Segunda Prova - Integração

Semestre 2018/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

8 de novembro de 2018

<u>Obs</u>: Sejam claros nas suas repostas e façam as devidas justificativas. Boa sorte!

1ª Questão: Determine os conjuntos $\liminf_{n\to\infty} E_n$ e $\limsup_{n\to\infty} E_n$ da sequência de conjuntos

$$E_n = \bigcup_{j=1,\ldots,n} \left(2j - 1 - \max\{(-1)^n, 0\} - \frac{1}{n^2}, 2j - \max\{(-1)^n, 0\} + \frac{1}{n^2} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2ª Questão: Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponha que, para toda função contínua e limitada $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a função composta $\varphi \circ f$ seja mensurável. Mostre que f também é mensurável.

3ª Questão: Seja $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função limitada tal que $x \mapsto f(t, x)$ é Lebesgue mensurável em $[0, 1]$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e $t \mapsto f(t, x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, para quase todo $x \in [0, 1]$. Mostre que a função

$$F(t) = \int_0^1 f(t, x)\ \mathrm{d}x$$

está bem definida e é contínua em todo $t \in \mathbb{R}$.

4ª Questão: Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua e estritamente positiva, i.e. $f(x) > 0$, para todo $0 \leq x \leq 1$. Mostre que $g = 1/f$ é absolutamente contínua em $[0, 1]$, com $g' = -f'/f^2$ quase sempre.