Primeira Prova - Integração

Semestre 2018/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

30 de outubro de 2018

<u>Obs</u>: Sejam claros nas suas repostas e façam as devidas justificativas. Boa sorte!

1ª Questão: Considere a medida de Lebesgue m e a sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos conjuntos

$$E_n = \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2j}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n}\right].$$

(1) Determine explicitamente o conjunto $\liminf_{n\to\infty} E_n$.
(2) Determine explicitamente o conjunto $\limsup_{n\to\infty} E_n$.
(3) Dado um intervalo $[a,b]$ com $0 \leq a < b \leq 1$, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} m([a,b]\cap E_n) = \frac{b-a}{2}.$$

(4) Dado um conjunto mensurável $A \subset [0,1]$ qualquer, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} m(A\cap E_n) = \frac{1}{2}m(A).$$

2ª Questão: Dada uma função real f definida no intervalo $[0,1]$, considere a função $f^\star$ definida por

$$f^\star(x) = \sup_{x\leq y\leq 1} f(y), \quad \forall x \in [0,1].$$

(1) Mostre que se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções definidas em $[0,1]$ que converge pontualmente para f e $\varphi_n(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [0,1]$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência $(\varphi_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para $f^\star$.
(2) Mostre que se φ é uma função simples em $[0,1]$, então $\varphi^\star$ é uma função escada.
(3) Mostre que se f é mensurável e não-negativa, então $f^\star$ também é mensurável.
(4) Dê um exemplo de uma função real f em $[0,1]$ e de uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções reais em $[0,1]$ tais que a sequência converge pontualmente para f mas $(\varphi_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $f^\star$ em um conjunto de medida positiva.

3ª Questão: Seja $E \subset [0,1]$ um subconjunto mensurável em relação à medida de Lebesgue m em $\mathbb{R}$ e seja $a > 0$. Considere a função f dada por $f(t) = m(E\cap[t,t+a])$, para todo $t \in [0,1]$.

(1) Mostre que f é absolutamente contínua em $[0,1]$.
(2) Escreve uma decomposição de f da forma $f = g - h$ onde g e h são não-decrescentes.
(3) Mostre que $f' = \chi_{E-a} - \chi_E$ quase sempre, onde χ_{E-a} e χ_E são as funções características dos respectivos conjuntos $E - a = \{t - a;\ t \in E\}$ e E.