de uma solução também é uma solução e que a soma de duas soluções também é uma solução, o que mostra que Ξ é um espaço vetorial. Para ver que Ξ tem dimensão m , fixe um tempo inicial t_0 , digamos $t_0 = 0$, e note que toda e qualquer solução pode ser escrita unicamente na forma

$$x(t) = T(t; 0)x(0) = T(t; 0)(a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m) = a_1T(t; 0)\mathbf{e}_1 + \cdots + a_mT(t; 0)\mathbf{e}_m.$$

Ou seja, $\{T(\cdot; 0)\mathbf{e}_1, \dots, T(\cdot; 0)\mathbf{e}_m\}$ é uma base de Ξ .

□

8.2. Sistemas não-homogêneos e fórmula de variação de constantes. Considere a equação linear não-homogênea

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (8.2)$$

A solução da equação homogênea associada

$$\begin{cases} y' = A(t)y, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (8.3)$$

se escreve

$$y(t) = T(t; t_0)y_0.$$

Seguindo a interpretação em [1], podemos olhar a relação

$$u = T(t; t_0)v \quad (8.4)$$

como sendo uma mudança de variáveis ($T(t; t_0)$ é inversível), de forma que

$$u' = A(t)u \Leftrightarrow A(t)u = u' = A(t)T(t; t_0)v + T(t; t_0)v' \Leftrightarrow A(t)u = A(t)u + T(t; t_0)v' \Leftrightarrow v' = 0.$$

Isto significa que a mudança de variáveis (8.4) “retifica” a equação homogênea (8.3), pois as soluções de $v' = 0$ são constantes. Sob essa mesma mudança de variáveis, temos, para o sistema não-homogêneo,

$$u' = A(t)u + b(t) \Leftrightarrow A(t)u + b(t) = A(t)u + T(t; t_0)v' \Leftrightarrow v' = T(t; t_0)^{-1}b(t).$$

Note que essa equação em v pode ser resolvida “explicitamente”. Temos

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t v'(s) ds = T(t_0; t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^t T(s; t_0)^{-1}b(s) ds.$$

Como $T(t_0; t_0) = I$ e $T(t; t_0)^{-1} = T(t_0; t)$, então

$$v(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t T(t_0; s)b(s) ds$$

Voltando para a variável u , temos (como $T(t; t_0)$ é linear)

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t; t_0)v(t) = T(t; t_0)u(t_0) + T(t; t_0) \int_{t_0}^t T(t_0; s)b(s) ds \\ &= T(t; t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^t T(t; t_0)T(t_0; s)b(s) ds \\ &= T(t; t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^t T(t; s)b(s) ds. \end{aligned}$$

Esta é a chamada *fórmula de variação de constantes*.

Teorema 8.6. *Seja $A = A(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ e seja $\{T(t; t_0)\}_{t, t_0}$ a família dos operadores fundamentais associados à equação homogênea (8.3). Seja $b = b(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ e seja $\{U(t; t_0)\}_{t, t_0}$ a família dos operadores fundamentais associados à equação não-homogênea (8.2). Então,*

$$U(t; t_0)x_0 = T(t; t_0)x_0 + \int_{t_0}^t T(t; s)b(s) ds, \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{R}. \quad (8.5)$$

□

No caso da equação homogênea correspondente ser autônoma, temos

Teorema 8.7. *Sejam $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ e $b = b(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ e seja $\{U(t; t_0)\}_{t, t_0}$ a família dos operadores fundamentais associados à equação não-homogênea $x' = Ax + b(t)$. Então,*

$$U(t; t_0)x_0 = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s) ds, \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{R}.$$

□

Observação 8.8. *O nome fórmula de variação de constantes vem do fato da solução do problema homogêneo ser $T(t; t_0)y_0$ e de procurarmos a solução do problema não-homogêneo correspondente apenas “variando” y_0 em relação ao tempo na expressão acima e escrevendo $x(t) = T(t; t_0)v(t)$.*

Exemplo 8.9. *Considere a equação escalar de segunda ordem*

$$\begin{cases} x'' + x = t \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = y_0. \end{cases}$$

Podemos escrevê-la como um sistema de duas equações de primeira ordem:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

então

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\int_0^t e^{-sA}b(s) ds = \int_0^t \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \cos t - \sin t \\ t \sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \cos t - \sin t \\ t \sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Obtemos, com isso, a solução

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_0 + t \cos t - \sin t) \cos t + (y_0 + t \sin t + \cos t) \sin t \\ &= x_0 \cos t + y_0 \sin t + t. \end{aligned}$$

A fórmula de variação de constantes evidencia um fato que poderíamos ter visto diretamente da equação: a solução da equação não-homogênea é a soma de uma solução *particular*

$$\int_{t_0}^t T(t; s)b(s) ds$$

(independente da condição inicial), com todas as soluções $T(t; t_0)x_0$ do problema homogêneo associado. Podemos ter também uma solução particular da forma

$$T(t; t_0)x_1 + \int_{t_0}^t T(t; s)b(s) ds$$

(com x_1 fixo), à qual podemos adicionar qualquer solução $T(t; t_0)x_2$ (com x_2 arbitrário) do problema homogêneo associado.

Isso implica em que o espaço de soluções da equação homogênea é um espaço afim de dimensão m :

Proposição 8.10. *Seja $A = A(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ e seja $b = b(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. O espaço de soluções $\Xi = \{x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m); x' = A(t)x + b(t)\}$ é um espaço afim de dimensão m da forma $\Xi = \xi + \Xi_0$, onde $\xi \in \Xi$ é uma solução particular e Ξ_0 é o espaço vetorial das soluções do problema homogêneo associado $x' = A(t)x$.*

Observação 8.11. *No caso de uma equação não-linear $x' = f(x)$ com f globalmente Lipschitz em \mathbb{R}^m , pode-se mostrar que o espaço de soluções é uma variedade topológica de dimensão m , e que, se f é de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N}$, então essa variedade é diferenciável de classe \mathcal{C}^k e com os planos tangentes dados pelos espaços das soluções das equações linearizadas $y' = Df(t, x(t; x_0))y$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$. O mesmo vale, em geral, para a equação $x' = f(t, x)$ com $f \in Lip_{loc, x}(\mathcal{W})$, $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto, mas esse caso é tecnicamente mais delicado.*

8.3. Fórmula de variação de constantes não-linear. A fórmula de variação de constantes pode ser estendida para certos sistemas não-lineares. Nesse caso, ela não é mais uma fórmula explícita para a solução, mas ainda assim é extremamente útil, por exemplo, no estudo da estabilidade de pontos fixos, de órbitas periódicas e de outros objetos e no estudo da dimensão fractal de atratores, como veremos posteriormente.

Teorema 8.12. *Seja $A = A(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ e seja $\{T(t; t_0)\}_{t, t_0}$ a família dos operadores fundamentais associados à equação homogênea (8.3). Seja $f \in Lip_{loc}(\mathcal{W})$, $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto, e seja $x(t; t_0, x_0)$ a solução maximal de*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Então,

$$x(t; t_0, x_0) = T(t; t_0)x_0 + \int_{t_0}^t T(t; s)f(s, x(s; t_0, x_0)) ds, \quad \forall (t_0, x_0) \in \mathcal{W}, \forall t \in I_m(t_0, x_0). \quad (8.6)$$

Dem.: Basta definir $b(t) = f(t, x(t; t_0, x_0))$ e observar que $x(t; t_0, x_0)$ coincide com a solução do problema linear $y' = A(t)y + b(t)$ com $y(t_0) = x_0$. Note que $b(\cdot)$, nesse caso, não está definido em todo \mathbb{R} , mas isso não é problema. Outra demonstração é derivar a expressão do lado direito de (8.6) e obter que ela satisfaz a equação diferencial $x' = A(t)x + f(t, x)$ com $x(t_0) = x_0$. \square

No caso particular em que a equação é autônoma, temos

Teorema 8.13. *Sejam $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ e $f \in Lip_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $x(t; x_0)$ a solução maximal de*

$$\begin{cases} x' = Ax + f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Então,

$$x(t; x_0) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} f(x(s; x_0)) ds, \quad \forall x_0 \in \mathcal{U}, \forall t \in I_m(x_0).$$

□

8.4. Oscilador harmônico forçado sem atrito.

$$x'' + \omega^2 x = \cos(\nu t).$$

8.5. Evolução de volumes - Fórmula de Liouville.

Lema 8.14. A função $\omega : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\omega(L) = \det L$ é de classe \mathcal{C}^1 (de fato, analítica) com

$$d\omega(L) \cdot H = \text{tr}(HL^{-1})\omega(L), \quad \forall H, L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \text{ com } L \text{ inversível.}$$

Proposição 8.15. Seja $A = A(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ e seja $\{T(t; t_0)\}_{t, t_0}$ a família dos operadores fundamentais associados à equação $x' = A(t)x$. Seja $X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Então,

$$\frac{d}{dt} \det(T(t; t_0)X) = \text{tr} A(t) \det(T(t; t_0)X), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dem.: De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(T(t; t_0)X) &= \frac{d}{dt} (\det T(t; t_0) \det X) = \left(\frac{d}{dt} \det T(t; t_0) \right) \det X \\ &= \text{tr} \left(\left(\frac{d}{dt} T(t; t_0) \right) T(t_0; t)^{-1} \right) \det T(t; t_0) \det X \\ &= \text{tr} (A(t)T(t; t_0)T(t_0; t)) \det T(t; t_0) \det X \\ &= \text{tr} A(t) \det(T(t; t_0)X) \end{aligned}$$

□

Problemas

8.1 Seja $A = A(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ e seja $\{T(t; t_0)\}_{t, t_0}$ a família dos operadores fundamentais associados à equação $x' = A(t)x$. Se

$$A(t) \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) = \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) A(t), \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{R},$$

mostre que

$$T(t; t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds}, \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{R}.$$

8.2 Considere a equação escalar

$$x' = a(t)x + b(t),$$

onde $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são funções reais contínuas de período T . Mostre que se o valor médio de $a(\cdot)$ sobre um período T é diferente de zero, *i.e.*,

$$\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt \neq 0,$$

então a equação acima tem uma e somente uma solução de período T . Mostre ainda que essa solução é estável se esse valor médio é negativo e instável se ele é positivo. (Sugestão: Use a fórmula de variação de constantes para obter que a solução no instante $(n+1)T$, onde $n \in \mathbb{N}$, se escreve como um múltiplo da solução no instante nT mais uma constante.)

8.3 Usando o resultado do problema anterior, ache uma solução periódica da equação $x' = -x + \sin x$ e estude a sua estabilidade.

PARTE 4

SISTEMAS NÃO-LINEARES - INTRODUÇÃO

9. SISTEMAS NÃO-LINEARES

Pontos fixos; órbitas periódicas e quasi-periódicas; ligações homoclínicas e heteroclínicas; conjuntos omega-limite e alfa-limite. [9, 1, 8]

O comportamento de um sistema não-linear é muito mais rico que o de sistemas lineares e o nosso objetivo, nessa seção, é classificar alguns dos objetos mais importantes e típicos presentes em sistemas não-lineares. Nas aplicações, vamos procurar identificar esses objetos para tentar entender o comportamento global do sistema.

9.1. Objetos típicos de um sistema não-linear. No que se segue, vamos considerar as soluções maximais $x(t; x_0)$, $t \in I_m(x_0)$, de uma equação não-linear $x' = f(x)$, com $f \in \text{Lip}_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^m$ aberto.

- **Órbitas:** As órbitas são os conjuntos $\{x(t; x_0)\}_{t \in I_m(x_0)}$, que podem ser órbitas *globais*, se $I_m(x_0) = \mathbb{R}$, ou não. Denotamos por $\gamma(x_0)$ a órbita que passa por x_0 . Definimos, também, a *órbita positiva* de x_0 por $\gamma^+(x_0) = \{x(t; x_0)\}_{t \in I_m^+(x_0)}$ e a *órbita negativa* de x_0 por $\gamma^-(x_0) = \{x(t; x_0)\}_{t \in I_m^-(x_0)}$. Cada órbita $\gamma(x_0)$ pode, ainda, ser *semi-global positivamente*, se $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$, ou *semi-global negativamente*, se $I_m^-(x_0) = \mathbb{R}^-$.
- **Pontos fixos e pontos regulares:** Um ponto $\bar{x} \in \mathcal{U}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$ é dito um *ponto fixo* do sistema gerado por $x' = f(x)$ ou da equação $x' = f(x)$ e é chamado, também, de um *ponto singular* de f ou de uma *singularidade* de f . Um ponto $x \in \mathcal{U}$ tal que $f(x) \neq 0$ é dito um *ponto regular* de f .
- **Órbitas periódicas:** Uma órbita $\gamma(x_0)$ é dita *periódica* ou *fechada* se $x(T; x_0) = x_0$ para algum $T > 0$, $T \in I_m^+(x_0)$, mas $x(t; x_0) \neq x_0$. O menor T tal que $x(T; x_0) = x_0$ é dito o *período* dessa órbita γ , que, pela continuidade das soluções, existe e é positivo. Note que como o sistema é autônomo, temos que se $x(T; x_0) = x_0$ então $I_m(x_0) = \mathbb{R}$ e $x(t+T; x_0) = x(t; x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 9.1. O círculo unitário é uma órbita periódica do sistema

$$\begin{cases} x' = x(1 - x^2 - y^2) - by, \\ y' = bx + y(1 - x^2 - y^2), \end{cases}$$

onde $b \in \mathbb{R}$, o que pode ser visto escrevendo-se o sistema em coordenadas polares:

$$\begin{cases} r' = r - r^3, \\ \theta' = b. \end{cases}$$

- **Órbitas quasi-periódicas:** Uma órbita $\gamma(x_0)$ é dita *quasi-periódica* (de ordem ou grau n) se ela não é global e é da forma

$$x(t; x_0) = g(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_n t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$, é T -periódica em cada variável, com o mesmo período $T > 0$, e $\omega_1, \dots, \omega_n$ são racionalmente independentes, i.e. cada razão ω_i/ω_j é um número irracional, para $i \neq j$.

Exemplo 9.2. Considere uma região “toroidal” parametrizada da forma

$$\begin{cases} x = (2 + r \cos \varphi) \cos \theta, \\ y = (2 + r \cos \varphi) \sin \theta, \\ z = r \sin \varphi, \end{cases}$$

onde $0 \leq r < 2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, e considere, nessa região, o sistema dado por

$$\begin{cases} \theta' = a, \\ \varphi' = b, \\ r' = r - r^3, \end{cases}$$

onde $a, b > 0$. A circunferência $r = 0$ é uma órbita periódica. Para $r = 1$, temos várias órbitas da forma

$$(x, y, z)(t) = (2 + \cos(bt) \cos(at), 2 \cos(bt) \sin(at), \sin(bt)),$$

que são periódicas se a/b é racional e quasi-periódicas se a/b é irracional, sendo as órbitas, nesse último caso, densas no toro $r = 1$.

- **Órbitas heteroclínicas:** São órbitas globais associadas a soluções $x(\cdot, x_0)$ com a propriedade de que existem os limites

$$x_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t; x_0) \quad e \quad x_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0),$$

com x_- e x_+ pontos fixos distintos do sistema. Essas órbitas também são chamadas de *ligações heteroclínicas*.

Exemplo 9.3. As semi-circunferências $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y < 0\}$ são órbitas heteroclínicas do sistema dado em coordenadas polares por

$$\begin{cases} r' = r - r^3, \\ \theta' = (r^2 - 1)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta. \end{cases}$$

Exemplo 9.4. As semi-circunferências $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y < 0\}$ são órbitas heteroclínicas do sistema dado em coordenadas polares por

$$\begin{cases} r' = (1 - r)^3 r, \\ \theta' = (r^2 - 1)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta. \end{cases}$$

- **Órbitas homoclínicas:** São similares às órbitas heteroclínicas exceto que $x_- = x_+$. Essas órbitas também são chamadas de *ligações homoclínicas*.

Exemplo 9.5. A circunferência unitária menos o ponto $(1, 0)$ é uma órbita homoclínica do sistema dado em coordenadas polares por

$$\begin{cases} r' = r - r^3, \\ \theta' = (r^2 - 1)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta/2. \end{cases}$$

Exemplo 9.6. A circunferência unitária menos o ponto $(1, 0)$ é uma órbita homoclínica do sistema dado em coordenadas polares por

$$\begin{cases} r' = (1 - r^2)^3 r, \\ \theta' = (r^2 - 1)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta/2. \end{cases}$$

- **Conjuntos invariantes:** Seja X um subconjunto do espaço de fase. Dizemos que X é (i) *positivamente invariante* se para qualquer $x_0 \in X$, segue que $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ e $\gamma^+(x_0) \subset X$; (ii) *negativamente invariante* se para qualquer $x_0 \in X$, segue que $I_m^-(x_0) = \mathbb{R}^-$ e $\gamma^-(x_0) \subset X$; e (iii) *invariante* se para qualquer $x_0 \in X$ segue que $I_m(x_0) = \mathbb{R}$ e $\gamma(x_0) \subset X$.

Se não exigirmos que as órbitas sejam globais ou semi-globais, temos as seguintes extensões das definições acima: X é dito (i) *fracamente positivamente invariante* se $\gamma^+(x_0) \subset X$, $\forall x_0 \in X$; (ii) *fracamente negativamente invariante* se $\gamma^-(x_0) \subset X$, $\forall x_0 \in X$; e (iii) *fracamente invariante* se $\gamma(x_0) \subset X$, $\forall x_0 \in X$.

Exemplo 9.7. Qualquer órbita é fracamente invariante e órbitas globais são invariantes. Além disso, no Exemplo 9.2, o toro $r = 1$ é invariante independentemente de a/b ser irracional ou não. A circunferência unitária e o próprio círculo unitário são invariantes em ambos os Exemplos 9.3 e 9.5, e, nesses mesmos exemplos, o círculo $\{r \leq 2\}$ é positivamente invariante e o círculo $\{r \leq 1/2\}$ é negativamente invariante.

- **Conjuntos limites:** Para caracterizar o comportamento assintótico do sistema (quando t vai para $\pm\infty$), temos os chamados conjuntos limites. Se $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$, definimos o conjunto ω -limite de x_0 por

$$\omega(x_0) = \{w \in \mathcal{U}; \exists t_n \rightarrow +\infty, x(t_n; x_0) \rightarrow w\}.$$

Se $I_m^-(x_0) = \mathbb{R}^-$, definimos o conjunto α -limite de x_0 por

$$\alpha(x_0) = \{w \in \mathcal{U}; \exists t_n \rightarrow -\infty, x(t_n; x_0) \rightarrow w\}.$$

Além disso, dada uma órbita γ , os conjuntos $\omega(x_0)$ e $\alpha(x_0)$ são independentes de $x_0 \in \gamma$, o que nos permite definir os conjuntos limites $\omega(\gamma)$ e $\alpha(\gamma)$ da própria órbita γ .

