Lista 3 - Cálculo Infinitesimal II

Semestre 2017/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

5 de outubro de 2016

Obs: Sejam claros nas suas repostas e façam as devidas justificativas. Boa sorte!

1ª Questão: Determine se o limite das seguintes funções, quando $(x,y) \to (0,0)$, existe ou não:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^4+y^4}, \quad g(x,y) = \frac{y^6}{x^4+y^4}, \quad h(x,y) = \frac{x^4+y^6}{x^4+y^4}, \quad u(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^6+y^2}.$$

2ª Questão: Considere uma função $f = f(x,y)$ definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e homogênea de grau $p > 0$, i.e. $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x,y)$, $\forall \lambda > 0$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

(a) Mostre que f é limitada no círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ se, e somente se,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

(b) Dê um exemplo de uma função f definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e homogênea de grau $p > 0$ mas cujo limite, quando $(x,y) \to (0,0)$, não existe.

3ª Questão: Encontre as derivadas parciais da função

$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2y^2}$$

e argumente que f é diferenciável em todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4ª Questão: Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

que é uma extensão da função $\varphi(y/x^3)x$, para $\varphi(s) = s/(1+s^2)$. Mostre que f é contínua em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tem todas as derivadas direcionais nulas no ponto $(x,y) = (0,0)$, mas a função não é diferenciável em $(x,y) = (0,0)$.

5ª Questão: Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

que é uma extensão da função $\varphi(y/x)x^2$, para $\varphi(s) = s(1-s^2)/(1+s^2)$. Mostre que f é contínua em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, verifique a continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de f e mostre que as derivadas parciais de segunda ordem existem, mas que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

6ª Questão: Considere a função $f(x,y) = (xy-1)^{1/3}$, que está definida para todo (x,y) no plano $\mathbb{R}^2$. Podemos dizer que

(1) $f_x(x,y) = f_y(y,x)$ para todo (x,y) onde as derivadas parciais existem.
(2) f é diferenciável em todo o plano.
(3) As derivadas parciais existem em todo o plano mas a função não é diferenciável no plano todo.
(4) $f_x(2,1) = 2/3$
(5) $f_y(y,y)$ está definido para todo $y \neq 0$.

7ª Questão: Suponha que uma função $f(x,y)$ seja continuamente diferenciável em todo o plano $\mathbb{R}^2$ e tenha um único ponto crítico em (x_0, y_0), com $x_0, y_0 > 0$. Então podemos garantir que a função $g(x,y) = f(x^2, y^2)$

(1) possui pelo menos cinco pontos críticos.
(2) possui um único ponto crítico, em (x_0^2, y_0^2).
(3) possui um único ponto crítico, em $(0,0)$.
(4) possui exatamente dois pontos críticos, em $(0,0)$ e (x_0^2, y_0^2).
(5) possui exatamente dois pontos críticos, em $(0,0)$ e $(\sqrt{x_0}, \sqrt{y_0})$.

8ª Questão: Seja $f = f(x,y,z)$ uma função duas vezes continuamente diferenciável no plano e considere a função $g(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$. Encontre todas as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de g em função de r, θ e z e das derivadas parciais de f. Mostre, ainda, que

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = g_{rr} + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta} + \frac{1}{r} g_r + g_{zz}.$$

Esta é a representação do operador Laplaciano $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ em coordenadas cilíndricas.

9ª Questão: Quais são todos os pontos em que a direção de maior crescimento da função $f(x,y) = x^4 - 2y^2$ é dada pelo vetor unitário $\mathbf{v} = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$?

10ª Questão: Considere uma função diferenciável $f = f(x,y)$ homogênea de grau $n > 0$, i.e. $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$, para todo $t > 0$ e todo (x,y) em que a função está definida, sendo que, se ela está definida em um determinado ponto (x,y), então ela está necessariamente definida também na semireta (tx,ty), $t > 0$. Mostre que

$$nf(x,y) = x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{f(x,y)}{\partial y},$$

para todo (x,y) no domínio de definição de f.

11ª Questão: Qual a equação do plano tangente à superfície de nível de $\varphi(x,y,z) = x^2 + 4xy + y^4 + z^3$ no ponto $(2,1,3)$?

12ª Questão: Para cada $c \in \mathbb{R}$, considere a quádrica $z = x^2 - y^2 + c$ e determine o conjunto dos pontos dessa quádrica cujo plano tangente contém a origem.