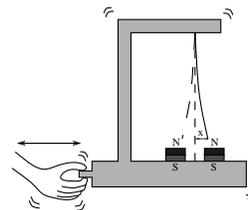
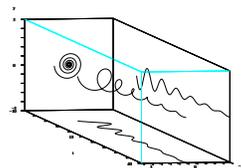
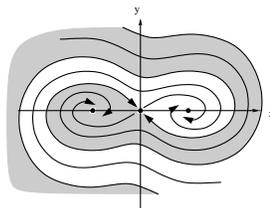
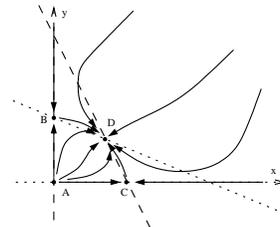
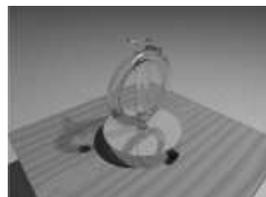
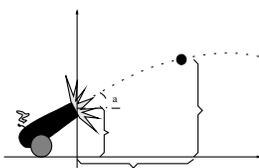
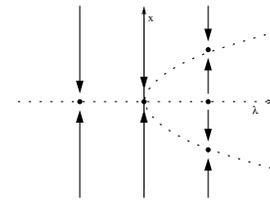
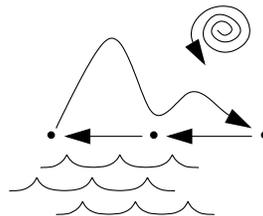
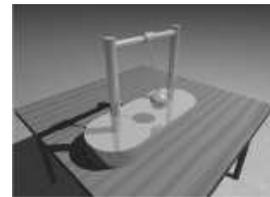
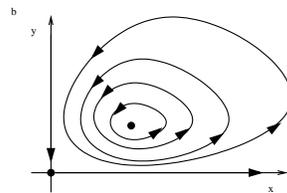
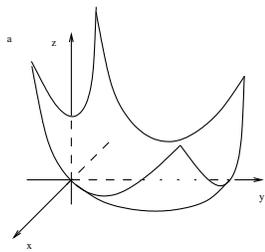


# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Ricardo M. S. Rosa



IM - UFRJ  
Maio de 2017



## Sumário

Prefácio	5
Capítulo 1. Introdução às Equações Diferenciais	9
1. Introdução e modelos simples	9
2. Soluções gerais e particulares e resolução de equações separáveis	23
Capítulo 2. Existência e Unicidade de Soluções de Equações de Primeira Ordem	35
1. Existência de soluções e métodos de Euler e de Picard	35
2. Unicidade e não-unicidade em relação às condições iniciais	41
Capítulo 3. Equações de Primeira Ordem - Aspectos Geométricos	49
1. *Isóclinas e o estudo geométrico de equações não-autônomas	49
2. Equações autônomas e linhas de fase	55
3. Outros aspectos de linhas de fase	65
4. Equivalência qualitativa e bifurcações unidimensionais	79
Capítulo 4. Equações de Primeira Ordem - Soluções Explícitas	91
1. Soluções explícitas via separação de variáveis	91
2. Equações homogêneas - transformação em equações separáveis	95
3. Equações exatas	99
4. Fatores de integração e equações lineares	106
Capítulo 5. Equações de Segunda Ordem - Soluções Explícitas	119
1. Redução de ordem e aplicações	119
2. Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes	125
3. Equações lineares não-homogêneas com coeficientes constantes	138
4. *Sistema completo de soluções, Wronskiano e o método de variação de constantes	150
Capítulo 6. Sistemas Bidimensionais Lineares	157
1. Introdução	157
2. Diagrama de fase nos casos canônicos	164
3. Diagrama de fase no caso geral e classificação de sistemas	172
4. *Exponencial de matrizes e soluções de sistemas autônomos	188
5. *Sistemas lineares não-homogêneos não-autônomos	191
Capítulo 7. Sistemas Bidimensionais Não-Lineares	195
1. Introdução	195

2. Pontos fixos e linearização	197
3. Órbitas regulares	204
Capítulo 8. Sistemas Conservativos e Aplicações	209
1. Sistemas conservativos e o modelo predador-presa de Lotka-Volterra	209
2. Sistemas hamiltonianos e a equação do pêndulo não-amortecido	217
3. Equação de Duffing e outros potenciais de sistemas hamiltonianos	226
Capítulo 9. Sistemas Não-Conservativos e Aplicações	237
1. *Perturbações dissipativas de sistemas conservativos	237
2. Sistemas não-conservativos e o modelo de competição entre espécies	240
3. *Ciclos limites e osciladores não-lineares	252
Respostas (Parciais) de Exercícios Seleccionados	257
Referências Bibliográficas	273
Índice Remissivo	275

## Prefácio

Este texto começou a ser escrito em 2002, quando fiquei responsável pela primeira vez pela disciplina de Equações Diferenciais do IM-UFRJ. Na época, essa disciplina costumava enfatizar os vários métodos de resolução analítica de equações diferenciais ordinárias, buscando soluções explícitas para equações especiais. Essa ideia era seguida também em vários cursos do gênero em outras universidades do país.

Quando assumi a disciplina, no entanto, resolvi dar grande ênfase à análise geométrica das equações, acompanhando os avanços obtidos com a teoria de sistemas dinâmicos. Sendo, porém, uma disciplina de terceiro período de graduação, o uso de ferramentas de análise matemática deveria ser restrito, devendo o conteúdo ser baseado em técnicas de cálculo vetorial, geometria analítica e álgebra linear básica.

Isso não foi empecilho para a criação de uma disciplina com conteúdo bastante interessante. Equações diferenciais estão presentes na modelagem de inúmeros fenômenos, nas mais diversas áreas de aplicação, e o estudo desses modelos é fascinantes mesmo com técnicas matemáticas simples. A motivação, aliás, através do uso de diversos modelos, era outro ponto que gostaria de explorar.

Este texto tem evoluído constantemente e ainda tenho em mente algumas mudanças antes de considerá-lo pronto para uma publicação “oficial”, digamos assim.

O texto foi desenvolvido tendo em mente a atual ementa do curso, reproduzida a seguir. Nesse sentido, acho que a parte computacional ainda está um pouco deficiente.

### Objetivos:

Neste curso, além da familiarização com alguns conceitos e métodos essenciais de equações diferenciais, busca-se o desenvolvimento de três aspectos fundamentais. Primeiramente, a importância de equações diferenciais na *modelagem* dos mais diversos fenômenos, incluindo as clássicas aplicações em mecânica, assim como os modelos de dinâmica populacional, reações químicas e bioquímicas e economia. Busca-se, também, destacar a importância e a complexidade de *equações não-lineares*, que aparecem na maioria das aplicações mais realistas, lançando-se mão de mais estudos qualitativos. E, devido à complexidade dos sistemas não-lineares, busca-se estimular o uso de *ferramentas computacionais* na análise dos modelos. O estudo analítico e geométrico está concentrado em modelos unidimensionais e bidimensionais, mas estudos numéricos de modelos em mais dimensões devem ser trabalhados em listas e/ou projetos paralelos.

### Tópicos:

- **Introdução às equações diferenciais (4 horas):** Equações diferenciais de ordem  $n$ . Modelos simples (e.g. decaimento radioativo, corpo em queda livre). Solução geral versus solução particular. Condições iniciais. Equações separáveis.
- **Equações de primeira ordem - existência e unicidade (4 horas):** Existência de soluções particulares e gerais. Método de Euler. Método de Picard. Unicidade versus não-unicidade de soluções particulares.
- **Equações de primeira ordem - aspectos geométricos (8 horas):** Isóclinas. Estudo geométrico de equações não-autônomas. Equações autônomas. Linhas de fase. Bifurcações unidimensionais. Aplicações: dinâmica populacional, reações químicas, modelos econômicos.
- **Equações de primeira ordem - aspectos computacionais (2 horas):** Estudo numérico de equações não-lineares, linhas de fase e bifurcações.
- **Equações de primeira ordem - soluções explícitas (8 horas):** Mais equações separáveis. Equações homogêneas. Equações lineares. Equações exatas. Fatores de integração.
- **Equações de segunda ordem redutíveis a de primeira ordem (4 horas):** Mudança de variável dependente. Mudança de variável independente. Aplicações: equação da corda suspensa, corpo em queda livre com resistência do ar, lançamento de um projétil, etc.
- **Equações lineares de segunda ordem - soluções explícitas (6 horas):** Polinômios característico. Soluções analíticas (raízes reais distintas, reais iguais e complexas conjugadas). Soluções explícitas de equações forçadas por polinômios, exponenciais e solenoidais. Oscilador harmônico forçado.
- **Sistemas bidimensionais lineares (4 horas):** Sistemas lineares autônomos. Casos canônicos e não-canônicos. Plano de fase.
- **Sistemas bidimensionais não-lineares autônomos integráveis (8 horas):** Sistemas integráveis. Aplicações: equação de Lotka-Volterra (predador-presa), equação do pêndulo sem atrito, equação da mola (normal, macia e dura), equação de Duffing.
- **Sistemas bidimensionais não-lineares autônomos não-integráveis (8 horas):** Princípio da linearização. Modelo de espécies em competição. Equação do pêndulo com atrito. Oscilador de Van-der-Pol. Modelos de reações químicas e bioquímicas. Modelos em economia.

### Referências Bibliográficas:

- D. K. Arrowsmith & C. M. Place, *Dynamical Systems - differential equations, maps, and chaotic behavior*, Chapman & Hall, London, 1992.
- Rodney C. Bassanezi & Wilson C. Ferreira Jr., *Equações Diferenciais com Aplicações*, Editora Harbra Ltda, 1988.
- William E. Boyce & Richard C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, John Wiley & Sons, Inc., 1977.

- D. G. Figueiredo & A. V. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, (Studies in Nonlinearity), Perseus Books Group, 2001.