Exemplo 9.8. Considere o sistema do Exemplo 9.4. Considere uma condição inicial $p_0 = (x_0, y_0)$ no plano. Se p_0 pertence à circunferência unitária com $y_0 > 0$, então o conjunto ω -limite de p_0 é o ponto $\{(-1, 0)\}$ e o conjunto α -limite de p_0 é o ponto $\{(1, 0)\}$. Se p_0 pertence à circunferência unitária com $y_0 < 0$, então $\omega(p_0) = \{(1, 0)\}$ e $\alpha(x_0) = \{(-1, 0)\}$. Se $0 < x_0^2 + y_0^2 < 1$, então $\omega(x_0) = \{r = 1\}$, ou seja, é formado pelas duas órbitas heteroclínicas mais os dois pontos fixos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, e $\alpha(p_0) = \{(0, 0)\}$. Se $x_0^2 + y_0^2 > 1$, então $\omega(p_0) = \{r = 1\}$ e o conjunto α -limite de p_0 é vazio. No caso dos pontos fixos, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ e $(0, 0)$. Cada um deles é o seu próprio conjunto limite, tanto positivo quanto negativo.

Exemplo 9.9. No caso do sistema do Exemplo 9.2 com a/b irracional, o conjunto ω -limite de qualquer órbita diferente da órbita periódica $\{r = 0\}$ é todo o toro $\{r = 1\}$. Quanto ao conjunto α -limite, este é a órbita periódica $\{r = 0\}$, para as órbitas no interior do toro, é o próprio toro $\{r = 1\}$ para as órbitas no toro, e não está definido para as órbitas fora no exterior do toro.

- **Ciclo limite:** Uma órbita periódica que seja o conjunto ω -limite ou α -limite de algum ponto do espaço de fase é chamada de *ciclo limite*.
- **Variedades estáveis e instáveis de pontos fixos:** Dado um ponto fixo \bar{x} , definimos suas variedades *estável* e *instável* respectivamente por

$$W^s(\bar{x}) = \{x_0; I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+, \omega(x_0) = \{\bar{x}\}\},$$

e

$$W^u(\bar{x}) = \{x_0; I_m^-(x_0) = \mathbb{R}^-, \alpha(x_0) = \{\bar{x}\}\}.$$

É fácil ver que as variedades estáveis são positivamente invariantes e fracamente negativamente invariantes e as variedades instáveis são negativamente invariantes e fracamente positivamente invariantes.

Exemplo 9.10. Considere o sistema do Exemplo 9.3. Então $W^s(1, 0) = \{x^2 + y^2 = 1, y < 0\} \cup \{(1, 0)\}$ e $W^u(-1, 0) = \{x^2 + y^2 = 1, y > 0\} \cup \{(-1, 0)\}$. Considere, agora, o sistema

$$\begin{cases} x' = x - x^3, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Os pontos fixos são $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, com $W^s(0, 0) = \{x = 0\}$, $W^u(0, 0) = \{y = 0, -1 < x < 1\}$, $W^s(1, 0) = \{x > 0\}$, $W^u(1, 0) = \{(1, 0)\}$, $W^s(-1, 0) = \{x < 0\}$ e $W^u(-1, 0) = \{(-1, 0)\}$.

9.2. Propriedades dos conjuntos limites.

Proposição 9.11. Temos a seguinte caracterização dos conjuntos ω -limite:

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} x(s; x_0)}. \quad (9.1)$$

Teorema 9.12. Seja $f \in Lip_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se $x_0 \in \mathcal{U}$ é tal que $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ e $\gamma^+(x_0)$ é pré-compacto em \mathcal{U} , então $\omega(x_0)$ é não-vazio, compacto, invariante e conexo. Além disso, $\omega(x_0)$ atrai a órbita de x_0 no sentido de que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(x(t; x_0), \omega(x_0)) = 0. \quad (9.2)$$

Dem.: Sendo a órbita de x_0 pré-compacta em \mathcal{U} , temos que $\overline{\bigcup_{s \geq t} x(s; x_0)}$ é compacto para todo $t \geq 0$. Logo, pela caracterização (9.1), temos que o conjunto ω -limite de x_0 é a interseção de compactos decrescentes, logo, é não-vazio e compacto. Para ver que ele é invariante, seja $w \in \omega(x_0)$. Então existe $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$x(t_n; x_0) \rightarrow w.$$

Seja, agora, $t \geq 0$. Por continuidade, temos

$$x(t + t_n; x_0) = x(t; x(t_n; x_0)) \rightarrow x(t; w), \quad \forall t \in I_m(w).$$

Além disso, como $t + t_n \rightarrow +\infty$, temos, também, que $x(t; w) \in \omega(x_0)$ para todo $t \in I_m(w)$. Mas como $\omega(x_0)$ é compacto, temos (veja o Teorema 4.14 e a Observação 4.15), necessariamente, que $I_m(w) = \mathbb{R}$ e $x(t; w) \in \omega(x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que mostra que $\omega(x_0)$ é invariante.

Para provar (9.2), suponha que o resultado seja falso. Então podemos achar uma seqüência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\text{dist}(x(t_n; x_0), \omega(x_0)) \geq \varepsilon > 0,$$

para algum $\varepsilon > 0$. Como a órbita de x_0 é pré-compacta em \mathcal{U} , existe um $w \in \mathcal{U}$ e uma subsequência $t_{n'} \rightarrow +\infty$ tal que

$$x(t_{n'}; x_0) \rightarrow w.$$

Mas por definição isso implica que w pertence a $\omega(x_0)$, o que é impossível, pois temos, também, que

$$\text{dist}(w; \omega(x_0)) \geq \varepsilon > 0.$$

Finalmente, se $\omega(x_0)$ não fosse conexo, então teríamos A e B disjuntos e abertos em $\omega(x_0)$ tais que $\omega(x_0) = A \cup B$. Como $\omega(x_0)$ é compacto, então A e B seriam compactos, também. Teríamos, então, abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$ e $B \subset V$. Com isso, $U \cup V$ seria uma vizinhança de $\omega(x_0)$. De (9.2), teríamos, então, que

$$x(t; x_0) \in U \cup V, \quad \forall t \geq T,$$

para algum T suficientemente grande. Mas x é contínuo e $[T, +\infty)$ é conexo, logo $x([T, +\infty); x_0) \subset U \cup V$ seria conexo, logo $x([T, +\infty); x_0)$ estaria todo contido ou em U ou em V . Se ele estivesse contido todo em U , então V não poderia conter pontos limites de x_0 e vice-versa, o que é uma contradição. Logo, $\omega(x_0)$ é conexo. \square

Podemos estender o resultado do Teorema 9.12 para certos casos em que \mathcal{U} é fechado. Nesses casos, é melhor trabalharmos em um plano um pouco mais abstrato e considerar o sistema dinâmico gerado por $x' = f(x)$ em \mathcal{U} , se esse for o caso:

Teorema 9.13. *Seja M um espaço métrico completo e seja $\{S(t)\}_t$ um semigrupo em M . Se $x_0 \in M$ é tal que $\gamma^+(x_0)$ é precompacto em M , então $\omega(x_0)$ é não-vazio, compacto, invariante e conexo.*

\square

Exemplo 9.14. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = y(1 + x^2), \\ y' = (x - \varepsilon y)(y^2 - 1), \end{cases}$$

com $\varepsilon > 0$. Se (x_0, y_0) é tal que $|y_0| < 1$ e $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, então $I_m(x_0, y_0) = \mathbb{R}$ e $\omega(x_0) = \{(0, y); y = \pm 1\}$ é não-vazio, mas não é compacto, nem invariante (apenas fracamente invariante), nem atrai a órbita de x_0 no sentido de (9.2) e é desconexo.

Problemas

- 9.1 Suponha que uma equação $x' = f(x)$, $f \in \text{Lip}_{loc, x}(\mathbb{R}^m)$, gera um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em \mathbb{R}^m . Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que X é (i) positivamente invariante se e somente se $S(t)X \subset X$, $\forall t \geq 0$; (ii) negativamente invariante se e somente se $X \subset S(t)X$, $\forall t \geq 0$; e (iii) invariante se e somente se $S(t)X = X$, $\forall t \geq 0$.
- 9.2 Considere um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ definido em um subconjunto fechado $M \subset \mathbb{R}^m$. Um ponto $x \in M$ é dito *errante* se, para qualquer vizinhança $U \subset M$ de x , existe uma seqüência positiva $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $S(t_n)U \cap U \neq \emptyset$. Mostre que se $\omega(x_0) \neq \emptyset$, para $x_0 \in M$, então qualquer $x \in \omega(x_0)$ é errante.
- 9.3 Considere um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ definido em um subconjunto fechado $M \subset \mathbb{R}^m$. Uma órbita γ de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é dita *recorrente* se $\gamma \subset \omega(\gamma)$. Mostre, através de exemplos, que a inclusão $\gamma \subset \omega(\gamma)$ pode ser estrita e que nem todas as órbitas de um conjunto ω -limite são, necessariamente, órbitas recorrentes.

10. ESTABILIDADE DE PONTOS FIXOS VIA LINEARIZAÇÃO

Estabilidade e instabilidade em sistemas lineares autônomos e não-autônomos. Estabilidade e instabilidade de pontos fixos em sistemas não-lineares via linearização. Teorema de Hartman-Grobman. [9, 8]

10.1. Estabilidade em sistemas lineares autônomos homogêneos.

Teorema 10.1. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tal que*

$$\operatorname{Re} \lambda < -a, \quad \forall \lambda \in \sigma(A),$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Então, existe $K \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq K e^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

Dem.: Basta obter o resultado para cada bloco de Jordan real do operador A . Seja $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a forma canônica de Jordan real do operador A e seja $|\cdot|_\gamma$ uma norma qualquer em \mathbb{R}^m . Seja $B_j \in \mathbb{R}^{m_j \times m_j}$ um bloco de Jordan real $m_j \times m_j$ de A . Denotamos por $|\cdot|_\gamma$ também a norma $|\cdot|_\gamma$ em \mathbb{R}^m restrita a um subespaço $m_j \times m_j$ de \mathbb{R}^m e por $\|\cdot\|_\gamma$ a norma de operadores correspondente. Se $B_j = [\lambda_j]$, é óbvio que $\lambda_j < -a$ e

$$\|e^{tB_j}\|_\gamma = e^{\lambda_j t} \leq e^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

Se

$$B_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix},$$

então $\alpha_j < -a$ e

$$e^{tB_j} = e^{\alpha_j t} \begin{bmatrix} \cos \beta_j t & -\operatorname{sen} \beta_j t \\ \operatorname{sen} \beta_j t & \cos \beta_j t \end{bmatrix},$$

logo

$$\|e^{tB_j}\|_\gamma \leq C_1 e^{\alpha_j t} \leq C_1 e^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

para algum $C_1 > 0$.

Se

$$B_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & & & & \\ 1 & \lambda_j & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda_j \end{bmatrix},$$

então $\lambda_j < -a$ e

$$e^{tB_j} = e^{\lambda_j t} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ t & 1 & & & \\ t^2/2 & t & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ t^{m_j-1}/(m_j-1)! & \cdots & t^2/2 & t & 1 \end{bmatrix},$$

logo

$$\|e^{tB_j}\|_\gamma \leq C_2 \left(1 + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}\right) e^{\lambda_j t} \leq C_2 \left(1 + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}\right) e^{(\lambda_j+a)t} e^{-at} \leq C_3 e^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

O caso de um bloco de Jordan com uma parte nilpotente associada a um autovalor complexo é uma combinação dos dois últimos casos e a estimativa é similar a esse último. A combinação de todos esses resultados completa a demonstração do teorema. \square

O nosso interesse maior está no caso em que todos os autovalores de A têm parte real negativa, nesse caso podemos tomar a negativo no Teorema 10.1 acima e obter o decaimento exponencial das soluções. Apenas para explicitar esse decaimento é que tomamos $-a$ como cota superior para a parte real dos autovalores de A . E por esse mesmo motivo enunciamos o seguinte corolário:

Corolário 10.2. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tal que todos os seus autovalores têm parte real negativa. Então as soluções de $x' = Ax$ convergem exponencialmente para a origem. Mais precisamente,*

$$\|e^{tA}\| \leq K_a e^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

onde $a > 0$ é tal que $\operatorname{Re} \lambda < -a < 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$ e $K_a \geq 1$ depende de a .

Observação 10.3. *Seja $\lambda^+ = \max\{\operatorname{Re} \lambda; \lambda \in \sigma(A)\}$. Em geral, quando $-a \searrow \lambda^+$, temos que K_a no Corolário 10.2 vai para $+\infty$. Porém, se todos os autovalores de A com parte real igual a λ^+ são semi-simples, então K_a fica limitado e obtemos $\|e^{tA}\| \leq K e^{\lambda^+ t}$, para todo $t \geq 0$.*

É possível modificar a norma em \mathbb{R}^m para obtermos o resultado do Teorema 10.1 com $K = 1$, o que é útil, por exemplo, na demonstração do Teorema de Hartman-Grobman, que veremos posteriormente.

Teorema 10.4. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tal que*

$$\operatorname{Re} \lambda < -a, \quad \forall \lambda \in \sigma(A),$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Então, existe uma norma $|\cdot|_\nu$ em \mathbb{R}^m cuja norma de operadores correspondente é tal que

$$\|e^{tA}\|_\nu \leq e^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

Dem.: Dada uma norma $|\cdot|$ em \mathbb{R}^m arbitrária, defina

$$|x|_\nu = \sup_{\tau \geq 0} e^{a\tau} |e^{\tau A} x|.$$

Pelo Teorema 10.1, $|\cdot|_\nu$ está bem definido e é uma norma em \mathbb{R}^m . Além disso,

$$\begin{aligned} |e^{tA} x|_\nu &= \sup_{\tau \geq 0} e^{a\tau} |e^{\tau A} e^{tA} x| = \sup_{\tau \geq 0} e^{a(\tau+t)} e^{-at} |e^{(\tau+t)A} x| \\ &= e^{-at} \sup_{\tau \geq 0} e^{a(\tau+t)} |e^{(\tau+t)A} x| = e^{-at} \sup_{s \geq t} e^{as} |e^{sA} x| \\ &\leq e^{-at} \sup_{s \geq 0} e^{as} |e^{sA} x| = e^{-at} |x|_\nu, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema. □

No resultado do Teorema 10.4, a nova norma ainda pode ser tomada como sendo proveniente de um produto interno.

Proposição 10.5. *Seja $|\cdot|$ uma norma em \mathbb{R}^m proveniente de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tal que*

$$\langle Ax, x \rangle \leq -a|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Então

$$\|e^{tA}\| \leq e^{-at}, \quad \forall t \geq 0,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma de operadores associada a $|\cdot|$.

Dem.: Temos

$$\frac{d}{dt} |e^{tA} x|^2 = 2 \left\langle \frac{d}{dt} e^{tA} x, e^{tA} x \right\rangle = 2 \langle A e^{tA} x, e^{tA} x \rangle \leq -2a |e^{tA} x|^2.$$

Logo,

$$|e^{tA} x|^2 \leq e^{-2at} |x|^2, \quad \forall t \geq 0,$$

o que implica em

$$\|e^{tA}\| \leq e^{-at}, \quad \forall t \geq 0. \quad \square$$

Teorema 10.6. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tal que*

$$\operatorname{Re} \lambda < -a, \quad \forall \lambda \in \sigma(A),$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Então, existe uma norma $|\cdot|_\mu$ em \mathbb{R}^m associada a um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que

$$\langle Ax, x \rangle \leq -a|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

e cuja norma de operadores correspondente é tal que

$$\|e^{tA}\|_\mu \leq e^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

Dem.: Seja B a forma canônica de Jordan real de A associada a uma base γ . Seja $\varepsilon > 0$. A cada bloco de Jordan $B_j \in \mathbb{R}^{m_j \times m_j}$ da forma

$$B_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & & & & \\ 1 & \lambda_j & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda_j \end{bmatrix},$$

considere a matriz inversível

$$P_{j,\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{m_j-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

e para cada bloco de Jordan $B'_j \in \mathbb{R}^{2m_j \times 2m_j}$ da forma

$$B'_j = \begin{bmatrix} C_j & & & & \\ I_2 & C_j & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & I_2 & C_j \end{bmatrix},$$

onde

$$C_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

considere a matriz inversível

$$P'_{j,\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{m_j-1} I_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon I_2 & & \\ & & & & I_2 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que

$$P_{j,\varepsilon}^{-1} B_j P_{j,\varepsilon} = \begin{bmatrix} \lambda_j & & & & \\ \varepsilon & \lambda_j & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \varepsilon & \lambda_j \end{bmatrix},$$

e que

$$P'_{j,\varepsilon}{}^{-1} B'_j P'_{j,\varepsilon} = \begin{bmatrix} C_j & & & & \\ \varepsilon I_2 & C_j & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \varepsilon I_2 & C_j \end{bmatrix},$$

O produto direto dos $P_{j,\varepsilon}$ e $P'_{j,\varepsilon}$ na ordem apropriada “leva” a base γ em uma nova base $\gamma_\varepsilon = \{\gamma_{1,\varepsilon}, \dots, \gamma_{m,\varepsilon}\}$. Considere o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$ definido por sua ação nos elementos da base γ_ε :

$$\langle \gamma_{i,\varepsilon}, \gamma_{k,\varepsilon} \rangle_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Se $\{\gamma_{1,\varepsilon}^j, \dots, \gamma_{m_j,\varepsilon}^j\}$ são os elementos dessa base associados ao bloco $P_{j,\varepsilon}^{-1} B_j P_{j,\varepsilon}$, então é fácil ver que

$$\begin{aligned} A\gamma_{m_j,\varepsilon}^j &= \lambda_j \gamma_{m_j,\varepsilon}^j, \\ A\gamma_{i,\varepsilon}^j &= \lambda_j \gamma_{i,\varepsilon}^j + \varepsilon \beta_{i+1,\varepsilon}^j, \quad i = 1, \dots, m_j - 1. \end{aligned}$$

Logo, se $y = \sum c_i \gamma_{i,\varepsilon}^j$, então

$$\begin{aligned} \langle Ay, y \rangle_\varepsilon &= \lambda_j \sum_{i=1}^{m_j} c_i^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^{m_j-1} c_i c_{i+1} \\ &\leq \lambda_j |y|_\varepsilon^2 + \varepsilon |y|_\varepsilon^2 = (\lambda_j + \varepsilon) |y|_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Como $\lambda_j < -a$, segue que para ε suficientemente pequeno,

$$\langle Ay, y \rangle_\varepsilon \leq -a |y|_\varepsilon^2.$$

Analogamente, podemos obter a mesma estimativa para o bloco proveniente de B'_j , de forma que para ε suficientemente pequeno, temos

$$\langle Ax, x \rangle_\varepsilon \leq -a |x|_\varepsilon^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Isso prova a primeira parte do teorema; a segunda decorre da Proposição 10.5. \square

Podemos inverter o tempo e obter o seguinte resultado:

Teorema 10.7. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tal que*

$$\operatorname{Re} \lambda > b, \quad \forall \lambda \in \sigma(A),$$

onde $b \in \mathbb{R}$. Então, existe $K \geq 1$ tal que

$$|e^{tA} x| \geq K^{-1} e^{bt} |x|, \quad \forall t \geq 0.$$

Além disso, existe uma norma $|\cdot|_\mu$ em \mathbb{R}^m proveniente de um produto interno tal que

$$|e^{tA} x|_\mu \geq e^{bt} |x|_\mu, \quad \forall t \geq 0.$$

Dem.: Como $\sigma(-A) = -\sigma(A)$, temos

$$\operatorname{Re} \lambda < -b, \quad \forall \lambda \in \sigma(-A).$$

Logo, para $t \geq 0$, temos

$$|x| = |e^{-tA} e^{tA} x| \leq |e^{t(-A)} e^{tA} x| \leq K e^{-bt} |e^{tA} x|,$$

de modo que

$$|e^{tA} x| \geq K^{-1} e^{bt} |x|, \quad \forall t \geq 0.$$

Analogamente para a existência do produto interno. \square

Corolário 10.8. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tal que todos os seus autovalores têm parte real positiva. Então as soluções de $x' = Ax$ se afastam exponencialmente da origem. Mais precisamente,*

$$\|e^{tA} x\| \geq K_b^{-1} e^{bt} |x|, \quad \forall t \geq 0.$$

onde $b > 0$ é tal que $\Re \lambda > b > 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$ e $K_b \geq 1$ depende de b .

