Lista 4 - Integração

Semestre 2018/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

Entregar até o dia 25 de outubro de 2018

1ª Questão: Dê um exemplo de uma função de variação limitada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, com f' integrável em $[0,1]$, tal que a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - f(0) - \int_0^x f'(s)\,\mathrm{d}s$$

se anula nos pontos $x_n = \sum_{j=1}^n (1/2)^j$, $n \in \mathbb{N}$, sendo positiva nos intervalos (x_n, x_{n+1}), quando n é impar, e negativa, quando n é par.

2ª Questão: Seja f uma função contínua definida em um intervalo $[a,b]$, $a < b$. Suponha que existam $u, v \in \mathbb{R}$ tais que o número de Dini $D^+ f$ satisfaça $u \leq D^+ f(x) \leq v$, para todo $x \in [a,b]$. Mostre que

$$uh \leq f(x+h) - f(x) \leq vh,$$

para todo $a \leq x < x+h \leq b$.

3ª Questão: Nos itens abaixo, $f'_+ = \max\{0, f'\}$ e $f'_- = \max\{0, -f'\}$ são as partes positiva e negativa da derivada f' de uma função f.

(1) Dê um exemplo de uma função de variação limitada f e de uma decomposição $f = g - h$, com g, h não-decrescentes, tais que $g' \neq f'_+$ e $h' \neq f'_-$.

(2) Supondo f absolutamente contínua, mostre que existe uma decomposição $f = g - h$ com g, h absolutamente contínuas não-decrescentes e tais que $g' = f'_+$, $h' = f'_-$, e que essa decomposição é única a menos de uma constante, i.e. se g, h e $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ são duas tais decomposições, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $g - \tilde{g} = h - \tilde{h} = C$.

4ª Questão: Mostre que se f é absolutamente contínua em um intervalo $[a,b]$, $a < b$, então a sua variação $V_f = V_f(x) = V(f; a, x)$ também é absolutamente contínua no intervalo $[a,b]$.

5ª Questão: Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} x^\alpha \operatorname{sen}(x^{-\beta}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

onde $\alpha, \beta > 0$.

(1) Observe que g é contínua e que g' existe e é contínua em $x \neq 0$. Mostre que g é integrável em $|x| \leq 1$ se, e somente se, $\alpha > \beta$.

(2) Mostre que g é de variação limitada se, e somente se, $\alpha > \beta$.

(3) Mostre que g é absolutamente contínua se, e somente se, $\alpha > \beta$.

(4) Se $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denote o conjunto dos racionais em $[-1,1]$ e $\gamma_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, são tais que $\sum_n \gamma_n < \infty$, mostre que a função

$$f(x) = \sum_n \gamma_n g(x - q_n), \quad x \in \mathbb{R}$$

é absolutamente contínua no intervalo $[-1,1]$.

6ª Questão: Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções absolutamente contínuas no intervalo $[a,b]$, $a < b$. Mostre que o produto fg também é absolutamente contínuo e que vale a fórmula de integração por partes

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$