## CAPÍTULO 1

# Introdução às Equações Diferenciais

### 1. Introdução e modelos simples

Equações diferenciais estão presentes em diversos modelos em física, química, biologia, economia, engenharia, etc. Vários fenômenos envolvem a variação de uma quantidade em relação a outra, levando naturalmente a modelos baseados em equações diferenciais. Podemos ter variações temporais de, por exemplo, a posição de um objeto, a temperatura de um material, a concentração de um agente químico, a concentração de um poluente ou nutriente em um meio, a umidade do ar, o número de habitantes de uma cidade, a densidade de bactérias de uma cultura, a densidade de massa de um gás, o valor de uma mercadoria, o câmbio entre moedas, o produto interno bruto de um país, etc. Além de variações temporais dessas quantidades, podemos ter variações em relação a outras quantidades, como variação de temperatura em relação à posição e variação de densidade de massa de um fluido em relação à temperatura, por exemplo.

As equações diferenciais são expressões matemáticas de certas leis envolvidas em uma modelagem, que podem, por exemplo, ser leis fundamentais, como a segunda lei de Newton, empíricas, como em reações químicas, ou heurísticas, como em dinâmica populacional, conforme veremos adiante.

Equações diferenciais simples aparecem em Cálculo I, quando do cálculo de primitivas de funções. Neste caso, dada uma função  $g = g(t)$ , buscamos uma função  $x = x(t)$  tal que

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t).$$

A relativa simplicidade desta equação está no fato de que o lado direito da equação acima não depende da incógnita  $x = x(t)$ . A derivada de  $x = x(t)$  está dada explicitamente em termos de uma função conhecida. Nesse caso, a solução pode ser obtida, em princípio, por integração direta.

Por outro lado, as equações diferenciais de maior interesse são tais que a derivada da função procurada depende da própria função. Um exemplo é a equação

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x,$$

onde  $\lambda > 0$ . Esta equação aparece em decaimento radioativo, que veremos a seguir. Se  $x = x(t)$  indica a massa de um material radioativo, a primeira derivada  $x'(t) = dx/dt$  indica a taxa de variação dessa massa em relação ao tempo. A equação diferencial diz que essa taxa de variação é negativa, indicando um decaimento, e esse decaimento é proporcional à

massa do objeto, em cada instante de tempo. Isso é natural, pois quanto maior a massa, maior o decaimento, ou seja, mais átomos desse material se desintegram em outros. Que essa dependência é linear segue de observações experimentais; essa é uma lei *empírica*.

Mais geralmente, uma *equação diferencial* é uma equação cuja incógnita é uma função e cuja equação envolve derivadas dessa função procurada. Mais especificamente, consideramos uma equação da forma

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0.$$

onde  $t$  é uma *variável independente*,  $F = F(t, x, x_1, \dots, x_n)$  é uma função real de  $n + 2$  variáveis e  $x = x(t)$  é uma *variável dependente*, que é a função procurada (*incógnita*). Esta é uma equação de *ordem*  $n$ , indicando a derivada de ordem mais alta presente na equação.

A equação

$$\frac{dx}{dt} = g(t).$$

pode ser escrita na forma acima tomando

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = g(t) - \frac{dx}{dt}.$$

Analogamente, a equação

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$$

corresponde a

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \lambda x + \frac{dx}{dt}.$$

Ambas são equações de primeira ordem. Outros exemplos são

$$\frac{d^4 x}{dt^4} = \cos(tx), \quad x^2 \frac{d^3 x}{dt^3} + \cos t + t = 0, \quad \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - 2x\right)^2 = x^2 + 1, \quad \cos\left(\frac{dx}{dt}\right) = \sin(x).$$

que são equações de ordem 4, 3, 2 e 1, respectivamente. Observe que, em cada equação de ordem  $n$ , os termos de ordem mais baixa (ou seja, as derivadas de ordem menor que  $n$ ) podem ou não aparecer explicitamente.

Podemos, também, fazer uma distinção quanto à presença explícita da variável  $t$  na equação diferencial. Compare, por exemplo, as equações

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad \frac{dx}{dt} = tx.$$

À esquerda, a variável  $t$  só aparece implicitamente, na derivada de  $x$ , enquanto que à direita, a variável  $t$  aparece explicitamente no lado direito. Mais geralmente, podemos considerar equações das duas formas

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0, \quad F\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0.$$

com a variável independente  $t$  aparecendo explicitamente ou não. Quando a variável  $t$  não aparece explicitamente, temos o que chamamos de *equação autônoma*. Caso contrário, temos uma *equação não-autônoma*.

A idéia é que equações autônomas modelam fenômenos fechados, sem interferência sazonal externa no sistema. Pode até haver uma influência externa, como a gravidade, mas ela não pode variar com o tempo. Por outro lado, em equações não-autônomas, algum fator externo pode estar influenciando o sistema e variando com o tempo. Por exemplo, em modelos em que a radiação solar é importante, a equação diferencial tem que incluir algum mecanismo explicitamente dependente do tempo e relacionado com a variação da radiação segundo a hora do dia e a época do ano. Em geral, a análise de sistemas autônomos é mais simples. Isso será explorado ao longo do curso.

Quanto à notação, é claro que ela não é rígida, podemos escrever, por exemplo,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

onde  $x$  é a variável independente e  $y = y(x)$ , a função procurada. A notação apropriada depende do contexto; a variável independente pode denotar o instante de tempo  $t$  ou uma posição  $x$ , por exemplo, e a incógnita pode ser a posição  $x$  de um objeto, a temperatura  $T$  de um material, a concentração  $s$  de alguma substância química, o valor  $p$  de um produto financeiro, etc.

Para simplificar a notação, podemos usar  $x', x'', x''', x^{(iv)}, x^{(v)}, \dots$  para indicar as derivadas, quando a variável independente estiver clara no contexto. Assim, as equações acima podem ser escritas como

$$x^{(iv)} = \cos(tx), \quad x^2 x''' + \cos t + t = 0, \quad (x'' - 2x)^2 = x^2 + 1, \quad \cos(x') = \sin(x).$$

No caso específico da variável independente ser uma variável temporal, é costume, principalmente em Mecânica Clássica, se utilizar as notações  $\dot{x}$  e  $\ddot{x}$  para indicar as derivadas de primeira e segunda ordem, comuns nesses problemas graças à lei de Newton.

Uma equação diferencial do tipo descrito acima é dita *ordinária*, pois envolve apenas derivadas em relação a uma única variável independente real. Veremos, também, sistemas envolvendo mais de uma equação diferencial ordinária, com uma mesma variável independente. Há, porém, vários outros tipos de equações diferenciais, como *parciais*, *complexas*, *integro-diferenciais*, *funcionais*, *estocásticas*, *com retardamento*, etc. Essas outras equações diferenciais modelam uma gama ainda maior de fenômenos e possuem, em geral, características mais complicadas que as das equações ordinárias, mas há muitas semelhanças e o entendimento destas é fundamental para o das outras.

**1.1. Corpo em queda livre.** Um objeto de massa  $m$  se encontra a uma distância  $h(t)$  do solo (figura 1.1). O seu peso é o produto  $mg$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade. A sua velocidade vertical é a derivada  $dh/dt$ , e a sua aceleração,  $d^2h/dt^2$ . Pela segunda lei de Newton (*força = variação de momento = massa vezes aceleração*, no caso de massa

constante), temos

$$-mg = m \frac{d^2 h}{dt^2}.$$

o que nos leva à seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -g.$$

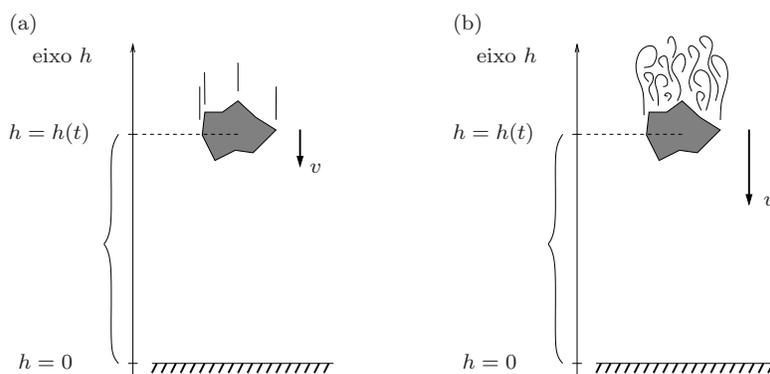


FIGURA 1.1. Corpo em queda livre, com altura  $h(t)$  em relação ao solo e velocidade  $v$  no caso (a) laminar, com baixa velocidade, e (b) turbulento, com alta velocidade.

No caso de levarmos em consideração a resistência do ar, devemos adicionar um termo dependente da velocidade  $dh/dt$ . Diferentes modelagens costumam ser consideradas, tais como resistência dependendo linearmente ou quadraticamente da velocidade. Na prática, a dependência é mais complicada e a resistência ainda depende da forma do objeto, conforme estudado em aerodinâmica. Tipicamente, a baixas velocidades, a dependência é predominantemente linear, ao passo que a altas velocidades, devido à turbulência do ar próxima à superfície do objeto, a resistência se torna predominantemente quadrática.

Uma maneira de entender a modelagem dessa resistência do ar é a seguinte. Imagine que o corpo tenha uma seção horizontal de área  $A$  (perpendicular ao eixo vertical  $h$ ). Seja  $v = dh/dt$  a sua velocidade. Em cada unidade de tempo  $t$ , o objeto percorre uma distância  $d = vt$  e, durante esse tempo, ele desloca uma massa de ar da ordem de  $\rho Ad = \rho Avt$ , onde  $\rho$  é a densidade do ar. Digamos que essa massa de ar saia da frente do objeto e passe para trás dele, ganhando velocidade e passando a se deslocar com a mesma velocidade  $v$  que o objeto, pelo menos por um breve instante de tempo (fenômeno chamado de “vácuo”, em corridas de automóvel). Com isso, essa massa de ar ganha um momento da ordem de

$$p = \text{momento} = \text{massa vezes velocidade} = \rho Av^2 t.$$

Isso significa que essa massa de ar sofreu a ação de uma força igual, pela segunda lei de Newton, a

$$f = \frac{dp}{dt} = \rho Av^2.$$

Como a toda ação corresponde uma reação de igual intensidade, isso significa que essa massa de ar exerce sobre o objeto uma força de igual intensidade e de sentido contrário. Na verdade, isso expressa a idéia de que o momento do objeto é transferido totalmente para a massa de ar.