Definição 10.9. *Um operador $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ é dito hiperbólico se nenhum autovalor de A tem parte real nula.*

O próximo resultado segue dos resultados acima.

Teorema 10.10. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ hiperbólico com autovalores com parte real positiva e autovalores com parte real negativa. Então existem subespaços E^s e E^u invariantes por A e uma norma $|\cdot|_\mu$ proveniente de um produto interno, tal que*

$$\begin{aligned} |e^{tA}x|_\mu &\leq e^{-at}|x|_\mu, & \forall t \geq 0, \forall x \in E^s, \\ |e^{tA}x|_\mu &\geq e^{bt}|x|_\mu, & \forall t \geq 0, \forall x \in E^u, \end{aligned}$$

onde $a, b > 0$.

□

Definição 10.11. *O subespaço E^s do Teorema 10.10 é chamado de variedade linear estável e o subespaço E^u , de variedade linear instável.*

Observação 10.12. *Os resultados acima justificam a classificação dada na subseção 7.2: i) se todos os autovalores de A têm parte real negativa, então as soluções de $x' = Ax$ se aproximam exponencialmente da origem, que é dita um ponto fixo atrator; ii) se todos os autovalores de A têm parte real positiva, então as soluções de $x' = Ax$ se afastam exponencialmente da origem, que é dita um ponto fixo repulsor; iii) se alguns autovalores de A têm parte real positiva, outros, negativa, e nenhum tem parte real nula, então a origem é um ponto fixo de sela.*

10.2. Estabilidade em sistemas lineares não-autônomos homogêneos. No caso de uma equação da forma $x' = A(t)x$, a análise é mais delicada. Por exemplo, para que todas as soluções converjam para a origem, não basta que para cada $t \in \mathbb{R}$, todos os autovalores de $A(t)$ tenham parte real negativa. De fato, considere

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{bmatrix}.$$

Seus autovalores são

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4},$$

independentes de t e com parte real negativa. Porém,

$$x(t) = e^{t/2} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

é solução e se afasta exponencialmente da origem.

A explicação para o fenômeno acima é que o operador $P = P(t)$ que leva $A(t)$ na sua forma canônica de Jordan real é tal que $P(t)$ leva uma circunferência em uma elipse cujos semieixos giram com t . Um gráfico do campo de vetores ao longo dessas elipses explica o porquê do crescimento da solução, pois certos vetores, apesar de apontarem para dentro da elipse, apontam para longe da origem.

Note, ainda, que, no exemplo acima,

$$\text{tr } A(t) = -\frac{1}{2},$$

de modo que os volumes bidimensionais (áreas) decrescem, o que não é suficiente para garantir o decaimento das soluções. Para garantir o decaimento, precisamos, também, que volumes unidimensionais (comprimentos) também decaiam. No caso m -dimensional, precisamos que todos os volumes k -dimensionais, $k = 1, \dots, m$, decresçam. Isso nos leva aos expoentes e multiplicadores de Lyapunov, que também são úteis no caso não-linear. No caso particular de uma matriz periódica, temos os expoentes e multiplicadores de Floquet ou característicos.

10.3. Estabilidade em sistemas não-lineares. Considere um sistema não-linear autônomo

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

onde $f \in \text{Lip}_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e seja $\bar{x} \in \mathcal{U}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Então $x(t) \equiv \bar{x}$ é solução de $x' = f(x)$ com $x(0) = \bar{x}$. Essa solução é dita *solução estacionária* e \bar{x} é dito um *ponto fixo* da equação $x' = f(x)$. O ponto \bar{x} é também dito uma *singularidade* de f . Estamos interessados em saber o que acontece com a solução quando x_0 está próximo de \bar{x} , se as soluções continuam próximas de \bar{x} , se elas convergem para \bar{x} , se elas se afastam de \bar{x} , ou se todas essas situações ocorrem, dependendo de x_0 . Temos, nessa direção, as seguintes definições:

Definição 10.13. Um ponto fixo \bar{x} é dito Lyapunov-estável ou estável no sentido de Lyapunov se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x_0 - \bar{x}| \leq \delta$, então $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ e $|x(t; x_0) - \bar{x}| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Definição 10.14. Um ponto fixo \bar{x} é dito assintoticamente estável quando é Lyapunov-estável e existe $\delta > 0$ tal que se $|x_0 - \bar{x}| \leq \delta$, então $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ e

$$x(t; x_0) \rightarrow \bar{x}, \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Definição 10.15. Um ponto fixo \bar{x} é dito instável quando não é Lyapunov-estável.

Exemplo 10.16. Considere um sistema linear bidimensional. Se a origem é um centro, então ela é um ponto fixo Lyapunov-estável mas não é assintoticamente estável. Se a origem é um atrator, então ela é assintoticamente estável. Se ela é um ponto de sela ou um repulsor, então ela é instável.

Observação 10.17. É possível termos um ponto fixo que não seja Lyapunov-estável, mas tal que todas as soluções $x(t; x_0)$ com x_0 em uma certa vizinhança de \bar{x} sejam tais que $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ e $x(t; x_0) \rightarrow \bar{x}$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Quando f é diferenciável em \bar{x} e $Df(\bar{x})$ é hiperbólico, podemos inferir a estabilidade de \bar{x} a partir da equação linearizada

$$y' = Df(\bar{x})y,$$

que é uma equação linear autônoma $y' = Ay$ com $A = Df(\bar{x})$. A idéia é que fazendo $x = \bar{x} + y$, temos, expandindo f em torno de \bar{x} ,

$$y' = x' = f(x) = f(\bar{x} + y) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})y + O(|y|^2) \approx Df(\bar{x})y,$$

enquanto y for pequeno.

Teorema 10.18 (Princípio da Estabilidade via Linearização). Seja $f \in \text{Lip}_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e seja $\bar{x} \in \mathcal{U}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Suponha que f seja diferenciável em \bar{x} com todos os autovalores de $Df(\bar{x})$ com parte real negativa. Então \bar{x} é assintoticamente estável.

Dem.: Seja

$$r(y) = f(\bar{x} + y) - Df(\bar{x})y.$$

Como f é diferenciável em \bar{x} e $f(\bar{x}) = 0$, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{r(y)}{|y|} \leq \varepsilon, \quad \forall y \neq 0, |y| < \delta.$$

Seja $A = Df(\bar{x})$. Como todos os autovalores de $A = Df(\bar{x})$ tem parte real negativa, segue do Teorema 10.1 que

$$\|e^{tA}\| \leq Ke^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

para algum $a > 0$ e algum $K \geq 1$.

Seja $x_0 \in \mathcal{U}$, $x_0 \neq \bar{x}$, com

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta/K \leq \delta$$

e seja

$$y(t) = x(t; x_0) - \bar{x}, \quad \forall t \in I_m(x_0).$$

Então

$$y' = Df(\bar{x})y + r(y),$$

ou,

$$y' = Ay + b(t),$$

onde $A = Df(\bar{x})$ e $b(t) = r(y(t))$. Logo, pela fórmula de variação de constantes, temos

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s) ds, \quad \forall t \in I_m(x_0).$$

Seja $I = \{t \in I_m^+(x_0); |y(t)| < \delta\}$. Por continuidade, temos que I é não-vazio, pois $|y(0)| = |x_0 - \bar{x}| < \delta/K \leq \delta$. Com isso,

$$|y(t)| \leq Ke^{-at}|y(0)| + \int_0^t Ke^{-a(t-s)}|r(y(s))| ds \leq Ke^{-at} + \varepsilon K \int_0^t e^{-a(t-s)}|y(s)| ds, \quad \forall t \in I.$$

Seja $\varphi(t) = e^{at}|y(t)|$, então

$$\varphi(t) \leq K\varphi(0) + \varepsilon K \int_0^t \varphi(s) ds, \quad \forall t \in I.$$

Pelo Lema de Gronwall, deduzimos que

$$\varphi(t) \leq K\varphi(0)e^{\varepsilon Kt}, \quad \forall t \in I.$$

Logo,

$$|y(t)| \leq K|y(0)|e^{-(a-\varepsilon K)t}, \quad \forall t \in I.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $a - \varepsilon K > 0$, obtemos

$$|y(t)| < \delta, \quad \forall t \in I.$$

Por continuidade, isso mostra que $I = I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ e que

$$|x(t; x_0) - x_0| = |y(t)| \leq K|x_0 - \bar{x}|e^{-(a-\varepsilon K)t} < \delta, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

e

$$|x(t; x_0) - x_0| = |y(t)| \leq K|x_0 - \bar{x}|e^{-(a-\varepsilon K)t} \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty,$$

o que demonstra o teorema. □

Exemplo 10.19. Considere a equação do pêndulo com atrito:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen} x - ky, \end{cases}$$

onde $k > 0$. A origem, $(0, 0)$ é um ponto fixo e os autovalores de $Df(0, 0)$ são

$$\lambda_{\pm} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Logo, $Df(0, 0)$ tem autovalores complexos conjugados com a parte real negativa, se $0 < k < 2$, tem um autovalor duplo negativo igual -1 , se $k = 2$, e tem dois autovalores negativos distintos, se $k > 2$. Portanto, a origem é assintoticamente estável para qualquer $k > 0$.

Teorema 10.20. Seja $f \in Lip_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e seja $\bar{x} \in \mathcal{U}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Suponha que f seja diferenciável em \bar{x} com pelo menos um autovalor de $Df(\bar{x})$ com parte real positiva. Então \bar{x} é instável. Mais precisamente, existem soluções $x(t)$ definidas, pelo menos, em $(-\infty, 0]$ tais que $x(t) \rightarrow \bar{x}$ quando $t \rightarrow -\infty$.

Dem.: Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\bar{x} = 0$, basta, para isso, considerarmos o sistema $y' = g(y)$ com $g(y) = f(\bar{x} + y)$ de modo que uma solução x de $x' = f(x)$ está relacionado com uma solução y de $y' = g(y)$ através de $x = \bar{x} + y$.

Seja $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^m$ uma decomposição de \mathbb{R}^m em subespaços invariantes de $Df(0)$ tais que todos os autovalores de $Df(0)|_{E_1}$ têm parte real positiva e todos os autovalores de $Df(0)|_{E_2}$ têm parte real não-positiva. Sejam $A = Df(0)|_{E_1}$ e $B = Df(0)|_{E_2}$. Pelo Teorema 10.6, podemos achar $a > b, a > 0$ e um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associada a uma norma $|\cdot|$ tais que

$$\begin{aligned} \langle Ax_1, x_1 \rangle &\geq a|x_1|^2, & \forall x_1 \in E_1, \\ \langle Ax_2, x_2 \rangle &\leq b|x_2|^2, & \forall x_2 \in E_2, \end{aligned}$$

e tal que os subespaços E_1 e E_2 são ortogonais em relação a esse produto interno.

Escreva $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ de acordo com a decomposição $\mathbb{R}^m = E_1 \oplus E_2$ e sejam $r_1(x)$ e $r_2(x)$ os restos dados por

$$f_1(x) = f_1(x_1 + x_2) = Ax_1 + r_1(x), \quad \text{e} \quad f_2(x) = f_2(x_1 + x_2) = Bx_2 + r_2(x).$$

Como f é diferenciável em $\bar{x} = 0$, temos que para $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que

$$|r_1(x)|, |r_2(x)| \leq \varepsilon|x|, \quad \forall x, |x| \leq \delta.$$

Considere o cone

$$C = \{x \in \mathcal{U}; x = x_1 + x_2, |x_2| \leq |x_1|, |x| \leq \delta\}$$

Note que, em C , temos

$$|x_1|^2 \leq |x|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq |x_1|^2 + |x_1|^2 = 2|x_1|^2.$$

Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos que se $x = x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ é solução de $x' = f(x)$ em C para t em um intervalo I , então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|x_2|^2 - |x_1|^2) \leq 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|x_2|^2 - |x_1|^2) &= \langle f_2(x), x_2 \rangle - \langle f_1(x), x_1 \rangle \\ &= \langle Bx_2, x_2 \rangle + \langle r_2(x), x_2 \rangle - \langle Ax_1, x_1 \rangle - \langle r_1(x), x_1 \rangle \\ &\leq b|x_2|^2 + \varepsilon|x||x_2| - a|x_1|^2 + \varepsilon|x||x_1| \\ &\leq b|x_1|^2 + 2\sqrt{2}\varepsilon|x_1|^2 - a|x_1|^2 \\ &= -(a - b - 2\sqrt{2}\varepsilon)|x_1|^2 \leq 0; \end{aligned}$$

basta, então, que ε seja suficientemente pequeno para que

$$a - b - \sqrt{2}\varepsilon > 0.$$

Com isso, a solução $x(t)$ só pode sair de C pelos “lados”, *i.e.*, quando $|x(t)| = \delta$. Vamos, de fato, mostrar que qualquer solução em C sai de C em tempo finito, com $|x(t)| = \delta$ para algum $t \geq 0$, o que implica em $\bar{x} = 0$ ser instável. Para tanto, observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x_1|^2 &= \langle f_1(x), x_1 \rangle \\ &= \langle Ax_1, x_1 \rangle + \langle r_1(x), x_1 \rangle \\ &\geq a|x_1|^2 - \varepsilon|x||x_1| \\ &\geq (a - \sqrt{2}\varepsilon)|x_1|^2, \end{aligned}$$

com $a - \sqrt{2}\varepsilon > 0$. Logo, $|x| \geq |x_1|$ cresce exponencialmente até alcançar o bordo de C em tempo finito e, em seguida, sair de C pelos “lados”.

Para obtermos soluções que convergem para $\bar{x} = 0$ quando t vai para $-\infty$, considere uma sequência $x_n \rightarrow 0$ em C . Como $x_n \in C$, segue do que foi feito acima que a solução $x(t; x_n)$ alcança o bordo de C em algum ponto $x(T_n; x_n)$ com $|x(T_n; x_n)| = \delta$, em algum instante $T_n \geq 0$. Como f é Lipschitz em C , com constante de Lipschitz L , digamos, então

$$|x(t; x_n)| \leq |x_n|e^{Lt}, \forall t \geq 0.$$

Tomando $t = T_n$ acima, e levando em consideração que $x_n \rightarrow 0$, vemos que

$$e^{LT_n} \geq \frac{\delta}{|x_n|} \rightarrow +\infty,$$

logo $T_n \rightarrow +\infty$.

Considere, agora, os pontos $x_{0,n} = x(T_n; x_n)$ como condições iniciais e considere as soluções correspondentes $x(t; x_{0,n}) = x(t + T_n; x_n)$, que estão definidas e em C em, pelo menos, $[-T_n; 0]$, respectivamente. Para cada intervalo $[-N, 0]$, a sequência $\{x(\cdot; x_{0,n})\}_n$, para n suficientemente grande, é limitada uniformemente, pois está toda em C , e é equicontínua, o que segue da equação diferencial. Pelo Teorema de Arzela-Ascoli e por um argumento de diagonalização, existe uma subseqüência $\{n'\}$ tal que o limite

$$\lim_{n'} x(t; x_{0,n}) = x(t; x_0)$$

existe para todo $t \leq 0$ e é uniforme em cada subintervalo compacto de \mathbb{R}^- , com $x_0 \in C$, $|x_0| = \delta$ e $I_m^-(x_0) = \mathbb{R}^-$.

Com isso, escrevendo $x(t; x_0) = x_1(t) + x_2(t)$ como acima, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x_1|^2 \geq (a - \sqrt{2}\varepsilon) |x_1|^2,$$

com $a - \sqrt{2}\varepsilon > 0$. Portanto,

$$\frac{d}{dt} (|x_1|^2 e^{-at}) \geq 0,$$

e, para $t \leq 0$,

$$|x_1(0)|^2 - |x_1(t)|^2 e^{-at} \geq 0,$$

logo,

$$|x_1(t)|^2 \leq |x_1(0)|^2 e^{at} \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}} e^{at} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Como $x(t; x_0) \in C$, segue, também, que $x_2(t) \rightarrow 0$, logo $x(t; x_0) \rightarrow \bar{x} = 0$ quando $t \rightarrow 0$. \square

Observação 10.21. No Teorema 10.20 se $Df(\bar{x})$ tem, também, autovalores com parte real positiva, então pode-se mostrar que há soluções convergindo para \bar{x} quando $t \rightarrow +\infty$. Isso pode ser demonstrado facilmente revertendo-se o tempo ou adaptando-se o argumento da demonstração acima como pedido no Problema 10.2. Veja, também, o Problema 10.3.

