Lista 1 - Cálculo Infinitesimal II

Semestre 2017/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

15 de agosto de 2017

1ª Questão: Ache a solução geral da equação

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y\cos x.$$

2ª Questão: Ache a solução geral da equação $(x+\alpha)\dot{x} = x$, onde t é a variável independente, $x = x(t)$ é a variável dependente, a derivada "temporal" é denotada por $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ é um parâmetro . Faça, ainda, o esboço do conjunto de soluções nos casos $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$.

3ª Questão: Considere a equação $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -ph^p$, onde $0 < p < 1$, representando a variação, em relação ao tempo t, do nível $h(t)$ de um líquido em um certo recipiente. Encontre a solução particular da equação acima com a condição inicial $h(0) = 1$, indicando o intervalo de definição da solução, e determine o valor de p que dá o menor tempo para que o recipiente seja esvaziado de $h = 1$ até $h = 0$.

4ª Questão: Considere a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = 2x^3 + 2x.$$

Mostre que a mudança de variável dependente $z = y - x^2$ transforma a equação acima em uma equação separável e ache a solução geral $y = y(x)$ da equação.

5ª Questão: Mostre que a mudança de variável dependente $z = y^2$ transforma uma equação da forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay + \frac{b}{y},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, em uma equação linear de primeira ordem. Ache, ainda, a solução particular do problema com $a = b = 1/2$ e condição inicial $y(0) = y_0 > 0$, indicando o intervalo de existência da solução.

6ª Questão: Um navio está em rota de colisão com um porto que está a $1000\,\mathtt{m}$ de distância, a uma velocidade de $9\,\mathtt{m/s}$, quando reverte as turbinas e começa a desacelerar segundo a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2},$$

onde $\alpha = (1/50)\,\mathtt{m}^{1/2}\mathtt{s}^{-3/2}$ e x é a distância percorrida pelo navio a partir do momento da reversão das turbinas. Determine se o navio colide como porto ou não. Caso não haja colisão, determine quanto tempo decorre até o navio parar e a quantos metros do porto ele para. Caso haja colisão, determine o momento da colisão e a velocidade do navio no momento da colisão.

7ª Questão: Ache a solução geral da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 20\,\mathrm{sen}\,t.$$

8ª Questão: Considere o sistema massa-mola forçado com ressonância dado por $m\ddot{x} + kx = k(l + h_0\,\mathrm{sen}(\sqrt{\frac{k}{m}}t))$. Mostre que todas as soluções $x(t)$ oscilam com amplitude crescendo linearmente. Mais precisamente, mostre que

$$\lim_{t\to\infty} \max_{0\le s\le t} \frac{|x(s)|}{t} = \frac{h_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

9ª Questão: Considere a equação de um corpo em queda livre com amortecimento quadrático

$$m\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -mg - k\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

onde $h = h(t)$ é a altura do corpo em relação ao solo, m é a massa do corpo, $g = 9.8\,\mathtt{m/s}^2$ é a aceleração da gravidade próximo à superfície da Terra e k é um parâmetro de resistência do ar. Quando necessário, use uma ferramenta computacional de sua escolha para responder às seguintes questões:

(1) Suponha que um corpo de massa $m = 72\,\mathtt{kg}$ comece a cair de uma altura de 2500 metros em relação ao solo, com velocidade inicial nula e parâmetro de resistência do ar $k_1 = 0,24\,\mathtt{kg/m}$. Suponha ainda que, ao chegar a 1500 metros de altura, o paraquedas é acionado, mas o corpo continua caindo por mais 1,6 segundos com o mesmo parâmetro k_1 até o paraquedas estar completamente aberto e o corpo passar a cair com o parâmetro de resistência do ar $k_2 = 12\,\mathtt{kg/m}$.
   - (a) Estime quanto tempo após o início da queda o paraquedas é acionado e determine a velocidade do corpo neste momento.
   - (b) Estime o tempo total de queda até chegar no solo e a velocidade do corpo ao tocar o solo.
   - (c) Trace os gráficos da altura e da velocidade do corpo em função do tempo, durante toda a queda.

(2) Suponha, novamente, que um corpo de massa $m = 72\,\mathtt{kg}$ comece a cair de uma altura de 2500 metros em relação ao solo, com velocidade inicial nula e parâmetro de resistência do ar $k_1 = 0,24\,\mathtt{kg/m}$, mas agora o paraquedas é acionado após um instante indeterminado $t_a > 0$. Como antes, após o acionamento do paraquedas, o corpo continua caindo por mais 1,6 segundos com o mesmo parâmetro k_1 até o paraquedas estar completamente aberto e o corpo passar a cair com o parâmetro de resistência do ar $k_2 = 12\,\mathtt{kg/m}$.
   - (a) Encontre o tempo mínimo $t_{\min}$ de queda, correspondendo a uma queda totalmente com o paraquedas sem estar completamente aberto.
   - (b) Para t_a entre 0 e o $t_{\min}$, trace o gráfico das funções $T(t_a)$ e $v(t_a)$ definidas, respectivamente, pelo tempo total de queda, até o momento em que o corpo toca o solo, e a velocidade $v(t_a)$ do corpo ao tocar o solo.
   - (c) Determine o maior instante t_a que garante que a velocidade $v(t_a)$ seja, no máximo, $8\,\mathtt{m/s}$.