Lista 2 - Cálculo Infinitesimal II

Semestre 2017/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

19 de setembro de 2017

Obs: Sejam claros nas suas repostas e façam as devidas justificativas. Boa sorte!

1ª Questão: Considere a espiral logarítmica $\mathbf{r}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\alpha t), \operatorname{sen}(\alpha t))$, $t \in \mathbb{R}$, onde $\alpha > 0$.

(1) Ache a curvatura e os vetores tangente e normal da curva, em função do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.
(2) Ache uma reparametrização da curva pelo comprimento de arco.
(3) Ache uma reparametrização pelo comprimento de arco da restrição dessa curva ao intervalo $[0, 1]$.

2ª Questão: Considere uma curva parametrizada regular $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sejam $t_0 \in I$ e $\mathbf{T}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)/\|\mathbf{r}'(t_0)\|$. Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário qualquer. Como a curva é regular, temos que $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{r}(t_0)$, para $t \in I$ suficientemente próximo de t_0. Para tais valores de t, considere o ângulo $\theta(t)$ entre o vetor $\mathbf{v}$ e o vetor $\mathbf{w}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$. Mostre que $\theta(t)$ converge para zero, quando $t \to t_0$, se, e somente se, $\mathbf{v} = \mathbf{T}(t_0)$. Ou seja, de fato, a reta gerada por $\mathbf{r}(t_0) + s\mathbf{T}(t_0)$, $s \in \mathbb{R}$, é tangente à curva no ponto $\mathbf{r}(t_0)$.

3ª Questão: Considere as curvas definidas a seguir no plano xy. Observe que todas elas passam pela origem $\mathbf{0}$ e têm a sua curvatura $\kappa(\mathbf{P})$ bem definida em todo ponto $\mathbf{P}$ da curva fora da origem. Faça um esboço de cada uma dessas curvas e encontre a curvatura $\kappa(\mathbf{0})$, caso ela esteja definida na origem, ou determine o que acontece com o limite de $\kappa(\mathbf{P})$ quando $\mathbf{P}$ converge para a origem.

(1) $y = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(2) $y = |x|^p$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $0 < p < 1$.
(3) $x = t^4$, $y = t^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

4ª Questão: Determine a curvatura, a torção e os vetores tangente, normal e binormal da curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

5ª Questão: Uma molécula de DNA é composta por duas hélices circulares, onde cada hélice tem um raio de cerca de 10 ångströms (sendo $1\text{Å} = 10^{-8}$ cm), sobe 34 Å a cada volta completa e dá cerca de $2,9 \times 10^8$ voltas completas. Estime o comprimento total de cada hélice. (Questão 59 da Seção 13.3 do Stewart vol. 2, tradução da sexta edição norte-americana, Cengage Learning, São Paulo 2010.)

6ª Questão: Encontre em que ponto o plano normal à curva $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ é paralelo ao plano $2x - 4y + 6z = 4$.

7ª Questão: Mostre que as curvas $\mathbf{r}_1(t) = (t, t^3)$, $\mathbf{r}_2(t) = (t, -t^3)$, $\mathbf{r}_3(t) = (t, |t|^3)$, e $\mathbf{r}_4(t) = (t, -|t|^3)$, $t \in \mathbb{R}$, têm todas a mesma curvatura $k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, com $k(0) = 0$

(essas curvas exemplificam o fato da curvatura só determinar unicamente a curva – a menos de movimentos rígidos – quando a curvatura é estritamente positiva).

8ª Questão: Considere uma haste dada pelo segmento de reta que liga a origem a um ponto $\mathbf{H} = (0, 0, h)$, para algum $h > 0$, e uma fonte de luz em um ponto $\boldsymbol{\gamma}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, com $z_0 > h$. A sombra da haste no plano $z = 0$, causada por essa fonte de luz, é um segmento de reta que liga a origem $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ a um ponto extremo $\boldsymbol{\sigma}_0 = (\xi_0, \eta_0, 0)$, $\xi_0, \eta_0 \in \mathbb{R}$. Determine ξ_0 e η_0 em função de x_0, y_0, z_0 e h. Considerando, agora, que a fonte de luz se move ao longo de um caminho definido por uma curva parametrizada $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $z(t) > h$, para todo $t \in I$, encontre uma condição em $\boldsymbol{\gamma}$ para que o extremo $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\xi(t), \eta(t), 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ da sombra seja uma curva parametrizada regular. Interprete geometricamente essa condição.

9ª Questão: Seja $k : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Fixe um $s_0 \in I$, considere uma primitiva $\theta : I \to \mathbb{R}$ qualquer de k e defina a curva $\boldsymbol{\gamma}(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, por

$$x(s) = \int_{s_0}^{s} \cos\theta(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma, \quad y(s) = \int_{s_0}^{s} \operatorname{sen}\theta(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma, \qquad \forall s \in I.$$

(1) (1 ponto) Mostre que $\boldsymbol{\gamma}$ é uma curva duas vezes continuamente diferenciável e parametrizada pelo comprimento de arco.
(2) (1 ponto) Mostre que a curvatura de $\boldsymbol{\gamma}$ é exatamente k.
(3) (1 ponto) Dados um ponto qualquer $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ do plano e um vetor unitário $\mathbf{T}_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, modifique a definição de $\boldsymbol{\gamma}$ de forma a ainda ter uma curva duas vezes continuamente diferenciável, parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura k e tal que $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \mathbf{P}_0$ e $\boldsymbol{\gamma}'(t_0) = \mathbf{T}_0$.

10ª Questão: Considere uma curva $\boldsymbol{\gamma}$ que pertence ao cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = a^2\}$, onde $a > 0$, e com a seguinte propriedade: em cada ponto $\mathbf{P}$ da curva, o ângulo entre o eixo y e o plano tangente ao cilindro em $\mathbf{P}$ é igual ao ângulo entre o eixo z e a reta tangente à curva em $\mathbf{P}$. Mostre que essa curva pode ser parametrizada por

$$\boldsymbol{\gamma}(\theta) = (a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta, c \pm a\ln(\operatorname{sen}\theta)),$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante e θ é um parâmetro que varia em um intervalo contido em $(0, \pi)$.