Observação 10.22. Adaptando-se a demonstração do Teorema 10.20, pode-se mostrar que o conjunto dos pontos x_0 na vizinhança de raio δ da origem que se “afastam” da origem, ou, mais precisamente, convergem para a origem quanto $t \rightarrow -\infty$, forma uma variedade \mathcal{M} de dimensão igual a da variedade instável linear de $Df(\bar{x})$. Essa variedade \mathcal{M} leva o nome de variedade instável local do ponto fixo \bar{x} , e é denotada $\mathcal{W}_{\text{loc}}^u(\bar{x})$ (ela depende de δ , mas isso não é normalmente ressaltado). Essa variedade pode ser escrita com o gráfico de uma função Ψ definida em uma vizinhança da origem em E_1 , com valores em E_2 . Uma maneira de provar isso é iniciar com um gráfico Ψ_0 Lipschitz contínuo no cone C e considerar a evolução de cada ponto $x_1 + \Psi_0(x_1)$. Em cada instante $t > 0$, teremos um novo gráfico $x_1 + \Psi_t(x_1)$ em C , com Ψ_t Lipschitz contínuo. Pode-se, então, mostrar que Ψ_t converge para uma função Lipschitz contínua Ψ em C , tal que a variedade $x_1 + \Psi(x)$ é invariante e as suas órbitas são provenientes do ponto fixo \bar{x} . Da regularidade de f , pode-se mostrar que Ψ é, também, de classe C^1 . Este é o chamado método geométrico de Hadamard. Analogamente, pode-se obter a variedade local estável $\mathcal{W}_{\text{loc}}^s(\bar{x})$ de \bar{x} , que é um gráfico Φ de E_2 em E_1 . Há várias outras demonstrações para a existência dessas e de outras variedades locais.

Definição 10.23. Um ponto fixo \bar{x} tal que $Df(\bar{x})$ é hiperbólico é dito um ponto fixo hiperbólico.

Teorema 10.24 (Hartman-Grobman). *Seja $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e seja $\bar{x} \in \mathcal{U}$ um ponto fixo hiperbólico de $x' = f(x)$. Então há uma vizinhança V_1 de \bar{x} , uma vizinhança V_0 da origem e um homeomorfismo $h : V_0 \rightarrow V_1$ tal que*

$$x(t; h(y_0)) = h(y(t; y_0)),$$

para todo $y_0 \in V_0$ e para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $x(s; h(y_0)) \in V_1$ para s entre 0 e t , onde $y(t; y_0)$ é a solução do problema linear $y' = Df(\bar{x})y$, $y(0) = y_0$.

Dem.: Sem perda de generalidade, vamos supor que $\bar{x} = 0$. Seja $r(y) = f(\bar{x} + y) - Df(\bar{x})y$. Como f é de classe \mathcal{C}^1 , temos que

$$\frac{|r(y) - r(z)|}{|y - z|} \leq \|Df(\bar{x} + \xi) - Df(\bar{x})\| \rightarrow 0,$$

quando $y, z \rightarrow 0$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|y|, |z| < \delta$,

$$|r(y) - r(z)| \leq \varepsilon|y - z|.$$

Dado $T > 0$, podemos tomar δ suficientemente pequeno tal que as soluções $x(t; x_0)$ com $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ estão definidas até o tempo $t = T$. O valor de T será determinado posteriormente. Defina $X(x_0) = x(T; x_0)$. Defina, ainda, $Y(y_0) = y(T; y_0) = e^{TDf(\bar{x})}y_0$, cujas soluções são globais visto que o sistemas em y é linear.

Vamos mostrar primeiro que existe $h : V_0 \rightarrow V_1$ tal que

$$X \circ h = h \circ Y.$$

Da fórmula de variação de constantes, podemos escrever

$$X(u_0) = Y(u_0) + N(u_0),$$

onde

$$N(u_0) = \int_0^T e^{(T-s)Df(\bar{x})} r(x(s; x_0)) ds.$$

Logo, precisamos mostrar que

$$Y \circ h + N \circ h = h \circ Y.$$

Vamos procurar h da forma $h = I + g$, com $g(0) = 0$ e onde I é a identidade em \mathbb{R}^m . Nesse caso, como Y é linear,

$$Y \circ g + N \circ (I + g) = g \circ Y.$$

Vamos, agora, usar o fato de que $Df(\bar{x})$ é hiperbólico para decompor $\mathbb{R}^m = E_1 \oplus E_2$, em subespaços espectrais de $Df(\bar{x})$, com todos os autovalores de $Df(\bar{x})|_{E_1}$ tendo parte real positiva e todos os autovalores de $Df(\bar{x})|_{E_2}$ tendo parte real negativa. Seja $Y = Y_1 + Y_2$, $g = g_1 + g_2$, $N = N_1 + N_2$ de acordo com essa decomposição. Podemos, assim, reescrever a equação acima na forma de sistema

$$\begin{cases} Y_1 \circ g_1 + N_1 \circ (I + g) = g_1 \circ Y, \\ Y_2 \circ g_2 + N_2 \circ (I + g) = g_2 \circ Y. \end{cases}$$

Usando o fato de que Y é inversível, podemos rescrever o sistema acima na forma de ponto fixo:

$$\begin{cases} g_1 = Y_1^{-1} \circ g_1 \circ Y - Y_1^{-1} \circ N_1 \circ (I + g), \\ g_2 = Y_2 \circ g_2 \circ Y^{-1} + N_2 \circ (I + g) \circ Y^{-1}. \end{cases}$$

Vamos resolver esse sistema usando o Teorema do Ponto Fixo. Sejam V_η e V_δ bolas centradas na origem e de raio η e δ , respectivamente. Como espaço de funções para g , seja

$$\mathcal{G} = \{g \in \mathcal{C}(V_\eta, V_\delta); g(0) = \bar{x} = 0\}.$$

munido da métrica herdada pela norma do sup em V_δ :

$$d_{\mathcal{G}}(g, \tilde{g}) = \sup_{y \in V_\delta} |g(y) - \tilde{g}(y)|.$$

Com essa métrica, \mathcal{G} é completo. Seja \mathcal{T} um operador definido em \mathcal{G} por

$$\begin{cases} \mathcal{T}_1(g) = Y_1^{-1} \circ g_1 \circ Y - Y_1^{-1} \circ N_1 \circ (I + g), \\ \mathcal{T}_2(g) = Y_2 \circ g_2 \circ Y^{-1} + N_2 \circ (I + g) \circ Y^{-1}. \end{cases}$$

Observe, primeiramente, que

$$\mathcal{T}(g)(0) = 0.$$

Pelos Teoremas 10.1 e 10.7 existe um tempo T suficientemente grande tal que $\|Y_1^{-1}\| = \beta < 1$ and $\|Y_2\| = \alpha < 1$ e tais que $\alpha\rho_1 + \beta\rho_2 < 1$, onde ρ_i é a norma da projeção de \mathbb{R}^m em E_i , $i = 1, 2$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_1(g)(y)\| &\leq \beta\rho_1\delta + \beta\rho_1\epsilon(\eta + \delta), \\ \|\mathcal{T}_2(g)(y)\| &\leq \alpha\rho_2\delta + \rho_2\epsilon(\zeta\eta + \delta), \end{aligned}$$

onde $\zeta = \|Y\|$. Escolhendo ϵ suficientemente pequeno, temos $\|\mathcal{T}(g)(y)\| < \delta$, logo $\mathcal{T}(g) \in \mathcal{G}$.

Se $g, \tilde{g} \in \mathcal{G}$, então de maneira similar obtemos

$$d_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}(g), \mathcal{T}(\tilde{g})) \leq (\rho_1\alpha + \rho_2\beta + (\beta\rho_1 + \rho_2)\epsilon)d_{\mathcal{G}}(g, \tilde{g}).$$

Escolhendo ϵ suficientemente pequeno, temos que \mathcal{T} é uma contração estrita, logo, existe um único ponto fixo $g = \mathcal{T}(g)$.

Da mesma maneira, podemos achar um outra função $\tilde{h} = I + \tilde{g}$ tal que

$$\tilde{h} \circ X = Y \circ \tilde{h},$$

Logo as compostas $h \circ \tilde{h}$ e $\tilde{h} \circ h$ são soluções de

$$h \circ \tilde{h} \circ X = X \circ h \circ \tilde{h}, \quad Y \circ \tilde{h} \circ h = \tilde{h} \circ h \circ Y,$$

assim também como a identidade I , i.e. $I \circ X = X \circ I$ e $Y \circ I = I \circ Y$. Observe, ainda, que

$$h \circ \tilde{h} = I + g + \tilde{g} + g \circ \tilde{g}, \quad \tilde{h} \circ h = I + \tilde{g} + g + \tilde{g} \circ g.$$

Pela unicidade da perturbação da unidade, temos $g = 0$ e $\tilde{g} = 0$, logo

$$\tilde{h} \circ h = I = h \circ \tilde{h}.$$

Portanto, h é um homeomorfismo entre uma vizinhança V_0 da origem e uma vizinhança V_1 de $\bar{x} = 0$.

Defina agora $X_t = x(t; x_0)$, $|t| \leq T$ e $Y_t = y(t; y_0)$, $t \in \mathbb{R}$. Seja h_T o homeomorfismo obtido acima tal que

$$Y_T \circ h_T = h_T \circ X_T.$$

Defina

$$h = \int_0^T Y_{-s} \circ h_T \circ X_s \, ds.$$

Então, como Y_t é linear,

$$Y_t \circ h = \left(\int_0^T Y_{t-s} \circ h_T \circ X_{s-t} \, ds \right) \circ X_t.$$

Mudando variáveis para $\tau = s - t$, temos

$$\int_0^T Y_{t-s} \circ h_T \circ X_{s-t} \, ds = \int_{-t}^0 Y_{-\tau} \circ h_T \circ X_{\tau} \, d\tau + \int_0^{T-t} Y_{-\tau} \circ h_T \circ X_{\tau} \, d\tau.$$

Como $h_T = Y_{-T} \circ h_T \circ X_T$, podemos reescrever a primeira integral como

$$\int_{-t}^0 Y_{-\tau} \circ h_T \circ X_{\tau} \, d\tau = \int_{-t}^0 Y_{-T-\tau} \circ h_T \circ X_{T+\tau} \, d\tau = \int_{T-t}^0 Y_{-\tau} \circ h_T \circ X_T \, d\tau.$$

Logo,

$$\int_0^T Y_{t-s} \circ h_T \circ X_{s-t} \, ds = \int_0^T Y_{-s} \circ h_T \circ X_s \, ds = h.$$

Portanto,

$$Y_t \circ h = h \circ X_t,$$

para todo $|t| \leq T$. Isso, então, pode ser estendido em cada órbita $x(t; x_0)$ para todo o t em que a órbita se mantenha dentro de V_1 . \square

Observação 10.25. *Se \bar{x} é um ponto fixo não-hiperbólico, então não podemos obter tanta informação apenas via linearização. Por exemplo, se $x' = ax^2$, então a origem é um ponto fixo com $Df(0) = 0$, logo a origem é Lyapunov-estável segundo o sistema linear $y' = Df(0)y = 0$, mas para o sistema não-linear, ela pode ser tanto assintoticamente estável, se $a < 0$, quanto instável, se $a > 0$. Em geral, no caso em que \bar{x} é um ponto fixo não-hiperbólico, procuramos simplificar o sistema aproximando-o por um sistema de ordem maior, quadrática no caso acima. Isso nos leva a certas formas canônicas, chamadas de formas normais, para o estudo do sistema próximo a esses pontos fixos não-hiperbólicos.*

Problemas

- 10.1 Generalize o resultado do Problema 8.2 para o caso de uma equação $x' = Ax + b(t)$ onde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tem a origem como um ponto fixo atrator ou repulsor e $b(\cdot)$ é contínua de período T . (Sugestão: use o Teorema do Ponto Fixo de Banach.)
- 10.2 Seja $f \in \text{Lip}_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e seja $\bar{x} \in \mathcal{U}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Suponha que f seja diferenciável em \bar{x} com pelo menos um autovalor de $Df(\bar{x})$ com parte real negativa. Adapte o argumento utilizado na demonstração do Teorema 10.20 para mostrar que existem soluções $x(t)$ definidas, pelo menos, em \mathbb{R}^+ tais que $x(t) \rightarrow \bar{x}$ quando $t \rightarrow +\infty$.
- 10.3 Seja $f \in \text{Lip}_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, com $0 \in \mathcal{U}$ e $f(0) = 0$. Suponha que f seja diferenciável em $\bar{x} = 0$ com pelo menos um autovalor de $Df(0)$ com parte real positiva. Mostre que há soluções que convergem para $\bar{x} = 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ tangenciando a variedade linear estável da equação linearizada $y' = Df(0)y$. (Sugestão: Substitua o cone C da demonstração do Teorema 10.20 pelos cones $C_\mu = \{x \in \mathcal{U}; x = x_1 + x_2, |x_2| \leq \mu|x_1|, |x| \leq \delta\}$, com μ arbitrariamente pequeno, ou trabalhe com a função x_2/x_1 .)
- 10.4 Seja $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que $f(0) = 0$ e

$$Df(0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

onde $a < 0$ e $b \neq 0$. Mostre que para x_0 suficientemente próximo à origem, a solução $x(t; x_0)$ de $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, converge para a origem com uma velocidade angular cada vez mais próxima de b e a uma razão exponencial cada vez mais próxima de a . (Sugestão: use coordenadas polares.)

11. MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

Função de Lyapunov. Princípio de Invariância de LaSalle. Estabilidade de pontos fixos. Sistemas gradientes. [9, 1, 11]

11.1. Função de Lyapunov e o Princípio de Invariância de LaSalle.

Definição 11.1. *Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_{loc}(\mathcal{U})$. Seja $G \subset \mathcal{U}$ aberto. Uma função de Lyapunov para $x' = f(x)$ em G é uma função $V \in C^1(G, \mathbb{R})$ tal que*

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in G, \quad (11.1)$$

onde $\dot{V}(x)$ é a derivada de Lie $L_f V(x)$ de V em x ao longo do campo de vetores f , que é definida por

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) = \nabla V(x) \cdot f(x).$$

Observação 11.2. *Podemos interpretar $V(x)$ como sendo a energia do sistema no estado x e a condição de V ser uma função de Lyapunov como a de que a energia decresce, ou, pelo menos, não aumenta, conforme o sistema evolui.*

Proposição 11.3. *$V \in C^1(G, \mathbb{R})$ é uma função de Lyapunov para $x' = f(x)$ em G se e somente se*

$$V(x(t; x_0)) \leq V(x_0),$$

para todo $x_0 \in G$ e todo $t \in I_m^+(x_0)$ tal que $x([0, t]; x_0) \subset G$.

□

Teorema 11.4 (Princípio de Invariância de LaSalle). *Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f \in Lip_{loc}(\mathcal{U})$. Seja $V \in C^1(G, \mathbb{R})$ uma função de Lyapunov para $x' = f(x)$ em $G \subset \mathcal{U}$ aberto. Se $x_0 \in G$ é tal que $\gamma^+(x_0)$ é pré-compacto em G , então $\omega(x_0) \subset \mathcal{E}_0$, onde \mathcal{E}_0 é o subconjunto invariante maximal de $\mathcal{E} = \{x \in G; \dot{V}(x) = 0\}$.*

Dem.: Sendo $\gamma^+(x_0)$ pré-compacto em G , segue que $V(x(t; x_0))$ é limitado inferiormente (e superiormente, também). Além disso, $V(x(t; x_0))$ é monótona não-crescente, logo, existe o limite

$$l = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t; x_0)).$$

Se $w \in \omega(x_0)$, então $x(t_n; x_0) \rightarrow w$ para alguma seqüência $t_n \rightarrow +\infty$. Logo,

$$V(w) = V(\lim x(t_n; x_0)) = \lim V(x(t_n; x_0)) = l, \quad \forall w \in \omega(x_0).$$

Pela invariância de $\omega(x_0)$, segue que

$$V(x(t; w)) = l, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall w \in \omega(x_0).$$

Logo

$$\dot{V}(w) = \nabla V(w) \cdot f(w) = \frac{d}{dt} V(x(t; w)) = 0, \quad \forall w \in \omega(x_0).$$

Portanto, $\omega(x_0) \subset \mathcal{E}$. Mas $\omega(x_0)$ é invariante, logo, $\omega(x_0) \subset \mathcal{E}_0$. □

Funções de Lyapunov também são úteis para estabelecer a existência global das soluções:

Proposição 11.5. *Seja $f \in Lip_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e seja $V \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ uma função de Lyapunov para $x' = f(x)$ em \mathcal{U} . Se V é coerciva em \mathcal{U} , i.e., $V(x) \nearrow +\infty$ quando $x \rightarrow \partial\mathcal{U}$, então $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ para todo $x_0 \in \mathcal{U}$.*

A seguinte generalização do resultado anterior pode ser facilmente demonstrada:

Proposição 11.6. *Seja $f \in Lip_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e seja $V \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ uma função coerciva em \mathcal{U} . Se*

$$\dot{V}(x) \leq c_0 + c_1 V(x), \quad \forall x \in \mathcal{U},$$

onde $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, então $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ para todo $x_0 \in \mathcal{U}$.

Exemplo 11.7. Considere a equação da mola dura com atrito, $mx'' + k(x + x^3) + \alpha x' = 0$, $m, \alpha, k > 0$, que pode ser escrita na forma de um sistema:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\frac{k}{m}(x + x^3) - \alpha y. \end{cases}$$

A energia do sistema é dada por

$$E(x, y) = m\frac{y^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right).$$

Temos

$$\dot{E}(x, y) = -\alpha my^2.$$

Logo, $E(x, y)$ é uma função de Lyapunov para esse sistema, com $\mathcal{E} = \{y = 0\}$ e $\mathcal{E}_0 = \{(0, 0)\}$. Além disso, $E(x, y)$ é coerciva, logo as todas as órbitas positivas são globais e limitadas e, pelo Princípio de Invariância de LaSalle, convergem para o único ponto fixo $(0, 0)$, que forma o conjunto \mathcal{E}_0 .

11.2. Estabilidade de pontos fixos via método direto de Lyapunov. Funções de Lyapunov são úteis localmente, no estudo da estabilidade de pontos fixos.

Teorema 11.8 (Lyapunov). Seja $f \in Lip_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $V \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R})$ uma função de Lyapunov para $x' = f(x)$ em $G \subset \mathcal{U}$ aberto. Suponha que $\bar{x} \in G$ seja tal que

$$V(x) > V(\bar{x}), \quad \forall x \in G \setminus \{\bar{x}\},$$

então \bar{x} é um ponto fixo Lyapunov-estável de $x' = f(x)$. Se, além disso,

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in G \setminus \{\bar{x}\},$$

então \bar{x} é um ponto fixo assintoticamente estável.

Dem.: Como $V(x(t; \bar{x})) \leq V(\bar{x})$, $\forall t \geq 0$, e $V(x) > V(\bar{x})$ em $G \setminus \{\bar{x}\}$, temos que $x(t; \bar{x}) = \bar{x}$, $\forall t \geq 0$, logo $x(t; \bar{x}) = \bar{x}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e \bar{x} é um ponto fixo do sistema.