A descrição acima está, na verdade, muito idealizada. Na prática, a massa de ar não ganha toda essa velocidade e apenas parte do momento do objeto é transferida para o ar. Podemos representar isso com a ajuda de uma constante multiplicativa  $C_D/2$ , na relação

$$f = \frac{1}{2}C_D\rho Av^2.$$

Essa força, agindo no objeto e contrária ao movimento, é chamada, em aerodinâmica, de *arrasto* e o termo  $C_D$ , de *coeficiente de arrasto*. Esse coeficiente de arrasto, no entanto, não é universal, ele depende da forma do objeto. E mesmo para um mesmo objeto, ele não é constante em relação à velocidade. Mais precisamente, ele depende da forma do objeto e de uma quantidade adimensional chamada de número de Reynolds,  $Re = \rho lv/\mu$ , onde  $l$  é um comprimento típico do objeto e  $\mu$  é a viscosidade do ar (ou de qualquer outro fluido, pois as considerações acima não se restringem a objetos se deslocando no ar). Observe que podemos considerar objetos com a mesma forma mas dimensões diferentes (e.g. bolas de diferentes diâmetros). A dependência na forma do objeto é extremamente complicada, mas uma vez fixada a forma, a dependência do coeficiente de arrasto no tamanho do objeto é mais simples. Essa idéia é utilizada no desenvolvimento de aeronaves, construindo-se modelos em escala menor e compensando com o aumento da velocidade (que, em um túnel de vento, pode ser controlada), para obter o mesmo coeficiente de arrasto e permitir uma análise da performance aerodinâmica da aeronave.

Vários experimentos foram realizados com diversos objetos e com velocidades variáveis, indicando que o coeficiente  $C_D = C_D(Re)$  varia de maneira inversamente proporcional a  $Re$ , para valores baixos de  $Re$ , e é aproximadamente constante, para valores altos de  $Re$ . Como  $Re$  é proporcional à velocidade, isso indica, de fato, que o arrasto depende da velocidade de maneira aproximadamente linear, a baixas velocidades, e de maneira aproximadamente quadrática, a altas velocidades.

No que se segue, não nos preocuparemos com tantos detalhes. Vamos considerar resistências lineares ou quadráticas, indicando um coeficiente de resistência apropriado. Por exemplo, no caso de resistência linear, temos simplesmente a equação

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg - k\frac{dh}{dt},$$

onde  $k$  é um coeficiente de resistência apropriado, considerado positivo. Note o sinal de menos em frente ao coeficiente de resistência. A força de resistência é contrária ao movimento.

O modelo no caso de resistência linear quadrática é deixado como exercício (exercício 1.2).

**1.2. Decaimento radioativo.** Em relação a um material radioativo, uma lei para a evolução da quantidade de massa desse material diz que a *taxa de variação dessa massa*

por unidade de tempo em um determinado instante é proporcional à quantidade de massa existente naquele instante. Assim, se  $x = x(t)$  denota a quantidade de massa no instante  $t$ , a taxa de variação de massa por unidade de tempo é  $dx(t)/dt$  e essa lei diz que existe uma constante de proporcionalidade  $\lambda$  tal que

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x(t).$$

O sinal foi escolhido por esperarmos um *decaimento* de massa, de modo que  $\lambda > 0$ .

Por exemplo, o carbono-14 se transforma em nitrogênio-14, com a emissão de radiação  $\beta^-$  (elétron altamente excitado), numa reação que pode ser descrita através da fórmula  $C_6^{14} \rightarrow N_7^{14} + e$ , ou simplesmente  $C_6^{14} \xrightarrow{\beta^-} N_7^{14}$ . A notação  $C_6^{14}$  indica um átomo com número atômico 6 (número de prótons no núcleo) e número de massa 14 (número total de prótons e nêutrons), dando um total de 8 nêutrons. O termo  $e$  indica simplesmente um elétron. O carbono-14 é um átomo com núcleo instável e, nessa reação, um nêutron se transforma espontaneamente em próton, com a criação e emissão de um elétron altamente excitado, de forma a equilibrar eletricamente a reação. Essa reação está ilustrada na figura 1.2.

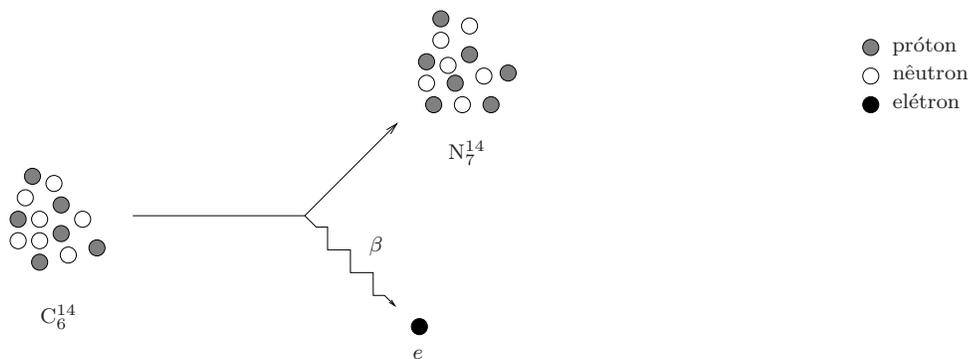


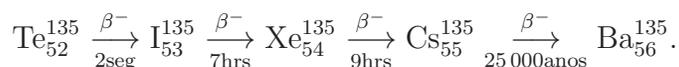
FIGURA 1.2. Decaimento radioativo do carbono-14 em nitrogênio-14, com a emissão de um elétron, em decaimento do tipo beta. Nessa ilustração, apenas o núcleo de cada átomo está representado, as respectivas nuvens de elétrons não aparecem.

A maioria dos átomos de carbono presentes na Natureza é do isótopo estável carbono-12, mas há uma pequena quantidade do isótopo radioativo carbono-14. Em um organismo vivo, há uma constante troca de carbono com o meio, de tal forma que a quantidade de carbono-14 presente no organismo vivo é mantida constante. Por sua vez, a quantidade de carbono-14 na atmosfera é mantida constante graças a um contínuo bombardeamento de raios cósmicos, gerando nêutrons livres, que, por sua vez, bombardeiam o nitrogênio, produzindo o isótopo carbono-14. Quando o organismo morre, a troca de carbono com o meio cessa e a quantidade de carbono-14 no organismo começa a diminuir, devido ao seu decaimento radioativo. Essa diminuição é o que permite a datação arqueológica de fósseis.

A *meia-vida* de um elemento radioativo é o tempo necessário para que a massa de um material composto por esse elemento diminua à metade. A meia-vida do carbono-14 é de

aproximadamente 5730 anos, sendo este material apropriado para estimar a idade de fósseis de alguns milhares de anos. Para datações mais antigas, relacionadas a fenômenos geológicos, é mais apropriado usar elementos radioativos com uma meia-vida maior. Por exemplo, a meia-vida do potássio-40 é de aproximadamente 1,3 bilhões de anos. Este elemento se transforma em argônio-40, com a emissão de um pósitron,  $e^+$  (produto da transformação de um próton em nêutron), na reação  $K_{19}^{40} \rightarrow Ar_{18}^{40} + e^+$ , ou  $K_{19}^{40} \xrightarrow{\beta^+} Ar_{18}^{40}$ . Essa radiação é também chamada de radiação beta, mais especificamente radiação  $\beta^+$ . Medindo-se a quantidade de argônio preso em rochas é possível se determinar a idade de certas formações geológicas. No entanto, como o argônio se encontra naturalmente na forma de um gás, esse método não se aplica a formações sedimentares, pois o gás tende a escapar através de meios porosos.

Alguns decaimentos radioativos não geram imediatamente isótopos estáveis, sendo necessária uma reação em cadeia para atingir elementos estáveis. Um exemplo desse tipo de reação é



Em cada reação, indicamos a meia-vida do elemento em questão.

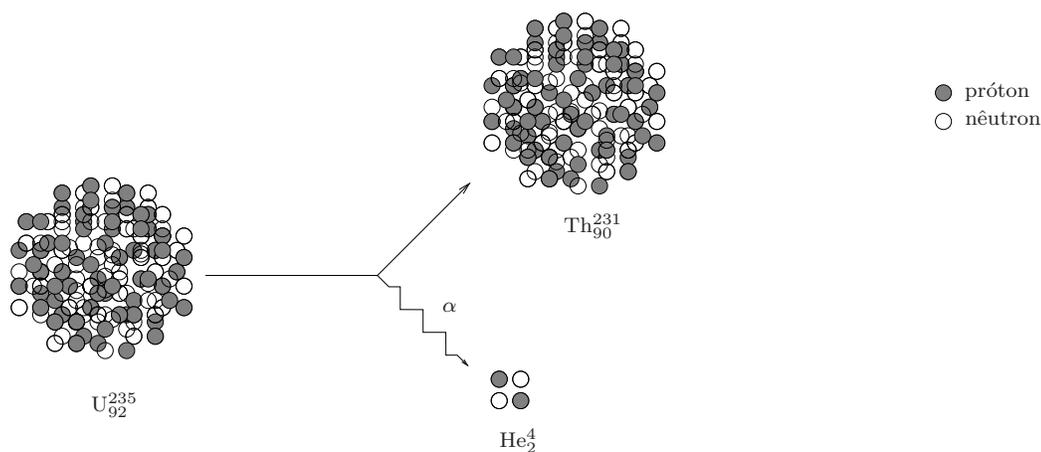


FIGURA 1.3. Decaimento radioativo do tipo alfa, como o decaimento do urânio-235 em tório-231, com a emissão de uma partícula alfa (um núcleo de hélio, com dois prótons e dois nêutrons). Nessa ilustração, apenas o núcleo de cada átomo está representado, as respectivas nuvens de elétrons não aparecem.

