Lista 1 - Cálculo Infinitesimal II

Semestre 2016/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

6 de outubro de 2016

Obs: Sejam claros nas suas repostas e façam as devidas justificativas. Boa sorte!

1ª Questão: Ache a solução geral da equação $(x + \alpha)\dot{x} = x$, onde t é a variável independente, $x = x(t)$ é a variável dependente, a derivada "temporal" é denotada por $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ é um parâmetro . Faça, ainda, o esboço do conjunto de soluções nos casos $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$.

2ª Questão: No sistema massa-mola forçado com ressonância,

$$m\ddot{x} + kx = k(l + h_0 \operatorname{sen}(\sqrt{\frac{k}{m}}t)),$$

mostre que todas as soluções $x(t)$ oscilam com amplitude crescendo linearmente. Mais precisamente, mostre que

$$\lim_{t\to\infty} \max_{0\leq s\leq t} \frac{|x(s)|}{t} = \frac{h_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3ª Questão: Considere a espiral logarítmica $\mathbf{r}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\alpha t), \operatorname{sen}(\alpha t))$, $t \in \mathbb{R}$, onde $\alpha > 0$.

(1) Ache a curvatura e os vetores tangente e normal da curva, em função do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.
(2) Ache uma reparametrização da curva pelo comprimento de arco.

4ª Questão: Considere as curvas definidas a seguir no plano xy. Observe que todas elas passam pela origem $\mathbf{0}$ e têm a sua curvatura $\kappa(\mathbf{P})$ bem definida em todo ponto $\mathbf{P}$ da curva fora da origem. Faça um esboço de cada uma dessas curvas e encontre a curvatura $\kappa(\mathbf{0})$, caso ela esteja definida na origem, ou determine o que acontece com o limite de $\kappa(\mathbf{P})$ quando $\mathbf{P}$ converge para a origem.

(1) $y = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(2) $y = |x|^p$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $0 < p < 1$.
(3) $x = t^4$, $y = t^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

5ª Questão: Mostre que a curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ tem curvatura constante.

6ª Questão: Encontre em que ponto o plano normal à curva $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3)$ é paralelo ao plano $2x - 4y + 6z = 4$.

7ª Questão: Questão 59 da Seção 13.3 do Stewart (Stewart vol. 2, tradução da sexta edição norte-americana, Cengage Learning, São Paulo 2010): Uma molécula de DNA é composta por duas hélices circulares, onde cada hélice tem um raio de cerca de 10 ångströms (sendo $1\text{Å} = 10^{-8}$ cm), dá cerca de $2,9 \times 10^8$ voltas completas e sobe 34 Å a cada volta completa. Estime o comprimento de cada hélice.

8ª Questão: Mostre que um pêndulo flexível restrito por curvas cicloidais (como na Figura 17.18 do Simmons, pg 267) percorre um trecho de outra curva cicloidal (veja Apêndice A.13, sobre evolutas e involutas, também no Simmons).

9ª Questão: Sejam $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ os vetores tangente, normal e binormal de uma curva $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ três vezes continuamente diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco. Já vimos que, quando a derivada $\mathbf{T}'$ não se anula, o vetor normal $\mathbf{N}$ está bem definido e

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa \mathbf{N},$$

onde κ é a curvatura. Esta equação e as duas equações seguintes são conhecidas como *fórmulas de Frenet-Serret*.

(1) Mostre que existe uma função escalar $\tau : I \to \mathbb{R}$, que é chamada de *torção*, tal que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau \mathbf{N}.$$

(2) Mostre que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B},$$

onde κ é a curvatura.

10ª Questão: Mostre que uma curva é planar se, e somente se, a sua torção τ é identicamente nula.

11ª Questão: Mostre que o plano osculador (gerado pelos vetores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$) de uma curva parametrizada $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, em um ponto $\mathbf{x}(t)$, quando bem definido, pode ser descrito pela equação

$$\Pi_t = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3;\ (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)) = 0\},$$

12ª Questão: Seja $\mathsf{Q} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ uma matriz real 3×3 e seja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ arbitrário. Mostre que Q é isométrica se, e somente se, $\mathbf{T}_2(t) = \mathsf{Q}\mathbf{T}_1(t)$, para toda curva parametrizada $\mathbf{x}_1 : I \to \mathbb{R}^3$ e todo t no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, onde $\mathbf{T}_1$ é o vetor tangente de $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{T}_2$ é o vetor tangente da curva $\mathbf{x}_2 : I \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a} + \mathsf{Q}\mathbf{x}_1$. (Lembramos que Q é isométrica quando $\|\mathsf{Q}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, para todo vetor $\mathbf{v}$, ou seja, Q é ortogonal, satisfaz $\mathsf{Q}^{\mathrm{tr}} = \mathsf{Q}^{-1}$.)