Seja, agora, $\varepsilon > 0$ arbitrário tal que $\overline{B_\varepsilon(\bar{x})} \subset G$. Como $\partial B_\varepsilon(\bar{x})$ é compacto, existe $\mu = \min_{y \in \partial B_\varepsilon(\bar{x})} V(y) > V(\bar{x})$. Como $V(y) < \mu$ para todo $y \in B_\delta(\bar{x})$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos, para qualquer $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$, que $V(x(t; x_0)) \leq V(x_0) < \mu$, para todo $t \in I_m^+(x_0)$, logo $x(t; x_0) \in B_\varepsilon(\bar{x})$, para todo $t \in I_m^+(x_0)$. Então $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ e $x(t; x_0) \in B_\varepsilon(\bar{x})$, para todo $t \geq 0$. Logo, \bar{x} é Lyapunov-estável.

Se $\dot{V}(x) < 0$ em $G \setminus \{\bar{x}\}$, então $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = \{\bar{x}\}$. Além disso, como acabamos de mostrar, temos $\gamma^+(x_0)$ pré-compacto em G , qualquer $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$, logo $\omega(x_0) = \{\bar{x}\}$ e $x(t; x_0) \rightarrow \bar{x}$ quando $t \rightarrow +\infty$. Logo, \bar{x} é assintoticamente estável. \square

Definição 11.9. Uma função de Lyapunov em uma vizinhança de um ponto fixo \bar{x} de um sistema $x' = f(x)$ é dita uma função de Lyapunov para \bar{x} se $V(x) > V(\bar{x})$ para todo $x \in G \setminus \{\bar{x}\}$. Se, além disso, $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in G \setminus \{\bar{x}\}$, então ela é dita uma função de Lyapunov estrita para \bar{x} .

Exemplo 11.10. Considere a equação de Van der Pol $x'' - \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$, com $\varepsilon > 0$, que pode ser escrita na forma de sistema (forma de Lienard)

$$\begin{cases} x' = y + \varepsilon\left(\frac{x^3}{3} - x\right), \\ y' = -x. \end{cases}$$

Seja $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$. Então

$$\dot{V}(x, y) = \varepsilon x^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right).$$

Na região $G = \{(x, y); x^2 + y^2 < 3\}$, temos que $V(x, y) > V(0, 0)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ e $\dot{V}(x, y) \leq 0$, logo V é uma função de Lyapunov para o ponto fixo $(0, 0)$, que é, com isso, um ponto fixo estável.

Além disso, temos $\mathcal{E} = \{(x, y) \in G; \dot{V}(x, y) = 0\} = \{(0, y); y^2 < 3\}$, e o subconjunto invariante maximal de \mathcal{E} é a origem $\mathcal{E}_0 = \{(0, 0)\}$. Como $V(x, y) < 3/2$ em G e $V(x, y) = 3/2$ no bordo de G , temos que G é invariante, logo $\omega(x, y) \subset \mathcal{E}_0$, portanto $\omega(x, y) = (0, 0)$ e $(0, 0)$ é um ponto fixo assintoticamente estável e atrai todos as órbitas em G .

11.3. Sistemas gradientes.

Definição 11.11. *Sistemas da forma*

$$x' = -\nabla V(x),$$

onde $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe \mathcal{C}^2 em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, ou simplesmente de classe \mathcal{C}^1 com ∇V localmente Lipschitz, são chamados de sistemas gradientes

Proposição 11.12. *Seja $x' = -\nabla V(x)$ um sistema gradiente. Então V é uma função de Lyapunov para $x' = -\nabla V(x)$ em \mathcal{U} e $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} = \{x; \dot{V}(x) = |\nabla V(x)|^2 = 0\} = \{x; \nabla V(x) = 0\}$ é formado pelos pontos fixos.*

Proposição 11.13. *Seja \bar{x} um ponto crítico isolado de V , i.e., $\nabla V(\bar{x}) = 0$. Então \bar{x} é um ponto fixo assintoticamente estável de $x' = -\nabla V(x)$ se e somente se \bar{x} é um ponto de mínimo local de V .*

Observação 11.14. *Sistemas gradientes não possuem órbitas periódicas nem órbitas homoclínicas, mas podem possuir órbitas heteroclínicas. Além disso, no estudo via linearização de um ponto fixo \bar{x} de um sistema $x' = f(x)$, estudamos o sistema $y' = Df(\bar{x})y$, que, no caso de um sistema gradiente, é tal que $Df(\bar{x}) = -D^2V(\bar{x})$ é simétrico, logo seus autovalores são todos reais, não havendo, com isso, pontos fixos hiperbólicos do tipo foco.*

Observação 11.15. *Equações escalares $x' = f(x)$ são sempre sistemas gradientes, com $V(x) = -\int^x f$.*

Problemas

11.1 Seja $f \in \text{Lip}_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e seja $V \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ uma função coerciva em \mathcal{U} . Mostre que se

$$\dot{V}(x) \leq c_0 + c_1 V(x), \quad \forall x \in \mathcal{U},$$

onde $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, então $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ para todo $x_0 \in \mathcal{U}$.

11.2 Considere a equação $x'' + h(x)x' + g(x) = 0$, onde $xg(x) > 0$, $x \neq 0$, $h(x) > 0$, $x \neq 0$, e o potencial $G(x) = \int_0^x g(s) ds$ é coercivo. Mostre que $x \equiv 0$ é uma solução estacionária globalmente assintoticamente estável.

11.3 Considere a equação do Problema 11.2 exceto que $g(x)$ é negativo se $x < -1$ e $0 < x < 1$ e é positivo se $-1 < x < 0$ e $x > 1$. Ache os pontos fixos do sistema, determine se eles são Lyapunov-estáveis, assintoticamente estáveis ou instáveis e esboce os possíveis diagramas de fase do sistema no espaço de fase (x, x') .

11.4 Seja $V \in \mathcal{C}^1(G)$ uma função de Lyapunov em um aberto $G \subset \mathbb{R}^m$ de um sistema $x' = f(x)$. Seja $\bar{x} \in G$ tal que $f(\bar{x}) = 0$ e $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in G \setminus \{\bar{x}\}$. Suponha que $V(x_n) < V(\bar{x})$ para alguma seqüência $x_n \rightarrow \bar{x}$ em G . Mostre que \bar{x} é um ponto fixo instável de $x' = f(x)$.

12. SISTEMAS CONSERVATIVOS E HAMILTONIANOS

Sistemas conservativos. Sistemas Hamiltonianos. [1, 8]

A interpretação de uma função de Lyapunov é a de uma energia que, com a presença de algum mecanismo de dissipação, decai ao longo do tempo. Na ausência de dissipação, a energia se conserva; ela é constante ao longo do movimento. Isso nos leva ao conceito de sistemas conservativos:

Definição 12.1. *Seja $f \in Lip_{loc}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $E \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tal que $\dot{E}(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$, então E é dita uma integral do sistema $x' = f(x)$. Se, além disso, E não é constante em nenhum aberto de \mathcal{U} , então o sistema $x' = f(x)$ é dito um sistema conservativo.*

Observação 12.2. *Em um sistema conservativo, a energia E pode variar de uma órbita para outra, mas ela é constante ao longo de uma mesma órbita: $E(x(t; x_0)) = E(x_0)$, $\forall t \in I_m(x_0)$, $\forall x_0 \in \mathcal{U}$. Com isso, cada órbita fica restrita a uma curva ou superfície de nível de E . Daí a importância de se exigir que E não seja constante em nenhum aberto.*

As curvas de nível de E são, em geral, variedades de dimensão $m - 1$, o que reduz o sistema a equações em dimensão $m - 1$. Se o sistema possuir $m - 1$ integrais “independentes”, no sentido das superfícies de nível serem todas transversais entre si, o sistema se reduz a um equação escalar; cada órbita estaria restrita a um subconjunto unidimensional do espaço de fase formado pela interseção de várias superfícies de nível (uma de cada integral), o que nos daria, “explicitamente”, a solução do sistema. Tais sistemas são ditos completamente integráveis. No caso bidimensional, é óbvio que uma integral basta para o sistema ser completamente integrável.

Uma classe importante de sistemas conservativos é a de sistemas Hamiltonianos:

Definição 12.3. *Um sistema Hamiltoniano é um sistema da forma*

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

onde $H = H(x, y)$ é o Hamiltoniano do sistema e o espaço de fase é formado por (x, y) .

Proposição 12.4. *O Hamiltoniano é uma integral de um sistema Hamiltoniano*

Dem.: De fato,

$$\dot{H}(x, y) = \nabla H(x, y) \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial H}{\partial x} \left(-\frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

□

Observação 12.5. *Uma notação bastante comum é obtida substituindo-se x e y por q e p , respectivamente, com q representando a posição de um sistema de partículas e p , o momento de cada uma delas. Em mecânica celeste, q pode representar o centro de massa de um conjunto de n planetas, sendo, portanto, um vetor em \mathbb{R}^{3n} , com o momento p também em \mathbb{R}^{3n} . Nesse caso, o espaço de fase tem dimensão $6n$. Nesses e em outros sistemas mecânicos, o Hamiltonian é, em geral, da forma*

$$H(q, p) = K(p) + V(q),$$

onde $K = K(p)$ representa a energia cinética do sistema, $V = V(q)$, a energia potencial e $H = H(q, p)$, a energia total do sistema. Para um objeto de massa m largado na atmosfera terrestre, temos a energia cinética como sendo $mv^2/2$, onde v é a velocidade de queda do objeto, e a energia potencial como sendo mgh , onde g é a aceleração da gravidade e h a altura do objeto em relação à superfície da Terra. Nesse caso, temos o momento $p = mv$ e a posição $q = h$, logo

$$K(p) = \frac{p^2}{2m}, \quad V(q) = mgq, \quad e \quad H(q, p) = K(p) + V(q) = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

Com isso,

$$\begin{cases} q' = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} (= v), \\ p' = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mg. \end{cases}$$

Ou podemos tomar $x = h$, $y = v$ e

$$K(y) = \frac{y^2}{2}, \quad V(x) = gx, \quad e \quad H(x, y) = K(y) + V(x) = \frac{y^2}{2} + gx.$$

Com isso,

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y} = y, \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -g. \end{cases}$$

Nesse caso, K e V são, respectivamente, as energias cinética e potencial a menos da massa m .

Observação 12.6. Em um sistema Hamiltoniano, não só a energia H é preservada, mas volumes no espaço de fase também são preservados. Isso segue do fato do divergente do campo de vetores ser idênticamente nulo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \sum \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_i} \right) = 0.$$

Uma classe particular de sistemas Hamiltonianos que podemos estudar em detalhe é a de equações escalares de segunda ordem da forma

$$x'' + g(x) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = y_0, \quad (12.1)$$

com $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, digamos, \mathcal{C}^1 .

Exemplo 12.7. Como exemplo de um sistema dessa forma temos a equação do pêndulo sem atrito, onde $g(x) = (g/l) \sin x$, e a equação do oscilador harmônico, onde $g(x) = kx$. Outros exemplos são as equações da mola dura e da mola macia, onde $g(x) = k_1 x + k_2 x^3$, $k_1 > 0$. No caso da mola dura, temos $k_2 > 0$, no caso da mola macia, $k_2 < 0$. A própria equação de um corpo em queda livre é dessa forma com $g(x) = g$ constante.

Podemos tomar como Hamiltoniano da equação (12.1) a função

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x),$$

onde

$$G(x) = \int^x g(x) dx$$

é uma primitiva de g . Temos, obviamente,

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y} = y, \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -g(x). \end{cases}$$

Proposição 12.8. Se G é limitado inferiormente, então todas as soluções da equação (12.1) são globais, i.e., $I_m(x_0, y_0) = \mathbb{R}$.

Dem.: Seja $E_0 = H(x_0, y_0)$ a energia inicial do sistema. Como a energia é conservada, temos

$$H(x(t), y(t)) = E_0, \quad \forall t \in I_m(x_0, y_0),$$

onde $(x(t), y(t))$ é a solução do sistema com $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$. Então,

$$\frac{y(t)^2}{2} + G(x(t)) = E_0,$$

logo,

$$\frac{y(t)^2}{2} + G_- \leq E_0,$$

onde $G_- = \min_x G(x)$. Com isso,

$$|y(t)| \leq \sqrt{2(E_0 - G_-)},$$

mostrando que $y(t)$ é limitado. Como $x' = y$, temos, então,

$$|x(t)| = \left| x_0 + \int_0^t y(s) ds \right| \leq |x_0| + |t| \sqrt{2(E_0 - G_-)},$$

mostrando que $x(t)$ não explode em tempo finito. Logo, as soluções são globais. \square

Para entendermos as órbitas do sistema $x'' + g(x) = 0$, basta olharmos para as curvas de nível de H . Note também que os pontos fixos do sistema estão localizados no eixo x e são da forma $(\bar{x}, 0)$ onde \bar{x} é um zero de g .

De modo geral, cada órbita pertence a uma componente conexa C de uma curva de nível, e essa componente conexa pode ser um único ponto fixo, se ele for um ponto de mínimo local de H ; pode ser uma órbita periódica, se C for limitada e não incluir nenhum ponto crítico; pode ser a união de um ponto fixo com uma órbita homoclínica ligando esse ponto fixo, se C for limitada e incluir um único ponto crítico; pode ser a união de dois pontos fixos e duas órbitas heteroclínicas ligando esses dois pontos fixos, se C for limitada e incluir dois pontos críticos; e pode envolver órbitas ilimitadas se C for ilimitada. É claro que nos casos acima descartamos o caso degenerado em que g é constante em algum intervalo.

Problemas

- 12.1 Esboce o diagrama de fase da equação $x'' + g(x) = 0$ (no espaço de fase (x, x')) nos casos em que o potencial $G(x) = \int^x g(x) dx$ é dado por $G(x) = x \sin x$ e $G(x) = (\sin x)/x$. São as soluções dessa equação globais em ambos os casos?
- 12.2 Considere a equação $x'' + g(x) = 0$ onde o potencial $G(x) = \int^x g(x) dx$ não é, necessariamente, limitado inferiormente, mas

$$\limsup_{x \rightarrow \pm\infty} G(x) = +\infty.$$

Mostre que todas as soluções são globais.

13. TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON E GRAU TOPOLÓGICO

*Teorema de Poincaré-Bendixson. Existência de ponto fixo dentro de uma órbita periódica.
Grau topológico e aplicações. [9, 12, 8, 14]*

Nesta seção, consideramos apenas sistemas bilineares $x' = f(x)$ com $f \in \text{Lip}_{loc,x}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto.

13.1. O Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 13.1 (Poincaré-Bendixson). *Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto e seja $f \in \text{Lip}_{loc,x}(\mathcal{U})$ com um número finito de singularidades. Seja $x_0 \in \mathcal{U}$ tal que $I_m^+(x_0) = \mathbb{R}^+$ e $\gamma^+(x_0)$ incluído compactamente em \mathcal{U} . Então, ocorre uma das seguintes alternativas:*

- (i) $\omega(x_0)$ é um ponto fixo;
- (ii) $\omega(x_0)$ é uma órbita periódica;
- (iii) $\omega(x_0)$ é a união de pontos fixos x_1, x_2, \dots, x_n , $n \in \mathbb{N}$, e de órbitas (homoclínicas ou heteroclínicas) γ tais que $\omega(\gamma) = x_i$ e $\omega(\gamma) = x_j$.

Observação 13.2. *Podemos ter um conjunto ômega-límite com um número infinito de órbitas homoclínicas, todas elas podendo estar associadas a um único ponto fixo, tal qual uma flor com infinitas pétalas.*

A demonstração desse teorema será feito em várias etapas. O resultado fundamental é o seguinte:

Lema 13.3. *Se para algum $y_0 \in \omega(x_0)$ o conjunto $\omega(y_0)$ possui um ponto regular, então $\omega(x_0)$ é uma órbita periódica. Da mesma forma, se o conjunto $\alpha(y_0)$ possui um ponto regular, então $\omega(x_0)$ é uma órbita periódica.*

Antes de demonstrarmos esse lema, vamos ver como ele implica no Teorema de Poincaré-Bendixson, assim como na seguinte Proposição, também conhecida como Poincaré-Bendixson.

Proposição 13.4 (Poincaré-Bendixson). *Se $\omega(x_0)$ não contém pontos fixos então $\omega(x_0)$ é uma órbita periódica.*

Dem.: Seja $y \in \omega(x_0)$ arbitrário. Então $\gamma(y)$ é uma órbita global e $\omega(y)$ existe e é não-vazio. Seja $z \in \omega(y)$ arbitrário. Como $\omega(x_0)$ não contém pontos fixos e $\omega(y) \subset \omega(x_0)$, segue que z é um ponto regular. Dessa forma, o resultado segue do Lema 13.3. □

Com os resultados acima, podemos demonstrar o Teorema de Poincaré-Bendixson da seguinte forma.

Dem.: (do Teorema de Poincaré-Bendixson) Se $\omega(x_0)$ não contém pontos fixos, então, pela Proposição 13.4, $\omega(x_0)$ é uma órbita periódica. Se $\omega(x_0)$ só contém pontos fixos, então, como eles são finitos, logo, isolados, e $\omega(x_0)$ é conexo, então, $\omega(x_0)$ é composto de um único ponto fixo. Se $\omega(x_0)$ contém pontos fixos e pontos regulares, então ele contém um número finito de pontos fixos e um número finito ou infinito de órbitas regulares. Além disso, se γ é uma órbita regular em $\omega(x_0)$, então $\omega(\gamma)$ é um único ponto fixo. De fato, se $\omega(\gamma)$ tivesse pontos regulares, teríamos pelo Corolário 13.3 que $\omega(x_0)$ seria uma órbita periódica, o que não é o caso, logo $\omega(\gamma)$ só tem pontos fixos. Além disso, $\omega(\gamma)$ é conexo e os pontos fixos são discretos, logo $\omega(\gamma)$ é composto de um único ponto fixo. Analogamente, segue que $\alpha(\gamma)$ é composto de um único ponto fixo, o que completa essa demonstração. □

Vamos, agora, à demonstração do Lema 13.3. Primeiro, precisamos do conceito de *seção transversal*:

Definição 13.5. *Uma seção transversal a f é um arco $\sigma : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ de classe \mathcal{C}^1 tal que*

$$\eta'(s) \cdot f(\sigma(s)) \neq 0, \quad \forall s \in [-1, 1],$$

onde $\eta'(s) = (-\sigma_2'(s), \sigma_1'(s))$ é normal ao arco $\sigma(s) = (\sigma_1(s), \sigma_2(s))$.