Outros tipos de decaimento radioativo envolvem radiação alfa (emissão de um núcleo de hélio, com dois prótons e dois nêutrons) ou radiação gama (emissão de um fóton altamente energético). Por exemplo, o urânio-235 pode se transformar em tório-231, com a emissão de radiação alfa, ou seja  $U_{92}^{235} \rightarrow Th_{90}^{231} + He_2^4$  (figura 1.3). Nessa reação um par de nêutrons e um par de prótons são expelidos do núcleo, reduzindo o número atômico de duas unidades e o número de massa de quatro unidades. A emissão de radiação gama, por sua vez, não

envolve mudança no número atômico nem no número de massa, apenas uma diminuição na energia, com a emissão de um fóton.

A *fissão nuclear* é um outro tipo de reação nuclear bastante importante, na qual um átomo pesado e instável se quebra em dois ou mais átomos. Esse tipo de reação é tipicamente iniciada com o bombardeamento de nêutrons. Essa reação gera ainda mais nêutrons, podendo causar uma reação em cadeia, como explorado em bombas nucleares. A de Hiroshima foi baseada em urânio-235, enquanto que a de Nagasaki foi baseada em plutônio. Fissões nucleares controladas também são utilizadas em reatores atômicos, para a geração de energia. O processo todo leva a um sistema de equações diferenciais, apresentando um comportamento bem mais complicado. Em situações controladas, porém, a fissão nuclear também pode nos levar a um decaimento proporcional à massa.

Assim, em várias situações, temos a equação

$$x'(t) = -\lambda x(t),$$

indicando que a massa do material diminui, em cada instante, a uma taxa proporcional à massa naquele instante. Para simplificar a notação, podemos omitir a dependência de  $x = x(t)$  em relação a  $t$  e escrever apenas

$$x' = -\lambda x.$$

Com isso, procuramos uma função  $x = x(t)$  cuja derivada seja um múltiplo da própria função  $x$ . Do Cálculo, sabemos que uma tal função é a exponencial  $x(t) = \exp(-\lambda t)$ . Mais geralmente, podemos multiplicar por uma constante  $C$  não nula qualquer, chegando a uma solução

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

Posteriormente, veremos uma maneira mais direta de acharmos essa solução.

**1.3. Crescimento populacional.** Um exemplo similar ao de decaimento radioativo é o de crescimento populacional. Um caso simples é o de crescimento de uma colônia de bactérias. As bactérias se reproduzem por divisão celular, com cada bactéria dando origem a duas. Em condições favoráveis, a população de bactérias se reproduz a uma taxa proporcional ao número total de bactérias: em um dado intervalo de tempo  $\Delta t$ , a população de bactérias cresce de um número  $\Delta x$  proporcional ao total  $x$  de bactérias e proporcional ao intervalo de tempo  $\Delta t$  (quanto mais bactérias e quanto maior o intervalo de tempo, maior o crescimento). Denotando por  $\mu > 0$  a constante de proporcionalidade, temos

$$\Delta x = \mu x \Delta t.$$

Dividindo essa relação por  $\Delta t$  e tomando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \mu x.$$

O termo  $\mu$ , dado por

$$\mu = \frac{\frac{dx}{dt}}{x},$$

bactéria	papel biológico	meio	tempo de geração
<i>Escherichia coli</i>	infecções intestinais, etc.	glicose e sais	17 minutos
<i>Lactobacillus acidophilus</i>	produção de ácido lático	leite	66-87 minutos
<i>Mycobacterium tuberculosis</i>	tuberculose	meio sintético	13-15 horas
<i>Rhizobium japonicum</i>	fixação de nitrogênio em plantas	manitol, sais e levedura	6-8 minutos
<i>Streptococcus lactis</i>	produção de ácido lático	leite	26 minutos
<i>Streptococcus lactis</i>	idem	meio de lactose	48 minutos
<i>Vibrio cholerae</i>	cólera	ágar, sais e levedura	20 minutos

TABELA 1.1. Tempo de geração de algumas bactérias.

é chamado de *taxa de crescimento específico*.

Com  $\mu$  constante, as soluções são da forma  $x(t) = C \exp(\mu t)$  e a população cresce exponencialmente. Analogamente ao conceito de meia-vida de um material radioativo, o *tempo de geração* de uma bactéria é o tempo necessário para a população dobrar de tamanho. Em condições apropriadas em laboratório, (meio de cultura, temperatura, pH, etc.) o tempo de geração de uma colônia da bactéria *Vibrio cholerae*, por exemplo, é de aproximadamente 20 minutos. (veja tabela 1.1). Assim, tomando o minuto como unidade de tempo, se  $x(0) = x_0$ , devemos ter  $x(20) = 2x_0$ . Por outro lado,  $x(20) = x_0 \exp(20\mu)$ , logo  $\mu = \ln(2)/20$ . A dimensão física de  $\mu$ , nesse caso, é  $\text{minuto}^{-1}$ .

O tempo de geração de uma colônia de bactérias depende não somente da bactéria mas também do meio em que ela se encontra. Por exemplo, o tempo de geração da bactéria *Escherichia coli* em condições ideais em laboratório é entre 15 e 20 minutos, enquanto que no intestino, esse tempo é de 12 a 24 horas.

Nesse caso de reprodução a uma taxa proporcional ao tamanho da população, a população cresce exponencial e indefinidamente. É natural, porém, que o crescimento não seja ilimitado. Espera-se que para populações muito grandes, a taxa de crescimento não aumente mais no mesmo ritmo que a população e chegue mesmo a ficar negativa, caso a população seja muito grande e os nutrientes se tornem escassos. Assim, é razoável considerar que a taxa de crescimento específico  $\mu$  dependa da população, i.e.  $\mu = \mu(x)$ , levando a equações do tipo

$$\frac{dx}{dt} = \mu(x)x.$$

Exemplos com  $\mu = \mu(x)$  serão considerados mais adiante. Modelos mais elaborados ainda levam em consideração a variação de nutrientes, levando a um sistema de equações

diferenciais, uma equação para a população  $x$  e outra equação para a quantidade de nutrientes, digamos  $y$ , com as taxas de crescimento específico podendo depender de  $x$  e  $y$ . Outras variáveis também podem ser fundamentais, como a quantidade de substâncias (enzimas, etc.) produzidas pelas bactérias e necessárias ao crescimento da colônia. Da mesma forma, a interação com outras espécies também leva a sistemas de equações. Em condições favoráveis, esses organismos tendem a se multiplicar a uma taxa apropriada de crescimento específico dependendo do conjunto de organismos fundamentais em um certo meio-ambiente.

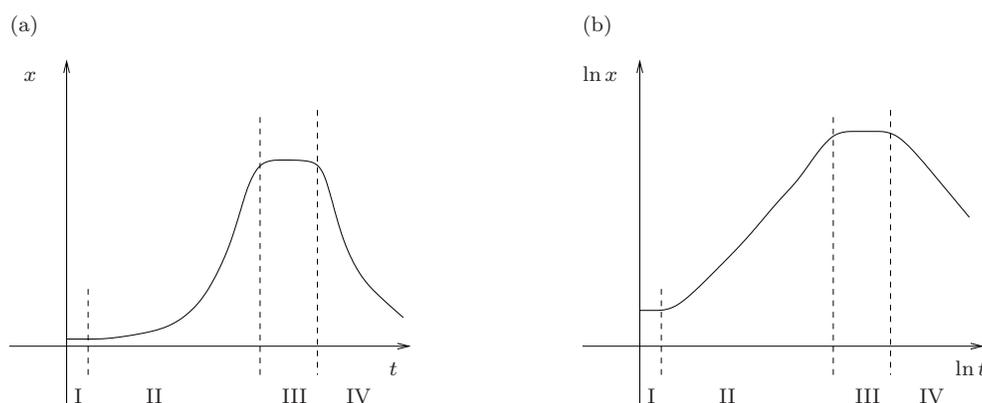


FIGURA 1.4. Evolução de uma população de bactérias em escala (a) normal e (b) logarítmica, sendo possível identificar as quatro fases típicas: I) fase “lag”; II) fase exponencial ou logarítmica; III) fase estacionária; e IV) fase de declínio.

A título de curiosidade, ilustramos na figura 1.4(a) um gráfico típico da evolução de uma população de bactérias em uma situação controlada em laboratório. A figura 1.4(b) ilustra a mesma evolução, mas em escala logarítmica. Nela, podemos identificar quatro fases típicas: fase “lag”; fase exponencial ou logarítmica; fase estacionária; e fase de declínio. Na fase “lag”, a colônia está se adaptando a um novo meio em que foi colocada, sintetizando, por exemplo, enzimas e proteínas necessárias ao seu crescimento. Nessa fase, o número de bactérias permanece aproximadamente constante. Na fase exponencial, também chamada de logarítmica, a colônia está livre para crescer conforme a modelagem acima. As bactérias estão crescendo e se dividindo e algumas estão morrendo, mas de tal forma que o número de bactérias dobra a intervalos regulares. Na fase estacionária, a colônia de bactérias pára de crescer, devido ao acúmulo de detritos e/ou à escassez de nutrientes. Algumas bactérias ainda crescem e se dividem, mas a taxa em que isso ocorre iguala a taxa de mortalidade de células. Na fase de declínio, a taxa de mortalidade excede a de divisão celular e a população passa a diminuir, apresentando um decréscimo que é, de fato, exponencial. Em laboratórios, é comum congelar-se a cultura na fase estacionária, para uso posterior. Caso queira-se aumentar ainda mais a cultura, é necessário trocar o meio para que a colônia volte a crescer.

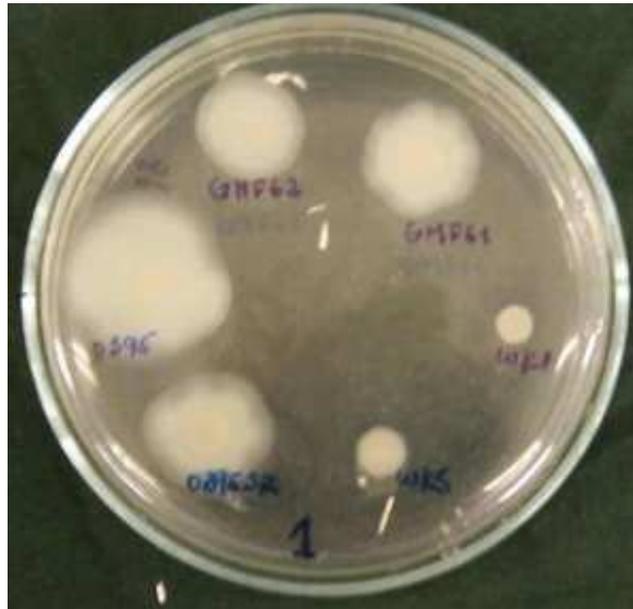


FIGURA 1.5. Várias colônias da bactéria *Vibrio cholerae* (“manchas” brancas), sendo a maior a da bactéria selvagem, enquanto que as outras apresentam mutações que afetam a sua motilidade. Foto gentilmente cedida por von Kruger, W. M. A., Unidade Multidisciplinar de Genômica, Instituto de Biofísica Carlos Chagas Filho, UFRJ.

