Lista 3 - Integração

Semestre 2018/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

Entregar até o dia 9 de outubro de 2018

1ª Questão: Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis não-negativas. Suponha que f_n decaia rapidamente para zero, em medida, no sentido em que

$$m(f_n > \varepsilon) \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0.$$

Mostre que $m(\limsup_{n\to\infty}\{f_n > \varepsilon\}) = 0$ e que $f_n \to 0$ quase-sempre.

2ª Questão: Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis

(1) Suponha que f_n seja uma sequência de Cauchy em medida, i.e.,

$$m(\{|f_n - f_m| > \varepsilon\}) \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Mostre que existe f mensurável tal que $f_n \to f$ em medida.

(2) Suponha que $f_n \to f$ em medida, i.e. para todo $\varepsilon > 0$,

$$m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Mostre que existe uma subsequência que converge pontualmente.

3ª Questão: Considere a função

$$F(t) = \int_0^\infty x^2 e^{-tx}\,\mathrm{d}x, \quad t > 0,$$

que está bem definida tanto como integral de Lebesgue quanto como integral imprória de Riemann. Mostre, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que F é diferenciável para todo $t > 0$, com

$$F'(t) = -\int_0^\infty x^3 e^{-tx}\,\mathrm{d}x, \quad \forall t > 0.$$

4ª Questão: Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções integráveis definidas em um intervalo finito $[a, b]$. Suponha que a sequência seja uniformemente integrável, no sentido em que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_n \int_{|f_n|>\lambda} |f_n|\,\mathrm{d} = 0,$$

e que f_n convirja quase sempre para uma função f. Mostre que f é integrável e que

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$