Lema 13.6. *Seja Σ uma seção transversal a f e seja $\tilde{x} \in \Sigma$. Então, para qualquer $\delta > 0$, existe uma vizinhança V de \tilde{x} tal que $\forall x_0 \in V$, existe $t(x_0)$ com $|t(x_0)| < \delta$ e tal que $x(t(x_0), x_0) \in \Sigma$.*

Dem.: Considere um sistema de coordenadas yz com a origem em \tilde{x} , o eixo y na direção de $f(\tilde{x})$ e o eixo z tangente a Σ . Nessas coordenadas, o sistema toma a forma

$$\begin{cases} y' = g(y, z), \\ z' = h(y, z), \end{cases}$$

com $g(0, 0) > 0$ e $h(0, 0) = 0$. Por continuidade, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U_ε de \tilde{x} tal que, nessa vizinhança, $g(y, z) > 0$, e, mais precisamente,

$$\frac{dy}{dt} = g(y, z) \geq \alpha > 0, \quad h(y, z) \leq \varepsilon,$$

onde $\alpha = g(0, 0)/2$. Assim, podemos inverter a coordenada $y = y(t)$ ao longo de uma órbita, escrevendo $t = t(y)$ em cada órbita. Com isso, $z = z(t) = z(t(y))$ pode ser escrita como uma função de y , logo cada órbita em U é um gráfico sobre o eixo y . Podemos, ainda, limitar a derivada de z em relação a y em U :

$$\left| \frac{dz}{dy} \right| = \left| \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dy} \right| = \left| \frac{h(y, z)}{g(y, z)} \right| \leq K_\varepsilon,$$

onde $K_\varepsilon = \varepsilon/\alpha$. Dessa forma, cada órbita $x(t; x_0)$ com $x_0 \in U_\varepsilon$, $x_0 = (y_0, z_0)$, está restrita, em U_ε , aos cones

$$C_{x_0} = \{(y, z); |z - z_0| \leq K_\varepsilon |y - y_0|\}.$$

Como o eixo z é tangente a Σ em \tilde{x} temos que para uma vizinhança $V_\varepsilon \subset U_\varepsilon$ suficientemente pequena de \tilde{x} , cada cone desses com $x_0 \in V_\varepsilon$ “atravessa” Σ , *i.e.*, a projeção de $\Sigma \cap U_\varepsilon$ no eixo y é disjunta de e fica entre as duas componentes conexas da projeção de $C_{x_0} \cap \partial U_\varepsilon$ no eixo y . Com isso, cada órbita que passa por um ponto $x_0 \in V_\varepsilon$, que é um gráfico sobre o eixo y e contido em C_{x_0} , passa necessariamente por Σ , o que nos dá um tempo $t(x_0)$ tal que $x(t(x_0); x_0) \in \Sigma$.

Finalmente, podemos limitar o tempo $t(x_0)$ que a órbita leva para atravessar Σ e fazer esse tempo arbitrariamente pequeno apenas diminuindo a vizinhança V_ε , pois

$$\left| \frac{dt}{dy} \right| = \left| \frac{1}{g(y, z)} \right| \leq \frac{1}{\alpha},$$

logo

$$|t(x_0)| \leq \frac{|y(t(x_0))|}{\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

□

Lema 13.7. *Seja $x_0 \in \mathcal{U}$ e seja Σ uma seção transversal a f . Suponha que $\gamma^+(x_0)$ intercepte Σ em uma seqüência, finita ou infinita, $\{x(t_i; x_0)\}_i$, com $t_i < t_{i+1}$. Então $\{x(t_i; x_0)\}_i$ forma uma seqüência monótona em Σ .*

Dem.: Se $\gamma^+(x_0)$ intercepta Σ em apenas um ou dois pontos, não há o que provar. Suponha, então, que há interseção em três ou mais pontos e considere três interseções em instantes consecutivos t_{i-1} , t_i e t_{i+1} . Basta mostrar que essa seqüência de três pontos é monótona em Σ . Note, aliás, que Σ é unidimensional e possui uma ordem natural induzida por sua parametrização.

Considere a curva fechada formada pelo arco da órbita de x_0 entre os instantes t_{i-1} e t_i e pelo arco Σ_0 de Σ entre $x(t_{i-1}; x_0)$ e $x(t_i; x_0)$. Essa é uma curva de Jordan, *i.e.*, é uma curva fechada simples, pois esse arco da órbita não intercepta Σ em nenhum outro instante entre t_{i-1} e t_i . Além disso, o campo de vetores em Σ_0 aponta ou todo para o interior de D ou todo para o exterior de D , pois a produto escalar do campo com a normal a Σ tem sempre o mesmo sinal. Vamos considerar apenas o caso em que esse campo de vetores aponta para o interior de D , o outro caso é análogo. Nesse caso, temos que mostrar que $x(t_{i+1}; x_0)$ está no interior de D , pois a parte de Σ posterior a $x(t_i; x_0)$ está no interior de D . Mas isso é óbvio, pois D é positivamente invariante e $f(x(t_i; x_0))$ aponta para o interior de D . □

Lema 13.8. *Seja $y \in \omega(x_0)$ e seja Σ uma seção transversal a f . Então $\gamma(y)$ intercepta Σ em no máximo um ponto.*

Dem.: Se $y_1, y_2 \in \gamma(y) \cap \Sigma$, então, como $y_1, y_2 \in \omega(x_0)$, pois $\gamma(y) \subset \omega(x_0)$, temos que $x(t_n; x_0) \rightarrow y_1$ e $x(s_n; x_0) \rightarrow y_2$, com $t_n, s_n \rightarrow +\infty$. Pelo Lema 13.6, podemos encontrar seqüências t'_n e s'_n tais que $t'_n, s'_n \rightarrow +\infty$, $x(t'_n; x_0) \rightarrow y_1$, $x(s'_n; x_0) \rightarrow y_2$ e $x(t'_n; x_0), x(s'_n; x_0) \in \Sigma$. Mas pelo Lema 13.7, $\gamma^+(x_0)$ é uma seqüência monótona em Σ e, portanto, tem um único limite. Logo $y_1 = y_2$. □

Podemos, agora, concluir com a demonstração do Lema 13.3.

Dem.: (do Lema 13.3) Seja Σ uma seção transversal a f contendo z , que existe pois z é regular. Como $z \in \omega(y)$, existe uma seqüência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $x(t_n; y) \rightarrow z$. Pelo Lema 13.6, podemos obter uma seqüência $t'_n \rightarrow +\infty$ tal que $x(t'_n; y) \rightarrow z$ com $x(t'_n; y) \in \Sigma$. Mas $y \in \omega(x_0)$, logo, pelo Lema 13.8, $\gamma(y)$ intercepta Σ em apenas um ponto. Com isso, segue que $x(t'_n; y) = z$ para todo n' . Logo, $\gamma(y)$ é uma órbita periódica.

Vamos mostrar, agora, que $\omega(x_0) = \gamma(y)$. Seja $\{x(s_n; x_0)\}$, $s_n < s_{n+1}$, a seqüência de todos os pontos de interseção de $\gamma^+(x_0)$ com a seção transversal $\Sigma \ni z$. Como $z \in \omega(x_0)$, segue do Lema 13.6 que essa seqüência é infinita, com $s_n \rightarrow +\infty$ e $x(s_n; x_0) \rightarrow z$, com $\{x(s_n; x_0)\}_n$ monótono. Seja $T > 0$ o período de $\gamma(y)$, de modo que $x(T; z) = z$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que se $|z_0 - z| < \delta$, então $|x(T; z_0) - z| < \varepsilon$. Logo, pelo Lema 13.6, $s_{n+1} - s_n$ é da ordem de T , pelo menos para n suficientemente grande. Com isso, $s_{n+1} - s_n$ é limitado. Agora, como $x(s_n; x_0) \rightarrow z$, segue que $x(s_n + t; x_0) \rightarrow x(t; z) \in \gamma(y)$ uniformemente para t em um intervalo limitado, mas como $s_{n+1} - s_n$ é limitado, isso implica em $x(t; x_0) \rightarrow \gamma(y)$ quando $t \rightarrow +\infty$, o que mostra que $\omega(x_0) = \gamma(y)$ é uma órbita periódica.

O caso em que $\alpha(y_0)$ possui um ponto regular é análogo. \square

Comentamos na Observação 13.2 que pode haver um conjunto ômega-limite com infinitas órbitas homoclínicas. Por outro lado, o resultado a seguir mostra que, em um conjunto ômega-limite, há apenas uma órbita heteroclínica ligando dois pontos fixos. Idem em conjuntos alfa-limite. É claro que um sistema pode apresentar infinitas órbitas heteroclínicas ligando os mesmo dois pontos fixos, só que cada conjunto limite pode conter apenas uma delas.

Proposição 13.9. *Sejam $x_1, x_2 \in \omega(x_0)$ pontos fixos distintos. Então há uma e somente uma órbita heteroclínica $\gamma \subset \omega(x_0)$ tal que $\alpha(\gamma) = \{x_1\}$ e $\omega(\gamma) = \{x_2\}$.*

13.2. Grau topológico.

Proposição 13.10. *Seja $f \in Lip_{loc,x}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto e simplesmente conexo. Suponha que γ seja uma órbita periódica do sistema $x' = f(x)$. Então, existe pelo menos um ponto fixo no interior de γ .*

Dem.: Seja $D \subset \mathcal{U}$ o interior de γ . Então, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, a transformação $x_0 \mapsto x(t; x_0)$ está bem definida e é contínua em \overline{D} , pois $I_m(x_0) = \mathbb{R}$ para todo $x_0 \in \overline{D}$.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brower, segue que, para todo $T \in \mathbb{R}$, existe um ponto fixo $x_T \in \overline{D}$ de $x(T; \cdot)$, logo

$$x(t + T; x_T) = x(t; x_T), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tome uma seqüência arbitrária $T_n \searrow 0$ com $T_n > 0$. Como \overline{D} é compacto, existem $x_0 \in \overline{D}$ e uma subseqüência $T_{n'} \searrow 0$ tais que

$$x_{T_{n'}} \rightarrow x_0.$$

Com isso,

$$x(t; x_{T_{n'}}) \rightarrow x(t; x_0),$$

uniformemente em t para t restrito a um intervalo limitado.

Dado $T \in \mathbb{R}$, denote por $[T/T_n]$ o menor inteiro mais próximo de T/T_n . Note que

$$\left[\frac{T}{T_n} \right] T_n \rightarrow T,$$

com $[T/T_n]T_n$ limitado. Logo,

$$x\left(\left[\frac{T}{T_{n'}}\right]T_{n'}; x_{T_{n'}}\right) \rightarrow x(T; x_0).$$

Além disso, como $[T/T_n]$ é inteiro, temos que

$$x\left(\left[\frac{T}{T_{n'}}\right]T_{n'}; x_{T_{n'}}\right) = x_{T_{n'}} \rightarrow x_0.$$

Portanto,

$$x(T; x_0) = x_0, \quad \forall T \in \mathbb{R}.$$

Logo, x_0 é um ponto fixo de $x' = f(x)$ e, obviamente, x_0 não está no bordo de D , estando, portanto, no interior de γ . \square

Podemos usar o conceito de grau topológico para estudar, por exemplo, a natureza do(s) ponto(s) fixo(s) contido(s) na região delimitada por uma órbita periódica.

Dada uma curva parametrizada $\sigma = (\xi(t), \eta(t))$, em um plano $\xi\eta$, que não passa pela origem, a integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} d \left(\arctan \frac{\eta}{\xi} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{-\eta d\xi + \xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

conta o número de voltas dadas pela curva em torno da origem. O sinal indica se as voltas foram dadas no sentido anti-horário (sinal positivo) ou horário.

Dada uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ no plano xy e um campo de vetores $F = (f(x, y), g(x, y))$, podemos considerar a curva descrita pelos vetores desse campo, $\sigma(t) = (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t)))$. Definimos o índice dessa curva em relação a esse campo de vetores como sendo

$$I(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}.$$

Esse índice está bem definido caso a curva γ não passe por nenhuma singularidade do campo de vetores. Além disso, o valor desse índice não se altera caso a curva γ seja deformada homotopicamente sem cruzar por singularidades do campo de vetores.

O índice de um ponto fixo é definido como sendo o índice de uma curva fechada que delimite apenas esse ponto fixo. É fácil ver (via cálculo ou geometricamente), que

- O índice de um atrator, um repulsor ou um centro é $+1$.
- O índice de um ponto de sela hiperbólico é -1 .
- O índice de uma órbita periódica é $+1$.
- O índice de uma curva fechada que não contem pontos fixos é 0 .
- O índice de uma curva fechada é igual à soma dos índices dos pontos fixos contidos na região delimitada por essa curva.
- Se dentro de uma órbita periódica há um único ponto fixo, então este deve ser um atrator, um repulsor ou um centro. Se há mais de um ponto fixo e todos são hiperbólicos, então devemos ter $n_a + n_r - n_s = 1$, onde n_a , n_r e n_s indicam o número de pontos fixos atratores, repulsores e de sela, respectivamente. Se além de pontos fixos hiperbólicos temos apenas centros, então $n_a + n_r + n_c - n_s = 1$, onde n_c é o número de centros.
- Pontos fixos não-hiperbólicos podem ter índices diferentes de $+1$ e -1 .

Problemas

- 13.1 Faça os detalhes da demonstração da parte do Lema 13.3 na qual $\alpha(y_0)$ possui um ponto regular.
- 13.2 Sejam $f, g \in \text{Lip}_{loc,x}(\mathbb{R}^2)$ tais que $f(x) \cdot g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Mostre que se $x' = f(x)$ possui uma órbita periódica γ então $y' = g(y)$ possui pelo menos um ponto fixo no interior de γ e nenhum conjunto limite de $y' = g(y)$ intercepta γ .
- 13.3 Mostre que as únicas órbitas recorrentes possíveis em um sistema bidimensional são os pontos fixos e as órbitas periódicas. (Veja o Problema 9.3 para a definição de órbita recorrente.)

14. EXEMPLOS DE SISTEMAS NÃO-LINEARES BIDIMENSIONAIS

Equação de Van der Pol. Equação Predador-Presa. Competição entre duas espécies. [9]

14.1. **Equação de Van der Pol.** Vamos considerar a *equação de Lienard*

$$\begin{cases} x' = y - f(x), \\ y' = -x, \end{cases} \quad (14.1)$$

no caso particular em que $f(x) = x^3 - x$, o que nos leva à *equação de Van der Pol*:

$$\begin{cases} x' = y - x^3 + x, \\ y' = -x. \end{cases} \quad (14.2)$$

14.2. **Equação de Lotka-Volterra (predador-presa).**

$$\begin{cases} x' = (a - by)x, \\ y' = (cx - d)y, \end{cases} \quad (14.3)$$

onde $a, b, c, d > 0$ e $x, y \geq 0$, com x representando a população das presas e y , a dos predadores.

Os pontos fixos são $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = (d/c, a/b)$. Temos que p_0 é um ponto fixo hiperbólico de sela, e p_1 é um centro para o sistema linearizado em torno de p_1 . Um análise das regiões delimitadas pelas retas $y = a/b$ e $x = d/c$ indica que as órbitas tendem a dar voltas em torno do ponto fixo p_1 , mas não está claro se elas devem se afastar de p_1 , se aproximar de p_1 ou formar órbitas periódicas.

Procuramos uma integral do sistema na forma $H(x, y) = F(x) + G(y)$. Para que $\dot{H}(x, y) \equiv 0$, devemos ter

$$F'(x)(a - by)x + G'(y)(cx - d)y = 0$$

Separando variáveis, obtemos

$$\frac{F'(x)x}{cx - d} = -\frac{G'(y)y}{a - by}.$$

Logo,

$$F'(x) = \alpha \left(c - \frac{d}{x} \right), \quad G'(y) = -\alpha \left(\frac{a}{y} - b \right),$$

para algum α . Portanto,

$$H(x, y) = cx - d \ln x + by - a \ln y$$

é uma integral do sistema e o sistema é conservativo. O valor de α e o das constantes de integração em F e G são irrelevantes para a equação $\dot{H} = 0$. As órbitas são todas periódicas, exceto pelo ponto fixo p_1 e ao longo dos semi-eixos coordenados.

14.3. **Predador-presa com crescimento limitado.**

$$\begin{cases} x' = (a - by - \lambda x)x, \\ y' = (cx - d - \mu y)y, \end{cases} \quad (14.4)$$

onde $a, b, c, d, \lambda, \mu > 0$ e $x, y \geq 0$, com x representando a população das presas e y , a dos predadores.

Os pontos fixos são $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = (a/\lambda, 0)$, e, possivelmente,

$$p_2 = \left(\frac{a\mu + bd}{bc - \lambda\mu}, \frac{ca + d\lambda}{bc - \lambda\mu} \right),$$

caso $bc - \lambda\mu > 0$, i.e., caso as retas $a - by - \lambda x = 0$ e $cx - d - \mu y = 0$ se interceptem no primeiro quadrante. Pela análise do sinal das derivadas x' e y' em cada uma das regiões delimitadas por essas retas e pelos semi-eixos coordenados, podemos deduzir que, no caso em que p_2 não está definido, o ponto fixo p_1 é assintoticamente estável e atrai todas as órbitas do sistema, exceto as que estão no semi-eixo y , que convergem para p_0 .

14.4. Competição entre duas espécies.

$$\begin{cases} x' = (a - by - \lambda x)x, \\ y' = (d - cx - \mu y)y, \end{cases} \quad (14.5)$$

onde $a, b, c, d, \alpha, \beta > 0$ e $x, y \geq 0$.

Problemas

14.1 Esboce os possíveis diagramas de fase do sistema

$$\begin{cases} x' = (a - by^2 - \lambda x)x, \\ y' = (c - dx - \mu y)y, \end{cases}$$

onde $a, b, c, d, \lambda, \mu > 0$ e $x, y \geq 0$.

15. ESTABILIDADE ESTRUTURAL

Conjugação e equivalência topológica. Teorema do fluxo tubular. Conjugação de sistemas lineares. Estabilidade estrutural. [7, 14, 12]

15.1. **Conjugação de sistemas.** Se considerarmos os diagramas de fase dos sistemas

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x' = -x, \\ y' = y, \end{cases}$$

podemos observar que eles são essencialmente idênticos, diferindo apenas por uma rotação de 90 graus. É natural procurarmos uma relação de equivalência identificando sistemas que possuem certas características dinâmicas comuns. Uma relação natural é aquela dada pelo Teorema de Hartman-Grobman, que identificou um sistema na vizinhança de um ponto fixo com um sistema linearizado.