Ainda a título de ilustração, exibimos, na figura 1.5, várias colônias da bactéria *Vibrio cholerae* (“manchas brancas”) na fase exponencial. A mancha maior contém bactérias selvagens, enquanto que as outras contém bactérias que sofreram mutações. Cada colônia contém aproximadamente o mesmo número de bactérias, o tamanho das manchas indica apenas o espalhamento de cada colônia, mostrando a sua motilidade, ou seja, a sua capacidade de se deslocar em um meio sólido. Através desses experimentos, é possível saber se os genes afetados pela mutação estão relacionados à motilidade.

Modelagens como essas não se aplicam apenas a bactérias, mas a diversos organismos vivos. Por exemplo, a fabricação de cerveja depende de um “fermento cervejeiro”, que é um fungo, no caso, o fungo *Saccharomyces cerevisiae*. Há várias cepas desse fungo, cada mais apropriado para um tipo de cerveja. As cepas mais usadas no Brasil e no mundo são para a fabricação da cerveja do tipo *lager*, que é a mais consumida e a preferida das grandes cervejarias. É uma cerveja leve, pouco encorpada e com um aroma simples, sendo, com isso, de fácil aceitação e degustação. As cervejas pilsen e bock, por exemplo, são do tipo *lager*. Diversas outras cepas, são usadas na fabricação da cerveja do tipo *ale*, que é muito mais antiga que a *lager* e, também, muito mais saborosa, podendo ser mais encorpada e com um aroma bastante complexo. Esse tipo de cerveja é muito encontrado na Europa e nos Estados Unidos, sendo que muitos consideram a Bélgica como sendo o país produtor das melhores

ales do mundo. A *S. cerevisiae* depende de açúcares simples (glicose, frutose, sacarose, maltose, etc.), de oxigênio e de valores apropriados de pH e de temperatura, entre outros fatores, para se multiplicar, com um tempo de geração típico entre 2h e 2h30min. Após o consumo de todo o oxigênio, o fungo passa da fase aeróbica para a anaeróbica, que é a fase de fermentação, com a devida produção de álcool, gás carbônico e dos diversos elementos que dão sabor e aroma à cerveja. Com o aumento do álcool e o declínio dos açúcares, a taxa de crescimento da colônia diminui, com a população se estabilizando em um certo valor. Por fim, após o consumo dos açúcares fermentáveis, o fungo entra em fase de sedimentação, floculando e entrando em desativação, em uma espécie de hibernação.

Um outro caso interessante de se mencionar como aplicação da modelagem acima é a da própria evolução da população mundial de seres humanos, que segue padrões similares aos descritos acima, apresentando uma alternância de fases de crescimento exponencial e de saturação, ocorrendo a intervalos coincidentes com revoluções tecnológicas.

**1.4. Corda suspensa em repouso.** Imaginemos uma corda suspensa em repouso, presa apenas pelos seus extremos. Podemos representar esta corda por uma curva em um plano  $xy$  dada pelo gráfico de uma função  $y = y(x)$ , com o eixo  $x$  paralelo ao chão, como na figura 1.6(a). Uma equação diferencial pode ser obtida para essa função da seguinte forma.

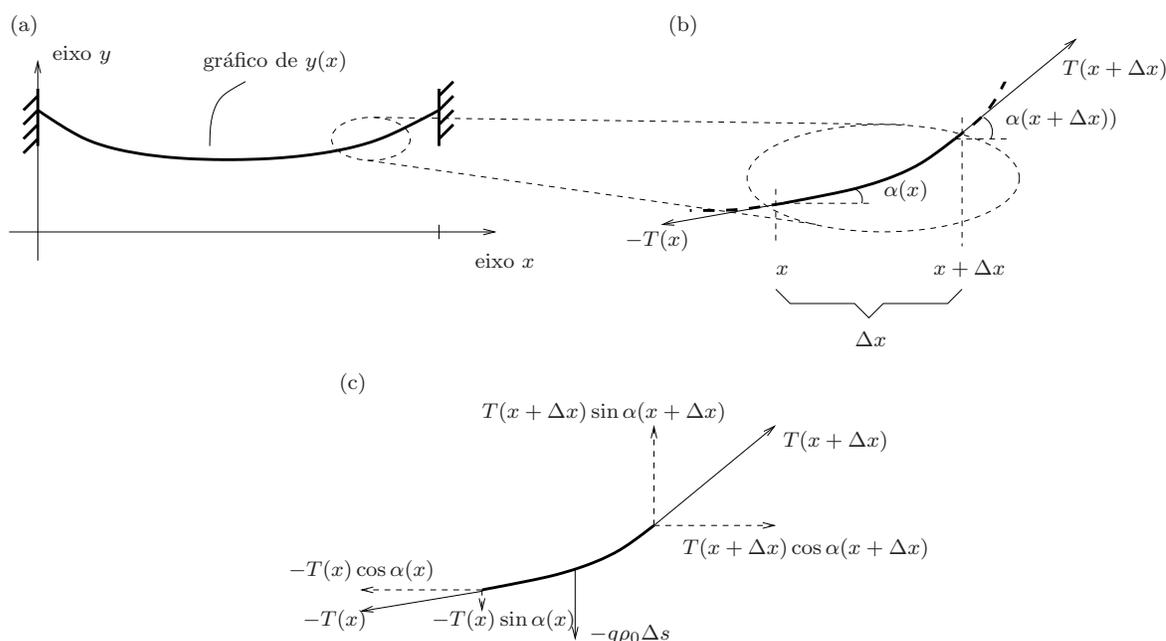


FIGURA 1.6. Ilustração de (a) uma corda suspensa presa pelos extremos, representada pelo gráfico de uma função  $y = y(x)$ ; (b) um trecho da corda, entre os pontos  $x$  e  $x + \Delta x$ , formando inclinações com ângulos  $\alpha(x)$  e  $\alpha(x + \Delta x)$  e sofrendo tensões de magnitude  $T(x)$  e  $T(x + \Delta x)$ , em cada ponto; e (c) a decomposição das forças agindo nesse trecho da corda.

Considere um trecho  $[x, x + \Delta x]$  da corda, conforme ilustrado na figura 1.6(b). As forças que agem neste trecho são o peso deste trecho e as tensões exercidas pelo resto da corda nos extremos desse trecho.

Suponha que a corda seja homogênea e inelástica, isto é, com densidade linear de massa  $\rho_0$  constante ao longo da corda. Então o peso deste trecho será, aproximadamente,

$$- \text{massa} \times \text{gravidade} = -g\rho_0\Delta s,$$

onde

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Em relação à tensão nos extremos, ela age tangente à curva. Denotemos por  $T(x)$  o valor em módulo dessa tensão em cada ponto  $(x, y(x))$  da corda. No ponto  $(x, y(x))$ , a inclinação da corda é dada pelo ângulo  $\alpha(x)$  tal que

$$\frac{dy(x)}{dx} = \tan \alpha(x).$$

Dessa maneira, no extremo  $x + \Delta x$ , as componentes horizontal e vertical da tensão podem ser escritas como

$$T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) \quad \text{e} \quad T(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x).$$

No extremo  $x$ , temos as componentes

$$-T(x) \cos \alpha(x) \quad \text{e} \quad -T(x) \sin \alpha(x).$$

Como a corda está em repouso, as forças acima devem estar em equilíbrio (figura 1.6(c)). Logo, na componente horizontal,

$$T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) - T(x) \cos \alpha(x) = 0,$$

e, na componente vertical,

$$T(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x) - T(x) \sin \alpha(x) - g\rho_0\Delta s = 0.$$

Da primeira relação, como  $x$  e  $\Delta x$  são arbitrários, tiramos que  $T(x) \cos \alpha(x)$  é, na verdade, independente de  $x$  e igual a uma constante que denotamos por  $T_0$  e que chamamos de tensão da corda:

$$T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) = T(x) \cos \alpha(x) = T_0.$$

Dividindo a relação na vertical por  $T_0$  e usando a informação acima, obtemos

$$\tan \alpha(x + \Delta x) - \tan \alpha(x) = \frac{g\rho_0}{T_0} \Delta s.$$

Logo,

$$\frac{dy(x + \Delta x)}{dx} - \frac{dy(x)}{dx} = \lambda \Delta s,$$

onde

$$\lambda = \frac{g\rho_0}{T_0}.$$

Dividindo por  $\Delta x$  e usando que

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

obtemos

$$\frac{\frac{dy(x + \Delta x)}{dx} - \frac{dy(x)}{dx}}{\Delta x} = \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Fazendo  $\Delta x$  tender a 0, chegamos à equação

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

No caso em que a corda esteja bem tensionada, de modo que as variações verticais sejam bastante pequenas no sentido de que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \ll 1,$$

podemos desprezar a primeira derivada e considerar como modelo aproximado a equação

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \lambda.$$

## Exercícios

- 1.1.** Do Cálculo, determine quais funções trigonométricas satisfazem a equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y.$$

Verifique que combinações lineares dessas funções também satisfazem a equação diferencial, i.e. se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções, então  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  também é solução. Em seguida, ache a solução com as “condições iniciais”  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 2$ . Ache, também, a solução com as “condições de contorno”  $y(0) = 2$  e  $y(\pi/2) = 1$ .

- 1.2.** Considere um corpo de massa  $m$  em queda livre com resistência do ar dependendo quadraticamente da velocidade. Se  $h = h(t)$  denota a distância do objeto ao solo,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\beta > 0$  é um coeficiente de resistência, determine qual dos modelos abaixo está correto, independente do objeto estar descendo ou subindo:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad m \frac{d^2 h}{dt^2} &= -mg + \beta \left(\frac{dh}{dt}\right)^2, & \text{(b)} \quad m \frac{d^2 h}{dt^2} &= -mg - \beta \left(\frac{dh}{dt}\right)^2, \\ \text{(c)} \quad m \frac{d^2 h}{dt^2} &= -mg + \beta \left|\frac{dh}{dt}\right| \frac{dh}{dt}, & \text{(d)} \quad m \frac{d^2 h}{dt^2} &= -mg - \beta \left|\frac{dh}{dt}\right| \frac{dh}{dt}. \end{aligned}$$

**1.3.** Em uma aplicação com juros compostos, o valor  $P^{n+1}$  da aplicação no mês  $n + 1$  é dado pelo valor  $P^n$  no mês anterior mais uma porcentagem de  $P^n$ . O tempo de atualização, porém, pode ser outro, como anual ou diário. Mais geralmente, podemos considerar um tempo de atualização  $\Delta t$ . Com isso, o valor  $P(t + \Delta t)$  da aplicação após um instante  $t$  é dado pelo valor de  $P(t)$  mais uma porcentagem proporcional a  $P(t)$  e ao tempo  $\Delta t$ . Isso nos dá

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \alpha \Delta t P(t),$$

onde  $\alpha$  é a constante de proporcionalidade, ou *taxa específica de juros* (o valor  $\alpha \Delta t$  corresponde aos juros do prazo  $\Delta t$ , ou juros mensais, diários ou anuais, nesses casos específicos). Faça  $\Delta t$  decrescer para zero e obtenha uma equação diferencial para  $P(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , correspondendo ao caso de *juros compostos contínuos* com taxa específica de juros  $\alpha$ .

## 2. Soluções gerais e particulares e resolução de equações separáveis

Conforme visto acima, uma equação de ordem  $n$  pode ser escrita na forma

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0.$$

onde  $t$  é variável independente e  $x = x(t)$  é a função que procuramos como solução da equação envolvendo as derivadas de  $x = x(t)$  em função da variável independente.

A *solução geral* é uma família parametrizada descrevendo o conjunto de todas as soluções da equação diferencial. Tipicamente (mas nem sempre), a solução geral de uma equação de ordem  $n$  é uma família de soluções com  $n$  parâmetros. Uma *solução particular* é nada mais do que uma das infinitas soluções dessa família. Em diversos problemas, há maneiras naturais de selecionar uma solução particular, como através de condições iniciais ou de contorno, conforme veremos a seguir.

**2.1. Soluções da equação de decaimento radioativo.** A família de funções da forma

$$x(t) = Ce^{-\lambda t},$$

com um parâmetro real  $C$ , é a solução geral da equação

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x.$$

A figura 2.1(a) exibe algumas soluções particulares dessa equação. Observe que, do ponto de vista matemático, soluções não-positivas (associadas a  $C \leq 0$ ) são válidas, apesar do modelo de decaimento radioativo fazer sentido apenas para massas  $x$  positivas.

Conhecendo a massa  $x_0$  do material radioativo em um instante  $t_0$ , temos da solução geral que

$$x_0 = x(t_0) = Ce^{-\lambda t_0},$$

logo

$$C = x_0 e^{\lambda t_0}$$

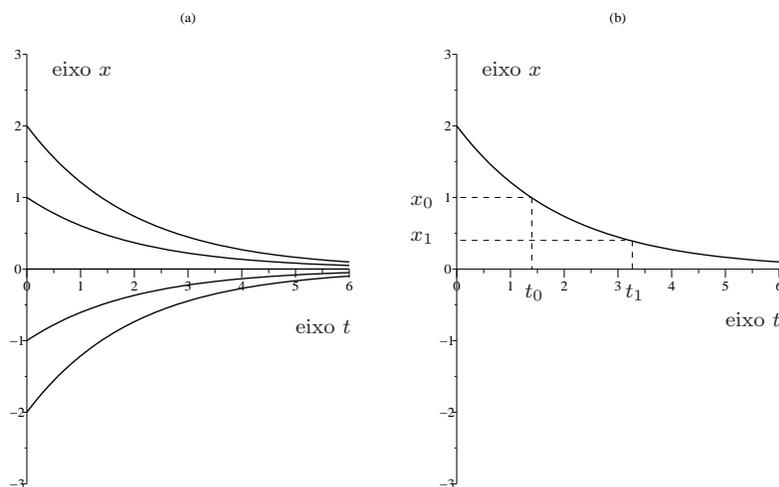


FIGURA 2.1. Soluções da equação de decaimento radioativo no plano  $tx$ , com  $\lambda = 1/2$ , sendo (a) soluções particulares  $x(0) = -2, 1, 0.1, 2$  e (b) solução particular com  $x(t_0) = x_0$  e  $x(t_1) = x_1$ .

e a solução particular com a condição inicial  $x(t_0) = x_0$  é (veja figura 2.1(b))

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Essa fórmula pode ser usada na datação de fósseis da seguinte maneira. Conhecendo a concentração  $x_0$  de carbono-14 quando do início da formação do fóssil e sabendo a concentração  $x_1$  atual (no instante  $t_1$ ) no fóssil, podemos encontrar o instante  $t_0$  do início da formação do fóssil. Isso pode ser feito manipulando-se as relações  $x_0 = x(t_0) = Ce^{-\lambda t_0}$  e  $x_1 = x(t_1) = Ce^{-\lambda t_1}$ , ou diretamente da solução particular no instante  $t_1$ :

$$x_1 = x(t_1) = x_0 e^{-\lambda(t_1-t_0)}.$$

Assim,

$$t_0 = t_1 + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_0} = t_1 - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_0}{x_1}.$$

E a idade do fóssil é

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_0}{x_1}.$$

Vimos que a meia-vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que a massa decaia à metade, i.e.  $t_{1/2} = t_1 - t_0$  tal que  $x_1 = x_0/2$ , logo

$$t_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2.$$

**2.2. Soluções da equação de um corpo em queda livre sem amortecimento.**

Um objeto de massa  $m$  se encontra a uma altura  $h(t)$  da superfície. Desprezando a resistência do ar, chegamos à seguinte equação diferencial de segunda ordem para  $h = h(t)$ :

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g.$$

Como  $g$  é uma constante, podemos integrar diretamente o lado direito, obtendo a solução geral

$$h(t) = C_1 + C_2t + g\frac{t^2}{2},$$

que é uma família a dois parâmetros.

Se o objeto for largado da altura  $h_0$  no instante  $t = 0$ , então

$$h(0) = h_0, \quad \left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

onde a segunda condição significa que o objeto partiu com velocidade vertical inicial nula. Assim, podemos achar as constantes  $C_1$  e  $C_2$ :

$$C_1 = h_0, \quad C_2 = 0.$$

Logo, obtemos a solução particular

$$h(t) = h_0 - g\frac{t^2}{2},$$

correspondente às condições iniciais dadas.

Caso o objeto parta com velocidade inicial  $v_0$ , então

$$\left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_0,$$

o que nos dá a solução

$$h(t) = h_0 + v_0t - g\frac{t^2}{2}.$$

**2.3. Soluções da equação da corda suspensa em repouso.** No modelo simplificado, sem levar em consideração a variação vertical da corda no cálculo da massa, a equação da corda suspensa toma a forma

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \lambda.$$

onde  $\lambda = g\rho_0/T_0$ ,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\rho_0$  é a densidade de massa da corda (assumida uniforme), e  $T_0$  é a tensão da corda.

A solução geral é similar a do corpo em queda livre:

$$y(x) = C_0 + C_1x + \frac{\lambda}{2}x^2.$$

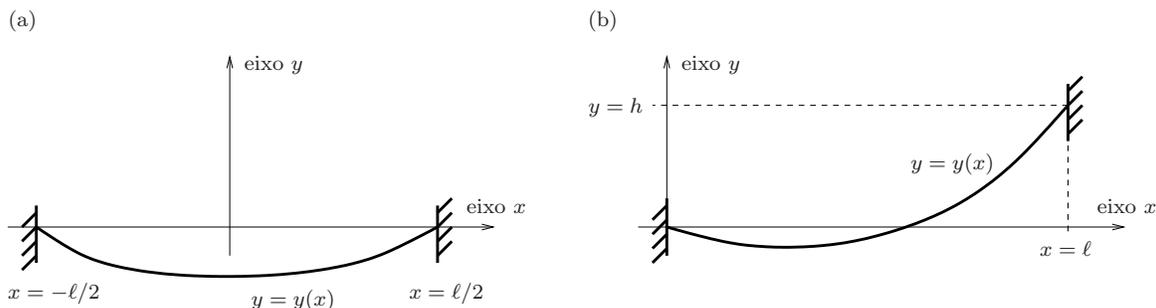


FIGURA 2.2. Soluções  $y = y(x)$  da equação da corda suspensa com condições de contorno (a)  $y(-\ell/2) = 0 = y(\ell/2)$  e (b)  $y(0) = 0$ ,  $y(\ell) = h$ .