Definição 15.1. *Sejam $f \in Lip_{loc,x}(\mathcal{U})$ e $g \in Lip_{loc,x}(\mathcal{V})$ gerando sistemas dinâmicos locais $x = x(t; x_0)$ e $y = y(t; y_0)$ em abertos \mathcal{U} e \mathcal{V} de \mathbb{R}^m . Dizemos que esses sistemas são conjugados ou topologicamente conjugados quando existe um homeomorfismo $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ tal que $h(x(t; x_0)) = y(t; h(x_0))$, para todo $x_0 \in \mathcal{U}$ e todo $t \in I_m(x_0) = I_m(y_0)$. Caso h seja de classe $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $k \in \mathbb{N}$, ou $k = \infty$, ou $k = \omega$ (analítico), dizemos que os sistemas são C^k conjugados. Se a conjugação existir apenas em subconjuntos de \mathcal{U} e \mathcal{V} , dizemos que os sistemas são localmente conjugados.*

Portanto, podemos dizer que os dois sistemas acima são conjugados; mais precisamente, analiticamente conjugados. E o Teorema de Hartman-Grobman diz que um sistema na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico é localmente topologicamente conjugado ao sistema linearizado.

O resultado a seguir diz que dois sistemas lineares hiperbólicos atratores são topologicamente conjugados. De maneira análoga (ou apenas invertendo a variável temporal), dois sistemas lineares hiperbólicos repulsores são topologicamente conjugados.

Proposição 15.2. *Sejam $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ com todos os autovalores com parte real negativa. Então existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $h(e^{tA}x_0) = e^{tB}h(x_0)$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, ambos sistemas lineares são conjugados a $\{e^{-tI}\}_{t \geq 0}$, onde I é a identidade em \mathbb{R}^m .*

Dem.: Seja $\nu > 0$ tal que a parte real dos autovalores de A seja estritamente menor que $-\nu$. Então, existe uma norma em \mathbb{R}^m tal que $\|e^{tA}\| \leq e^{-\nu t}$, para todo $t \geq 0$. Logo, se $|x_0| > 1$, então existe $t_0 > 0$ tal que $|e^{t_0 A}x_0| = 1$. Esse t_0 é único, pois para $t > t_0$, temos $|e^{tA}x_0| = |e^{(t-t_0)A}e^{t_0 A}x_0| \leq |e^{-\nu(t-t_0)}| |e^{t_0 A}x_0| < 1$.

Caso $0 < |x_0| < 1$ e $t < 0$, temos

$$|x_0| = |e^{-tA}e^{tA}x_0| \leq e^{\nu t} |e^{tA}x_0|.$$

de modo que existe um $t_0 < 0$ tal que $|e^{t_0 A}x_0| = 1$. Como antes, esse t_0 é o único com essa propriedade.

No caso em que $|x_0| = 1$, temos $t_0 = 0$. Assim, para todo $x_0 \neq 0$, existe um único $t_0 = t(x_0) \in \mathbb{R}$ tal que $|e^{t_0 A}x_0| = 1$.

Definimos

$$h(x_0) = \begin{cases} e^{-t(x_0)B}e^{t(x_0)A}x_0, & \text{se } x_0 \neq 0, \\ 0, & \text{se } x_0 = 0. \end{cases}$$

Observe que essa função é inversível, com

$$h^{-1}(y_0) = \begin{cases} e^{-s(y_0)A}e^{s(y_0)B}y_0, & \text{se } y_0 \neq 0, \\ 0, & \text{se } y_0 = 0. \end{cases}$$

onde $s(y_0)$, para $y_0 \neq 0$, é o único $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|e^{s_0 B}y_0| = 1$. Da continuidade em relação às condições iniciais, é possível mostrar que, para $x_0 \neq 0$, $t(x_0)$ é contínuo, assim como $h(x_0)$. Para ver a continuidade de h em $x_0 = 0$, basta observar que para $x_0 \rightarrow 0$, temos $t(x_0) \rightarrow -\infty$ e

$$|h(x_0)| \leq K e^{\mu t(x_0)} \rightarrow 0,$$

para algum $K \geq 1$ e $\nu > 0$.

Observe, agora, que $t(e^{tA}x_0) = t(x_0) - t$. Logo, se $x_0 \neq 0$,

$$h(e^{tA}x_0) = e^{-(t(x_0)-t)B} e^{(t(x_0)-t)A} e^{tA}x_0 = e^{tB} e^{-t(x_0)B} e^{t(x_0)A}x_0 = e^{tB}h(x_0).$$

□

Observação 15.3. Como mencionado anteriormente, dois sistemas lineares hiperbólicos repulsores são topologicamente conjugados. Mais geralmente, se A e B são operadores hiperbólicos com a mesma dimensão dos autoespaços generalizados associados aos autovalores com parte real com o mesmo sinal, então decompondo-se o espaço nesses autoespaços é possível mostrar que os sistemas lineares associados a A e B também são topologicamente conjugados.

Observação 15.4. É possível mostrar que a conjugação e a sua inversa obtidas na Proposição 15.2 são Hölder contínuas. Caso N seja um operador normal com todos os autovalores com parte real diferente de zero, então $\{e^{tN}\}$ é conjugado a parte real $A = (N + N^*)/2$. Nesse caso, é possível mostrar que a conjugação e a sua inversa são Lipschitz contínuas.

A conceito de conjugação, é mais forte do que os exemplos acima parecem indicar. Em um certo sentido, ela preserva a parametrização no tempo. Isso pode ser observado mais precisamente em órbitas periódicas. Se $x(t; x_0)$ é uma órbita periódica de período T , então $y(t; h(x_0)) = h(x(t; x_0))$ também é periódica e de mesmo período. Isso faz com que os sistemas

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x' = -2y, \\ y' = 2x, \end{cases}$$

cujas órbitas são todas periódicas mas de períodos 2π e π , respectivamente, não sejam conjugados, apesar dos diagramas de fase serem absolutamente idênticos.

Isso nos leva ao conceito de equivalência topológica entre dois sistemas. Mas antes de entrarmos nesse assunto, vamos ver que conjugações de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, são ainda mais restritivas. De fato, se h for diferenciável, podemos derivar a relação de conjugação em relação à condição inicial x_0 , obtendo

$$Dh(x(t; x_0))D_{x_0}x(t; x_0) = D_{y_0}y(t; h(x_0))Dh(x_0).$$

Se x^* for um ponto fixo de $x' = f(x)$, então $y^* = h(x^*)$ é um ponto fixo de $y' = g(y)$ e, tomando $x_0 = x^*$, vemos que

$$Dh(x^*)D_{x_0}x(t; x^*) = D_{y_0}y(t; y^*)Dh(x^*).$$

Como $D_{x_0}x(t; x^*) = \exp(tDf(x^*))$ e $D_{y_0}y(t; y^*) = \exp(tDg(y^*))$, vemos que,

$$Dh(x^*)e^{tDf(x^*)} = e^{tDg(y^*)}Dh(x^*).$$

Derivando em relação a t ,

$$Dh(x^*)Df(x^*)e^{tDf(x^*)} = Dg(y^*)e^{tDg(y^*)}Dh(x^*).$$

Fazendo $t = 0$,

$$Dh(x^*)Df(x^*) = Dg(y^*)Dh(x^*).$$

Isso mostra que $Df(x^*)$ e $Dg(y^*)$ são similares e tem os mesmos autovalores. Assim, os sistemas

$$x' = -x \quad \text{e} \quad x = -2x$$

são topologicamente conjugados mas não são difeomorficamente conjugados.

15.2. Equivalência de sistemas.

Definição 15.5. *Dois sistemas são ditos topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo levando as órbitas de um sistema nas órbitas do outro sistema, preservando a orientação na variável temporal. Os sistemas são ditos C^k -equivalentes ou equivalentes de classe C^k se, além disso, o homeomorfismo for de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, ou $k = \infty$, ou $k = \omega$ (analítico). Se a conjugação existir apenas em subconjuntos dos espaços de fase dos dois sistemas, dizemos que os sistemas são localmente equivalentes.*

Note que a equivalência topológica também leva pontos fixos em pontos fixos e órbitas periódicas em órbitas periódicas, mas não necessariamente preservando os períodos. A equivalência topológica também leva conjuntos limites em conjuntos limites.

Observação 15.6. *Continuando a notação da seção anterior, seja h um homeomorfismo gerando uma equivalência topológica entre $x' = f(x)$ e $y' = g(y)$. Para cada x_0 em \mathcal{U} , cada ponto $x(t; x_0)$ da órbita $\gamma(x_0)$ é levada em pontos da órbita $\gamma(h(x_0))$. Logo, para cada $t \in \text{Im}(x_0)$, existe um tempo $\tau(t; x_0)$ tal que*

$$h(x(t; x_0)) = y(\tau(t; x_0); h(x_0)).$$

É possível mostrar que τ pode ser escolhido a ter a mesma regularidade que h .

Assim, se a equivalência for de classe C^1 , podemos obter, como foi feito para conjugações, que, para pontos fixos x^* e $y^* = h(x^*)$,

$$Dh(x^*)Df(x^*) = \tau_0 Dg(y^*)Dh(x^*),$$

onde $\tau_0 = d\tau(t; x^*)/dt|_{t=0}$. Logo, temos que $Df(x^*)$ é similar a um múltiplo $\tau_0 Dg(y^*)$ de $Dg(y^*)$. Isso implica nos autovalores de $Df(x^*)$ e $Dg(y^*)$ serem múltiplos entre si, com a mesma constante multiplicativa. Com isso, em geral, é mais razoável procurarmos equivalências que sejam apenas topológicas.

15.3. Estabilidade estrutural. Com uma noção de equivalência entre sistemas dinâmicos, podemos considerar uma noção de robustez, ou estabilidade, dos sistemas, em relação a perturbações no próprio sistema. No caso de equações diferenciais $x' = f(x)$, isso significa uma relação de estabilidade do diagrama de fase em relação ao campo de vetores $f = f(x)$. Para isso, devemos considerar um espaço \mathcal{F} de campos de vetores f munido de alguma métrica apropriada. Por exemplo, em um aberto \mathcal{U} , podemos considerar o espaço dos campos Lipschitz contínuas com constante de Lipschitz menor ou igual a $\ell > 0$ munido da norma

$$\sup_{x \in \mathcal{U}} \frac{f(x)}{1 + \ell|x|}.$$

Podemos, também, considerar certos subespaços mais regulares, como o dos campos de classe C^1 limitados junto com as suas derivadas e munido da norma do sup do campo e de suas derivadas.

Podemos, ainda, incluir no espaço de campos certas condições de simetria naturais envolvidas na modelagem do problema, seja ele físico, químico, biológico, etc.

É natural, no entanto, que os campos admissíveis na perturbação sejam minimamente regulares para que os sistemas dinâmicos estejam bem definidos. Assim, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 15.7. *Seja \mathcal{F} um espaço métrico formado por uma certa família de campos de vetores localmente Lipschitz contínuos. Um sistema dinâmico associado a uma equação $x' = f(x)$ com $f \in \mathcal{F}$ é dito estruturalmente estável em relação a \mathcal{F} caso $x' = f(x)$ seja topologicamente equivalente a $y' = g(y)$ para todo g em \mathcal{F} suficientemente próximo de f .*

Observação 15.8. *É possível dar uma definição de sistemas estruturalmente estáveis em termos de grupos e semigrupos, sem ser necessariamente em termos da função f do lado direito de uma equação diferencial.*

Observação 15.9. *A família mais comum de campos é a dos campos de classe C^1 limitados e com suas derivadas também limitadas, munida da norma natural.*

Teorema 15.10. *Campos de classe C^1 com pontos fixos hiperbólicos são localmente estruturalmente estáveis, ou seja, estruturalmente estáveis na vizinhança de cada ponto fixo hiperbólico e em relação a perturbações de classe C^1 .*

Dem.: Seja f um campo de classe C^1 em um aberto de \mathbb{R}^m e seja x^* um ponto fixo hiperbólico de $x' = f(x)$. Seja U uma vizinhança de x^* onde o fluxo $x = x(t; x_0)$ é topologicamente conjugado ao fluxo linearizado $\xi = \xi(t; \xi_0)$ gerado por $\xi' = Df(x^*)\xi$, o que é garantido pelo Teorema de Hartman-Grobman (Teorema 10.24). Seja g uma perturbação de classe C^1 de f em U ,

$$\sup_{x \in U} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in U} \|Df(x) - Dg(x)\| \leq \varepsilon,$$

com ε suficientemente pequeno.

Como x^* é um ponto fixo hiperbólico, temos que $Df(x^*)$ é inversível. Logo, para ε suficientemente pequeno, temos que $Dg(x^*)$ também é inversível. Pelo Teorema da Função Inversa, segue que existe a inversa g^{-1} de uma vizinhança de $g(x^*)$ em uma vizinhança de x^* . Para todo y nessa vizinhança, temos, ainda, que $Dg(y)$ é inversível. Em particular, existe um ponto fixo $y^* = g^{-1}(0)$ de $y' = g(y)$ com $Dg(y^*)$ inversível, i.e. y^* é um ponto fixo hiperbólico. Pelo Teorema de Hartman-Grobman, existe uma vizinhança de y^* onde o fluxo $y(t; y_0)$ gerado por $y' = g(y)$ é conjugado ao fluxo linearizado $\eta = \eta(t; \eta_0)$ gerado por $\eta' = Dg(y^*)\eta$ em uma vizinhança da origem.

Para ε suficientemente pequeno, podemos garantir que $Dg(y^*)$ e $Df(x^*)$ têm as mesmas dimensões dos espaços espectrais associados aos autovalores com parte real negativa e positiva, respectivamente. Portanto, pela Proposição 15.2 e pela Observação 15.3, o fluxo linearizado $\xi(t; \xi_0)$ é conjugado ao fluxo linearizado $\eta(t; \eta_0)$.

Assim, o fluxo $x(t; x_0)$ é conjugado localmente ao fluxo linearizado $\xi(t; \xi_0)$, que por sua vez é conjugado ao fluxo $\eta(t; \eta_0)$, que é conjugado localmente ao fluxo $y(t; y_0)$. Portanto, $x(t; x_0)$ e $y(t; y_0)$ são localmente topologicamente conjugados, o que conclui a demonstração. \square

Observação 15.11. *O Teorema 15.10 pode ser estendido para perturbações Lipschitz contínuas.*

Observação 15.12. *O Teorema 15.10 pode ser estendido para garantir a estabilidade estrutural local na vizinhança de conjuntos invariantes hiperbólicos mais gerais que pontos fixos, como órbitas periódicas hiperbólicas e certos conjuntos invariantes (variedades ou não) chamados de normalmente hiperbólicos.*

Observação 15.13. *Os resultados acima são estritamente locais. Órbitas homoclínicas ou heteroclínicas ligando pontos fixos hiperbólicos (ou outros conjuntos invariantes normalmente hiperbólicos) não são estruturalmente estáveis.*

Teorema 15.14 (Peixoto). *Seja \mathcal{D} um subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 com bordo de classe C^1 e seja \mathcal{F} o conjunto dos campos bidimensionais de classe C^1 em \mathcal{D} tais que no bordo “apontam para dentro” de \mathcal{D} . Então o sistema associado a um campo f em \mathcal{F} é estruturalmente estável em relação a \mathcal{F} se e somente se*

- (1) *O número de pontos fixos e órbitas periódicas é finito e todos são hiperbólicos;*
- (2) *não há órbitas homoclínicas ou heteroclínicas ligando pontos fixos de sela;*
- (3) *O conjunto de pontos errantes (veja Problema 9.2) consiste apenas de pontos fixos e órbitas periódicas.*

Observação 15.15. *O Teorema de Peixoto vale, mais geralmente, para conjuntos de campos que apontam “para fora” de \mathcal{D} , ou para conjuntos de campos definidos em variedades bidimensionais compactas.*

16. BIFURCAÇÕES

Bifurcações. [4, 7, 14, 6]

Vimos na seção anterior os conceitos de equivalência topológica entre fluxos e o de estabilidade estrutural em relação a uma família de campos \mathcal{F} formando um certo espaço métrico.

Um campo f em \mathcal{F} cujo fluxo não é estruturalmente estável é dito um *ponto de bifurcação* da família \mathcal{F} . Um caso particular aparece quando a família \mathcal{F} é parametrizada por um ou mais parâmetros, tais como

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4\}$$

ou

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \lambda x - x^2\}.$$

Nesses casos, podemos representar um campo qualquer da família \mathcal{F} por $f = f(x, \lambda)$, onde λ é um elemento de \mathbb{R}^k , para algum $k \in \mathbb{N}$. Os valores de λ para os quais o fluxo associado ao campo $f = f(x, \lambda)$ não é estruturalmente estável são ditos *pontos de bifurcação*, para essa família de campos.

Ao variarmos o parâmetro λ ao largo de pontos de bifurcação, a estrutura do sistema não sofre alterações qualitativas. Nesse sentido, o estudo dos pontos de bifurcação é esclarecedor no sentido de revelar diagramas de fase qualitativamente diferentes.

Dada uma família \mathcal{F} de campos, é natural classificarmos todas as possíveis bifurcações. Isso, no entanto, é um trabalho formidável e longe de estar completo. Até mesmo o estudo de bifurcações na vizinhança de pontos fixos está incompleto.

Bifurcações em vizinhanças de pontos fixos ou órbitas periódicas são ditas bifurcações locais. Essas bifurcações podem ser encontradas com a ajuda do Teorema da Função Implícita. Considere uma família parametrizada $f = f(x, \lambda)$ de campos de vetores e seja x^* um ponto fixo do fluxo associado ao campo $f(x, \lambda_0)$ para algum parâmetro λ_0 . Caso x^* seja um ponto fixo hiperbólico, temos $f(x^*, \lambda_0) = 0$ e $D_x f(x^*, \lambda_0)$ inversível. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma curva (ou superfície, caso λ seja um parâmetro em \mathbb{R}^k com $k > 1$) $\lambda \mapsto x^*(\lambda)$ tal que $f(x^*(\lambda), \lambda) = 0$ para todo λ próximo de λ_0 , com $D_x f(x^*(\lambda), \lambda)$ inversível. Logo, $x^*(\lambda)$ é um ponto fixo hiperbólico de $x' = f(x, \lambda)$ e é topologicamente conjugado ao fluxo com $\lambda = \lambda_0$. Portanto, o fluxo associado ao campo $f(x, \lambda_0)$ é localmente estruturalmente estável e λ_0 não é um ponto de bifurcação local (i.e. na vizinhança desse ponto fixo).

Dessa forma, os possíveis pontos de bifurcação estão no conjunto de parâmetros para os quais a diferencial $D_x f(x, \lambda)$ não é hiperbólica. É comum conhecermos um conjunto de pontos fixos parametrizados, digamos, por $x^*(\lambda)$. Nesse caso, o estudo dos pontos onde $D_x f(x^*(\lambda), \lambda)$ não é hiperbólica, i.e. tem algum autovalor com parte real nula, revela candidatos a pontos de bifurcação. Mas um ponto desse tipo não é necessariamente um ponto de bifurcação, como veremos a seguir.