Soluções particulares podem ser obtidas a partir de *condições de contorno* da corda, que são condições para os extremos da corda. Podemos considerar, por exemplo, o caso particular em que os extremos da corda estejam na mesma altura e com o eixo de tal forma que a origem esteja exatamente no meio entre os dois extremos. Se o comprimento da corda é  $\ell$ , então as condições de contorno podem ser escritas como (figura 2.2(a))

$$y(-\ell/2) = 0 = y(\ell/2).$$

Assim,

$$C_0 - C_1 \frac{\ell}{2} + \frac{\lambda}{8} \ell^2 = 0 = C_0 + C_1 \frac{\ell}{2} + \frac{\lambda}{8} \ell^2,$$

logo

$$C_1 = 0, \quad C_0 = -\frac{\lambda}{8} \ell^2.$$

e a solução particular é

$$y(x) = -\frac{\lambda}{8} \ell^2 + \frac{\lambda}{2} x^2$$

ou

$$y(x) = \frac{\lambda}{8} (4x^2 - \ell^2).$$

No caso em que os extremos estejam em alturas diferentes, podemos, para simplificar, colocar a origem do eixo no extremo esquerdo. Assim, as condições de contorno ficam sendo (figura 2.2(b))

$$y(0) = 0, \quad y(\ell) = h,$$

onde  $\ell$  é a distância horizontal entre os extremos e  $h$  é a diferença entre as alturas dos extremos. Impondo as condições de contorna na solução geral, obtemos

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{h}{\ell} - \frac{\lambda \ell}{2}.$$

logo, a solução particular se torna

$$y(x) = \left( \frac{h}{\ell} - \frac{\lambda \ell}{2} \right) x + \frac{\lambda}{2} x^2.$$

**2.4. Solução geral de uma equação de ordem  $n$  “explícita”.** Uma equação de ordem  $n$  da forma

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

tem, tipicamente, uma solução geral com  $n$  parâmetros. Isso pode ser exemplificado facilmente no caso em que

$$\frac{d^n x}{dt^n} = g(t).$$

Como o lado direito só envolve a variável independente, podemos integrar diretamente, obtendo

$$\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = C_1 + \int_0^t g(t_1) dt_1,$$

depois

$$\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} = C_2 + C_1 t + \int_0^t \int_0^{t_1} g(t_2) dt_2 dt_1,$$

e assim por diante, até a solução geral

$$x(t) = C_n + C_{n-1}t + C_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^t \cdots \int_0^{t_{n-1}} g(t_{n-1}) dt_{n-1} dt_{n-2} \cdots dt_1,$$

com  $n$  parâmetros reais  $C_1, \dots, C_n$ .

**2.5. Equações separáveis.** Equações diferenciais de primeira ordem da forma

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$$

são ditas separáveis e, em princípio, podem ser resolvidas facilmente. Uma manipulação formal leva a

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt,$$

logo

$$H(x) = \int^x \frac{dx}{h(x)} = \int^t g(t)dt = G(t),$$

onde  $H$  e  $G$  são primitivas das funções indicadas nos integrandos. Como  $H'(x_0) = 1/h(x_0)$  está definida e é diferente de zero nos pontos  $x_0$  onde  $h(x_0) \neq 0$ , então, pelo Teorema da Função Inversa, a função  $H(x)$  é inversível, pelo menos em um intervalo contendo o ponto  $x_0$ . Assim, nesse intervalo, podemos escrever uma solução  $x = x(t)$  como

$$x(t) = H^{-1}(G(t)).$$

Uma outra justificativa para esse método é reescrever a integral

$$\int^x \frac{dx}{h(x)}$$

através da mudança de variáveis  $x = x(t)$ , com  $dx = x'(t)dt$ , e usar a equação diferencial  $x'(t) = g(t)h(x(t))$ , de modo que

$$\int^x \frac{dx}{h(x)} = \int^t \frac{x'(t)dt}{h(x(t))} = \int^t g(t)dt,$$

o que nos leva, também, à equação integral

$$H(x) = \int^x \frac{dx}{h(x)} = \int^t g(t)dt = G(t),$$

No caso da equação de decaimento radioativo, para  $x > 0$ , esse processo toma a seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = -\lambda dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -\lambda t + C_0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-\lambda t + C_0},$$

onde  $C_0$  é uma constante de integração (lembre das integrais indefinidas e das primitivas, no Cálculo I). Considerando uma nova constante  $C_1 = \exp(C_0)$ , achamos a solução geral

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda t}.$$

Em princípio, a constante  $C_1$  deveria ser positiva, pois é a exponencial de  $C_0$ . No caso da modelagem considerada, isso é o esperado, pois a massa deve ser positiva. No entanto, matematicamente, podemos ter  $x$  negativo, de maneira que na integração considerada, permitindo  $x$  negativo, mas ainda diferente de zero, temos

$$\frac{dx}{x} = -\lambda dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln |x| = -\lambda t + C_0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = e^{-\lambda t + C_0} = e^{C_0} e^{-\lambda t}.$$

Retirando o módulo, obtemos

$$x = \pm e^{C_0} e^{-\lambda t}.$$

Logo,

$$x = C_1 e^{-\lambda t},$$

para qualquer  $C_1$  não-nulo ( $C_1 = \pm e^{C_0}$ ). A integração de  $1/x$  acima assume que  $x \neq 0$ . No caso em que  $x = 0$ , temos a solução trivial  $x(t) = 0$ , definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Essa solução trivial pode ser absorvida na fórmula acima, permitindo  $C_1 = 0$ . Assim, a solução geral é da forma

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda t},$$

para qualquer real  $C_1$ .

Para ilustrar mais o método, tomemos um outro exemplo:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \cos t.$$

Separando as variáveis, temos

$$\frac{dx}{x^2} = \cos t dt.$$

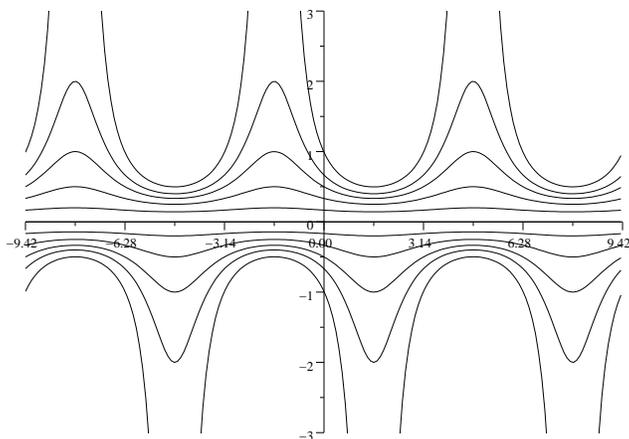


FIGURA 2.3. Soluções da equação  $x' = x^2 \cos t$  no plano  $tx$ .

Integrando os dois lados, o esquerdo em relação a  $x$  e o direito em relação a  $t$ , obtemos

$$-\frac{1}{x} + C = \sin t,$$

onde  $C$  é uma constante de integração. É claro que poderíamos ter colocado a constante de integração no lado direito, o que seria equivalente a trocar  $C$  por  $-C$ . Como  $C$  é um parâmetro real arbitrário, essa escolha, isto é, o sinal em frente à constante, é irrelevante. Resolvendo para  $x$ , obtemos

$$x(t) = \frac{1}{C - \sin t}.$$

Esta é uma expressão para uma família de soluções  $x(t)$ , dependendo do parâmetro  $C$ . Cada solução está definida para  $\sin t \neq C$ , no caso em que  $-1 \leq C \leq 1$ , ou para todo  $t \in \mathbb{R}$ , quando  $|C| > 1$ . Temos, também, a solução trivial  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , que é onde  $g(x) = x^2$  se anula. A solução geral é, então (ver figura 2.3),

- i)  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $x(t) = \frac{1}{C - \sin t}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ ,  $|C| > 1$ ;
- iii)  $x(t) = \frac{1}{C - \sin t}$ , para  $\sin t \neq C$  onde  $-1 \leq C \leq 1$ .

De modo geral, na separação de variáveis

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt,$$

deve-se observar os zeros de  $h(x)$ , que dão soluções constantes e que devem ser incorporadas à formula da solução obtida após a integração dessa relação, como no caso  $C_1 = 0$  da equação de decaimento radioativo. E devemos nos preocupar com o intervalo de definição de cada solução e com os possíveis valores dos parâmetros. Então podemos dividir o processo em quatro etapas:

- (1) Identificar os zeros de  $h(x)$ , que dão as soluções estacionárias.
- (2) Resolver a equação por separação de variáveis para achar as soluções não-estacionárias.
- (3) Identificar claramente os intervalos de definição de cada solução.
- (4) Determinar os possíveis valores dos parâmetros da família de soluções.

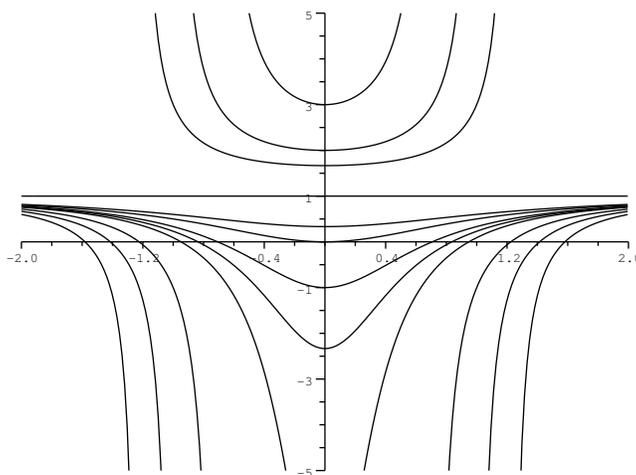


FIGURA 2.4. Soluções da equação  $x' = 2t(x - 1)^2$  no plano  $tx$ .

Vamos terminar essa seção com mais um exemplo:

$$\frac{dx}{dt} = 2t(x - 1)^2.$$

Esta é uma equação separável, com  $g(t) = 2t$  e  $h(x) = (x - 1)^2$ . A função  $h(x)$  tem apenas um zero, em  $x = 1$ , o que dá uma única solução estacionária,  $x(t) = 1$ , definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Para  $x \neq 1$ , podemos resolver via separação de variáveis, fazendo

$$\frac{dx}{(x - 1)^2} = 2tdt \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x - 1} = t^2 + C \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + \frac{1}{C - t^2}.$$

Portanto, as soluções não-estacionárias são dadas por

$$x(t) = 1 + \frac{1}{C - t^2},$$

definidas em  $t \neq \pm\sqrt{C}$ , se  $C \geq 0$ , e para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se  $C < 0$ . Assim, a solução geral pode ser escrita como

- i)  $x(t) = 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $x(t) = 1 + \frac{1}{C - t^2}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $C < 0$ ;
- iii)  $x(t) = 1 + \frac{1}{C - t^2}$ , para  $t \neq \pm\sqrt{C}$ , onde  $C \geq 0$ ;

Algumas dessas soluções estão ilustradas na Figura 2.4.