Vamos estudar, agora, alguns caos típicos de bifurcações locais. Estudaremos, em particular, as bifurcações de codimensão um. Essa classificação vem da dimensão do núcleo do operador $D_x f(x^*(\lambda), \lambda)$, no caso particular em que ele é singular, ou, em outras palavras, da codimensão da imagem desse operador. As bifurcações de codimensão um são as mais simples e estão totalmente classificadas. Já bifurcações de codimensão maior, mesmo as de codimensão dois, são bem mais complexas e não estão completamente classificadas.

16.1. Bifurcações locais de codimensão um.

- Sela-nó (saddle-node):

$$x' = \lambda - x^2.$$

- Transcrítica:

$$x' = \lambda x - x^2.$$

- Tridente (pitchfork):

$$x' = \lambda x - x^3.$$

- Bifurcação de Hopf:

$$\begin{cases} x' = -y + x(\lambda - (x^2 + y^2)), \\ y' = x + y(\lambda - (x^2 + y^2)). \end{cases}$$

Estritamente falando, a bifurcação de Hopf não é de codimensão um no sentido acima, pois a diferencial $D_x f(x^*, \lambda_0)$, $x^* = 0$, $\lambda_0 = 0$, é inversível. Porém, essa diferencial não é hiperbólica, ela tem um par de autovalores conjugados puramente complexos. Contudo, passando para coordenadas polares, vemos que essa bifurcação se reduz a uma bifurcação de codimensão um do tipo tridente.

$$\begin{cases} r' = \lambda r - r^3, \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

A condição de que $D_x f(x^*, \lambda_0)$ seja singular em algum ponto fixo, $f(x^*, \lambda_0) = 0$, não é suficiente para que haja bifurcação. De fato, o campo

$$f(x, \lambda) = \lambda - x^3$$

ilustra isso. Para qualquer λ real, $x^*(\lambda) = \lambda^{1/3}$ é o único ponto fixo e é globalmente assintoticamente estável.

As bifurcações acima aparecem localmente em perturbações de ordem mais alta, e.g. bifurcações sela-nó:

$$x' = \lambda - x^2 + \mathcal{O}(|x|^3);$$

transcrítica:

$$x' = \lambda x - x^2 + \mathcal{O}(|x|^3);$$

tridente:

$$x' = \lambda x - x^3 + \mathcal{O}(x^4);$$

e de Hopf:

$$\begin{cases} r' = \lambda r - r^3 + \mathcal{O}(r^4), \\ \theta' = 1 + \mathcal{O}(|r|). \end{cases}$$

Essas bifurcações de codimensão um aparecem também em sistemas de dimensão maior. Nesses casos, o núcleo da diferencial $D_x f(x^*, \lambda_0)$ tem dimensão um, e é possível reduzir o estudo local a um sistema unidimensional e, assim, cair em um dos casos acima.

16.2. Bifurcações imperfeitas e “desdobramento universal”. Em várias modelagens de problemas naturais, certas simplificações são feitas e alguns parâmetros, descartados. É natural perguntarmos que modificações aconteceriam se incluíssemos esses parâmetros descartados e quais desses parâmetros seriam realmente importantes no sentido de modificar qualitativamente o diagrama de bifurcações.

Considere a bifurcação do tipo tridente. Imagine que incluíssemos um outro parâmetro ε , da forma

$$f(x, \lambda, \varepsilon) = \varepsilon + \lambda x - x^3.$$

O diagrama seria modificado, e de maneiras diferentes, caso $\varepsilon > 0$ ou $\varepsilon < 0$.

Esses tipos de bifurcações são, às vezes, chamadas de bifurcações *perturbadas* ou *imperfeitas*, mas esses são conceitos relativos à modelagem de algum problema específico, não à natureza matemática da bifurcação.

Note, agora, que se a perturbação fosse da forma

$$f(x, \lambda, \varepsilon) = \lambda x - x^3 + \varepsilon x^4,$$

então não haveria nenhuma modificação no diagrama de fase, pelo menos localmente, em uma vizinhança da origem. O estudo das possíveis perturbações que levam a diferentes diagramas de fase segue pela Teoria de Singularidades. Esse estudo nos leva à forma mais geral possível de perturbações qualitativas de uma certa bifurcação, chamada de desdobramento universal. Um *desdobramento universal* (*universal unfolding*) de uma família $f(x, \lambda)$ de campos vetoriais é uma família $F(x, \lambda, \varepsilon)$ tal que

- $F(x, \lambda, 0) = f(x, \lambda)$;
- Qualquer perturbação suficientemente pequena do campo $f = f(x, \lambda)$ é tal que o fluxo correspondente é topologicamente equivalente ao fluxo associado ao campo $F(x, \lambda, \varepsilon)$ para algum ε ;

- $F(x, \lambda, \varepsilon)$ tem o menor número possível de variáveis $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \mathbb{R}^m$.

Por exemplo, o desdobramento universal da bifurcação do tipo tridente é da forma

$$F(x, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \lambda x - x^3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x^2.$$

16.3. Bifurcações globais. Órbitas homoclínicas e heteroclínicas ligando pontos fixos de sela são exemplos típicos de bifurcações globais.

17. CAOS

Ferradura de Smale. Dinâmica simbólica. Caos. [7, 14]

Nesta seção, vamos estudar certos sistemas dinâmicos discretos possuindo conjuntos invariantes caóticos.

17.1. **O mapa ternário.** Vamos considerar um sistema dinâmico discreto, dado pelas iterações do *mapa ternário* $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$g(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 1/2, \\ 3 - 3x, & x > 1/2. \end{cases}$$

Uma órbita desse sistema é uma seqüência $(x_n)_n$, $x_n = g(x_{n-1}) = g^n(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Observe, primeiramente, que para todo $x_0 \notin [0, 1]$, temos $x_n = g^n(x_0) \rightarrow -\infty$. A parte interessante da dinâmica desse sistema está no intervalo $[0, 1]$. Nos extremos desse interval, temos $g^n(0) = 0$ para todo n , logo $x_0 = 0$ é um ponto fixo, e $g^n(1) = 0$ para todo n , também. Observe que, como g não é injetivo, as órbitas podem se cruzar e coincidir após um certo número de iterações, fenômeno que não ocorre em sistemas dinâmicos contínuos.

Para $x_0 \notin (1/3, 2/3)$, temos $g(x_0) \notin [0, 1]$, logo $g^n(x_0) \rightarrow -\infty$. Sobram $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$.

Para $x_0 \in (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$, temos $g(x_0) \in (1/3, 2/3)$, logo $g^2(x_0) \notin [0, 1]$ e $g^n(x_0) \rightarrow -\infty$. Sobram $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$.

E assim sucessivamente, vamos eliminando os terços do meio. Sobra o cojunto de cantor Λ . Vamos mostrar as seguintes propriedades de g em Λ :

- (1) Λ é invariante por g , i.e. $g(\Lambda) = \Lambda$.
- (2) Há um conjunto enumerável denso em Λ composto de órbitas periódicas de g .
- (3) Existe um subconjunto não-enumeável de Λ composto de órbitas não periódicas de g .
- (4) Existe uma órbita de g que é densa em Λ .
- (5) g é sensível às condições iniciais em Λ , no sentido de que existe um $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ e todo x_0 em Λ , existe um y_0 em Λ satisfazendo $|x_0 - y_0| < \delta$, e $|g^n(x_0) - g^n(y_0)| > \varepsilon$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Considere a expansão ternária de um número real $x \in [0, 1]$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{3^n} = 0, s_1 s_2 s_3 \dots, \quad s_i \in \{0, 1, 2\}.$$

Vamos utilizar a convenção de representar um número da forma $0, s_1 s_2 \dots s_n 1000 \dots$ por $0, s_1 s_2 \dots s_n 0222 \dots$. Assim, temos que

$$x \in \Lambda \text{ se e somente se } s_i \in \{0, 2\} \text{ para todo } i.$$

Seja $x \in \Lambda$. Note que $x \leq 1/2$ se $s_1 = 0$ e $x > 1/2$ se $s_1 = 2$. No caso em que $s_1 = 0$, temos $g(x) = 3x = 0, s_2 s_3 s_4 \dots$. No caso em que $s_1 = 2$, como $3 = 2 + 0, 222 \dots$, então $g(x) = 3 - 3x = 0, \bar{s}_2 \bar{s}_3 \bar{s}_4 \dots$, onde $\bar{s} = 2 - s$ (i.e. $\bar{0} = 2, \bar{1} = 1, \bar{2} = 0$). Por indução, temos

$$g^n(0, s_1 s_2 s_3 \dots) = \begin{cases} 0, s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3}, & \text{se } s_n = 0, \\ 0, \bar{s}_{n+1} \bar{s}_{n+2} \bar{s}_{n+3}, & \text{se } s_n = 2. \end{cases}$$

Com essa representação, torna-se fácil obter as propriedades descritas acima.

- (1) Se $x_0 \in \Lambda$, então os termos da expansão ternária são 0 ou 2 e, da representação acima para $g^n(x_0)$, vemos que as iterações sucessivas de x_0 também têm seus termos sendo 0 ou 2, logo, estão em Λ , i.e. $g(\Lambda) \subset \Lambda$. Por outro lado, dado $y_0 = 0, s_1 s_2 s_3 \dots$ em Λ e dado n . Podemos tomar $x_0 = 0, 0 \dots 0 s_1 s_2 s_3 \dots$, com n zeros antes de s_1 , de forma que $g(x_0) = y_0$, mostrando que $g(\Lambda) \supset \Lambda$. Portanto, $g(\Lambda) = \Lambda$, i.e. Λ é invariante por g .
- (2) Seja Λ_0 o conjunto dos pontos $x = 0, s_1 s_2 s_3 \dots$ em Λ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $N \geq n$ com $s_N = 0$. Dado $x \in \Lambda_0$ e $\varepsilon > 0$, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que $3^{-k} < \varepsilon$ e $s_N = 0$. Assim, podemos tomar $x_0 = s_1 \dots s_N s_1 \dots s_N s_1 \dots s_N \dots$, de modo que $g^N(x_0) = x_0$, i.e. x_0 gera uma órbita periódica. Além disso, $|x_0 - x| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} 3^{-n} \leq 3^{-N} < \varepsilon$. Logo, o conjunto das órbitas periódicas

é denso em Λ_0 . Para obter a densidade em Λ , observe que um ponto $x \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ é tal que $s_n = 2$ para todo n suficientemente grande, digamos $n \geq N$. Observe, agora, que a seqüência de pontos $(0, s_1 s_2 \dots s_{N+k} 0000 \dots)_{k \in \mathbb{N}}$ pertence a Λ_0 e converge para x . Logo, Λ_0 é denso em Λ , portanto o conjunto das órbitas periódicas de g é denso em Λ .

- (3) Como o conjunto de Cantor Λ é incontável, as órbitas em Λ que não são periódicas formam um subconjunto incontável.
 (4) Uma órbita densa pode ser obtida a partir de

$$x_0 = A_1 A_2 A_3 \dots,$$

onde A_i é uma seqüência contendo todas as combinações possíveis de 0 e 2 de comprimento i , e.g.

$$A_1 = 02, \quad A_2 = 00220222, \quad A_3 = 000002020200022202220222.$$

Portanto,

$$x_0 = 02000222022000002020200022202220222 \dots$$

Essa órbita é densa no conjunto das órbitas periódicas, logo, é densa em Λ .

- (5) Podemos tomar qualquer $\varepsilon < 1/3$. Dado $\delta > 0$, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que $3^{-N} < \delta$. Dessa forma, para cada $x_0 = 0, s_1 s_2 \dots \in \Lambda$, com $s_N = 0$, basta considerarmos $y_0 = 0, s_1 s_2 \dots s_N \bar{s}_{N+1} s_{N+2} \dots$. Dessa forma $|x_0 - y_0| \leq 3^{-N} < \delta$ e $|g^N(x_0) - g^N(y_0)| \geq 1/3 > \varepsilon$. Se x não estiver em Λ_0 , então $x = 0, s_1 s_2 \dots$ com $s_N = 2$ para N suficientemente grande. Então $g^N(x_0) = 0$ para N suficientemente grande. Tomando $y_0 = 0, s_1 s_2 s_N 000 \dots$, teremos $g^N(y_0) = 0, 222 \dots = 1$, de modo $g^N(x_0) - g^N(y_0) = 1$ com $|x_0 - y_0| \leq 3^{-N}$. Portanto, g restrito a Λ é sensível às condições iniciais.

O mapa g acima ilustra o quão complicado pode ser um sistema dinâmico discreto, mesmo quando o espaço de fase tem dimensão 1. No caso de sistemas dinâmicos contínuos, já vimos que sistemas em dimensão 1 e 2 são relativamente bem mais simples. O caso de sistemas dinâmicos discretos unidimensionais associados a mapas que são injetivos também são simples, pois a função g correspondente deve ser monótona.

Porém, sistemas dinâmicos discretos associados a homeomorfismos em dimensão maior ou igual a dois, assim como sistemas contínuos em dimensão maior ou igual a três podem exibir uma dinâmica tão complicada, ou mais, quanto a do mapa ternário.

17.2. A ferradura de Smale e o mapa ternário duplo. Considere um homeomorfismo $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} (3x, y/3), & \text{se } x \in [0, 1/3], y \in [0, 1], \\ (3 - 3x, 1 - y/3), & \text{se } x \in [2/3, 1], y \in [0, 1]. \end{cases}$$

com

$$\sigma^{-1}(z, w) = \begin{cases} (z/3, 3w), & \text{se } z \in [0, 1], w \in [0, 1/3], \\ (1 - z/3, 3 - 3w), & \text{se } z \in [0, 1], w \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Observe que a coordenada x de σ é o mapa ternário e a coordenada y de σ^{-1} , também. Ao iterarmos o mapa σ “para frente”, vemos que $\sigma(\Lambda \times [0, 1]) \subset \Lambda \times [0, 1]$. As iterarmos “para trás”, vemos que $\sigma^{-1}([0, 1] \times \Lambda) \subset [0, 1] \times \Lambda$, i.e. $\sigma([0, 1] \times \Lambda) \supset [0, 1] \times \Lambda$. Com isso,

$$\sigma(\Lambda \times \Lambda) = \Lambda \times \Lambda,$$

i.e. Λ^2 é invariante por σ .

Note que se $(x, y_1), (x, y_2) \in \Lambda \times [0, 1]$, então

$$\sigma(x, y_1) - \sigma(x, y_2) = \begin{cases} (0, (y_1 - y_2)/3), & \text{se } x \in [0, 1/3], \\ (0, -(y_1 - y_2)/3), & \text{se } x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Podemos escrever

$$g(x, y) = (g(x), q_x(y)), \quad q_x(y) = \begin{cases} y/3, & \text{se } x \in [0, 1/3], \\ 1 - y/3, & \text{se } x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sigma^n(x, y) &= (g^n(x), q_{g^{n-1}(x)}(q_{g^{n-2}(x)}(\cdots(q_x(y))\cdots))). \\ |q_x(y_1) - q_x(y_2)| &= \frac{1}{3}|y_1 - y_2|. \\ |\sigma^n(x, y_1) - \sigma^n(x, y_2)| &\leq \frac{1}{3^{n-1}}|q_x(y_1) - q_x(y_2)| \leq \frac{1}{3}|y_1 - y_2|.\end{aligned}$$

Logo, todas as órbitas com a mesma coordenada x têm o mesmo comportamento assintótico por iterações de σ . Analogamente, todas as órbitas com a mesma coordenada y têm o mesmo comportamento assintótico por iterações de σ^{-1} .

Note que

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} (0, s_{n+1}s_{n+2}\cdots, 0, s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_1 0 r_1 r_2 \cdots), & \text{se } s_n = 0, \\ (0, \bar{s}_{n+1}\bar{s}_{n+2}\cdots, 0, \bar{s}_{n-1}\bar{s}_{n-2}\cdots \bar{s}_1 2\bar{r}_1\bar{r}_2 \cdots), & \text{se } s_n = 2. \end{cases}$$

Analogamente ao mapa ternário, temos

- (1) Existe um conjunto $\Sigma = \Lambda^2$ que é invariante por σ , i.e. $\sigma(\Sigma) = \Sigma$.
- (2) Há um conjunto enumerável denso em Σ composto de órbitas periódicas.
- (3) Existe um conjunto não-enumerável de órbitas não periódicas.
- (4) Existe uma órbita densa em Σ .
- (5) σ é sensível às condições iniciais em Σ , no sentido de que existe um $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ e todo x_0 em Σ , existe y_0 em Σ satisfazendo $|x_0 - y_0| < \delta$, e $|\sigma^n(x_0) - \sigma^n(y_0)| > \varepsilon$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

O fato de existir uma órbita densa em Σ implica em Σ ser *topologicamente transitivo*, i.e. para quaisquer conjuntos não-vazios A e B relativamente abertos em Σ , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^n(A) \cap B \neq \emptyset$. Isso faz de Σ (e de Λ no caso do mapa ternário) um conjunto *caótico*, i.e., um conjunto com as seguintes propriedades:

- (1) Σ é invariante por σ ;
- (2) σ restrito a Σ é sensível às condições iniciais; e
- (3) Σ é topologicamente transitivo por σ .

Note que para um conjunto invariante topologicamente transitivo ser caótico basta que ele seja sensível em apenas um ponto x_0 , i.e. basta que existam $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in \Sigma$ tais que dado $\delta > 0$, exista $y_0 \in \Sigma$ com $|x_0 - y_0| < \delta$ e $|g^n(x_0) - g^n(y_0)| > \varepsilon$ para algum n . Prove isso!

Um mecanismo fundamental que gerou o conjunto caótico Σ está associado à contração em uma direção, expansão em outra direção, e o dobramento misturando as duas direções.

17.3. Conjuntos caóticos em fluxos.

REFERÊNCIAS

- [1] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, 1973.
- [2] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [3] D. K. Arrowsmith & C. M. Place, *Dynamical Systems - differential equations, maps, and chaotic behavior*, Chapman & Hall, London, 1992.
- [4] S.-N. Chow & J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New-York, 1982.
- [5] C. Foias, *Classroom Notes on ODE*, Indiana University.
- [6] M. Golubitsky & D. G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. I, Springer-Verlag, New-York, 1985.
- [7] J. Guckenheimer & P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [8] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Pure and Applied Mathematics, vol. XXI, John Wiley & Sons, 1969.
- [9] M. W. Hirsch & S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [10] A. Katok & B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, 1995.
- [11] J. P. LaSalle, *The Stability of Dynamical Systems*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 25, SIAM, Philadelphia, 1976.
- [12] J. Palis-Jr. & W. de Melo, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.

- [13] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [14] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 2, Springer-Verlag, New-York, 1990.