## Exercícios

- 2.1. Sabendo que a meia-vida do Carbono-14 é de aproximadamente  $t_{1/2} = 5730$  anos e que para um certo fóssil,  $x_1 = x_0\sqrt{2}/2$ , qual a idade do fóssil em consideração?
- 2.2. Em um modelo simplificado de queimada, a área  $A(t)$  de uma região incendiada cresce proporcionalmente ao seu perímetro e satisfaz (aproximadamente) a equação diferencial  $A' = \lambda A^{1/2}$ , para alguma constante de proporcionalidade  $\lambda > 0$ . Se em um instante  $t_0$  temos  $A(t_0) = A_0$ , determine o intervalo de tempo, em função de  $A_0$  e  $\lambda$ , necessário para que a área quadruple de tamanho.
- 2.3. Para motivar o modelo do Exercício 2.2, considerando o caso em que a região é circular, com o raio  $r$  crescendo a uma taxa uniforme, i.e. com  $r'$  constante, mostre que a taxa de variação temporal da área  $A$  da região é de fato proporcional à raiz quadrada da área.
- 2.4. Suponha que uma bola seja enchida de gás a uma taxa constante  $\alpha$  de volume por unidade de tempo, de modo que o seu raio satisfaça a equação

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha}{4\pi r^2},$$

para algum  $\alpha > 0$ .

- (a) Se em um instante  $t_0$  temos  $r(t_0) = r_0 > 0$ , determine o intervalo de tempo, em função de  $r_0$  e  $\alpha$ , necessário para que o raio dobre de comprimento.
- (b) Se em dois segundos o raio da bola aumentou de zero para quatro centímetros, quanto tempo para o raio da bola aumentar de zero para oito centímetros?
- 2.5. Considere um certo produto cujo preço varia com o tempo  $t$  e é dado por  $P(t)$ . Dois conceitos importantes em microeconomia são a demanda  $Q_d$  pelo produto e a oferta  $Q_o$  do produto. Em geral, elas são funções de  $P$  e  $t$ , ou seja,  $Q_d = Q_d(P, t)$  e  $Q_o = Q_o(P, t)$ . É natural considerar que o preço varie de acordo com a diferença entre a demanda e a oferta, ou seja,

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(Q_d - Q_o).$$

Um caso particular é quando a demanda diminui linearmente em função do preço, ou seja,  $Q_d = a - \lambda P$  e a oferta é constante,  $Q_o = b$ . Nesse caso,

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(a - b - \lambda P).$$

Vamos assumir  $a, b, \alpha, \lambda > 0$ , com  $a < b$ . Determine o preço  $P(t)$  em função do tempo  $t \in \mathbb{R}$  e ache o valor limite do preço quando  $t \rightarrow \infty$ .

- 2.6.** O modelo de Solow para o crescimento econômico é baseado no capital  $K$  e na força de trabalho  $J$ . O produto nacional total é dado por  $\alpha K^{1-\theta} J^\theta$ , onde  $\alpha > 0$  e  $0 < \theta < 1$ . Uma fração constante  $0 < \lambda < 1$  desse produto é usada para aumentar o capital, de modo que a variação do capital é dada pela equação

$$\frac{dK}{dt} = \lambda \alpha K^{1-\theta} J^\theta.$$

Assume-se que a força de trabalho cresce exponencialmente conforme  $J(t) = J_0 e^{\mu t}$ , onde  $J_0, \mu > 0$ . Substituindo  $J(t)$  na equação acima, obtemos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem em  $K$ . Ache a solução geral dessa equação. Em seguida, determine a razão capital-trabalho  $K(t)/J(t)$  e ache o valor limite dessa razão quando  $t \rightarrow \infty$ .

- 2.7.** Qual a solução particular da equação do corpo em queda livre, sem resistência do ar, quando o objeto parte do solo com uma velocidade vertical positiva  $v_0$ ? Quanto tempo leva para o objeto voltar ao solo?
- 2.8.** Suponha que um objeto seja lançado com velocidade  $v_0$  a uma altura  $h_0 > 0$  do solo e em uma direção formando um ângulo  $\alpha$  com o solo,  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ , conforme ilustrado na figura 2.5. Desprezando a resistência do ar, a equação da distância

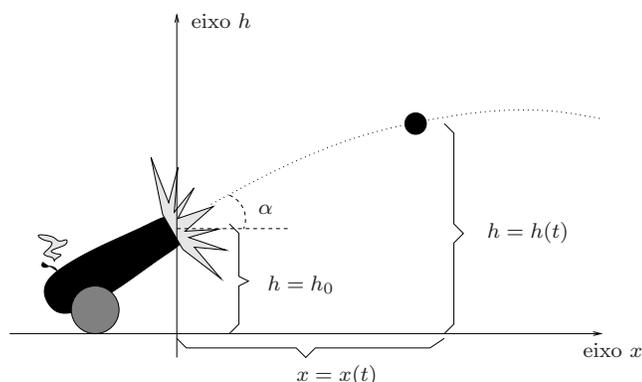


FIGURA 2.5. Lançamento de um objeto de uma altura inicial  $h_0$  e com ângulo de inclinação  $\alpha$ .

vertical  $h = h(t)$  do solo é  $h'' = -g$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade, enquanto que a distância horizontal  $x = x(t)$  do ponto de lançamento satisfaz a equação  $x'' = 0$ , pois não há nenhuma força agindo horizontalmente. As condições iniciais são  $h(0) = h_0 > 0$ ,  $h'(0) = v_0 \sin \alpha$ ,  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = v_0 \cos \alpha$ . Resolva essas

equações para achar  $h = h(t)$  e  $x = x(t)$ , em função do tempo  $t \geq 0$ . Em seguida, inverta a relação  $x = x(t)$  para achar  $t = t(x)$  como função de  $x \geq 0$ . Use isso para escrever a altura  $h = h(x)$  como função da deslocamento horizontal  $x \geq 0$ . Observe que a trajetória do objeto (ou seja, a curva  $h = h(x)$ ) é, de fato, uma parábola.

- 2.9.** Continuando com o problema do exercício 2.8, suponha agora que as condições de contorno  $h|_{x=0} = h_0$  e  $h|_{x=1} = h_1$  sejam dadas. Mostre que pode haver infinitas soluções (em  $\alpha$  e  $v_0$ ) para o problema. Isso reflete o fato de que podemos variar a velocidade inicial dada por  $v_0$  e  $\alpha$  e alcançar  $h_1$  em  $x = 1$  em instantes diferentes.
- 2.10.** Na equação da corda suspensa (sem variação vertical no cálculo da massa) com

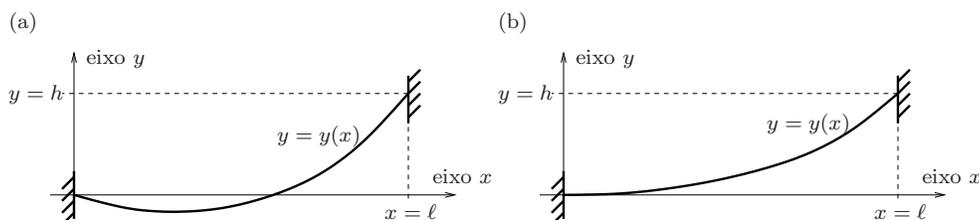


FIGURA 2.6. Soluções  $y = y(x)$  da equação da corda suspensa com condições de contorno  $y(0) = 0$ ,  $y(\ell) = h > 0$  nos casos (a) com “barriga” e (b) sem “barriga”.

condições de contorno  $y(0) = 0$  e  $y(\ell) = h > 0$ , qual a condição entre a tensão  $T_0$ , a densidade  $\rho_0$ , a altura  $h$  e a distância  $\ell$  para que a corda não forme uma “barriga”, isto é, para que a posição vertical  $y(x)$  da corda fique sempre entre  $y = 0$  e  $y = h$  (c.f. figura 2.6)?

- 2.11.** Resolva as seguintes equações pelo método de separação de variáveis:

(a)  $x' = x \sin t$ ,

(b)  $x' = tx^2$ ,

(c)  $x' = \sqrt{tx}$  (em  $t, x \geq 0$ ).



## CAPÍTULO 2

# Existência e Unicidade de Soluções de Equações de Primeira Ordem

### 1. Existência de soluções e métodos de Euler e de Picard

Obtivemos soluções explícitas em vários exemplos. Mas será que sempre há solução? É possível que certas equações não possuam soluções? Como podemos garantir a existência de soluções em geral? É possível que existam soluções além das obtidas por um certo método?

As respostas a essas questões dependem da regularidade das funções envolvidas na equação diferencial, como veremos a seguir.

**1.1. Existência de soluções.** Vamos considerar a equação de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Se tomarmos  $f(t, x) = f(t)$  descontínua, fica claro que não poderemos encontrar  $x = x(t)$  continuamente diferenciável e satisfazendo a equação diferencial em um intervalo contendo o ponto de descontinuidade de  $f(t)$ . Isso mostra como a regularidade da  $f$  pode influenciar nessas questões. Também podemos considerar certas funções  $f(t, x) = f(x)$  que não dependem de  $t$  mas são descontínuas em  $x$  e ainda assim não obter a existência de soluções. Um exemplo é a função

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Não há solução continuamente diferenciável com a condição inicial  $x(0) = 0$ . De fato, em  $x = 0$ , temos  $f(0) = -1$ , o que causaria o decréscimo da solução. Mas em  $x < 0$ , temos  $f(x) > 1$ , contrariando esse decréscimo.

Mas nem sempre descontinuidades em  $x$  levam à não-existência de soluções. A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

possui soluções com qualquer condição inicial.

É possível considerar certas equações com funções descontínuas relaxando a regularidade da função procurada e o sentido no qual a equação é satisfeita, mas não vamos partir nessa direção. O nosso interesse é em soluções “suaves”, i.e. continuamente diferenciáveis. Assim, vamos assumir, no mínimo, que  $f = f(t, x)$  seja contínua.

Lembremos, ainda, o papel das condições iniciais. Vimos nos exemplos que as soluções gerais envolvem constantes arbitrárias, gerando famílias de soluções. As soluções são curvas no plano e essas famílias cobrem o plano todo (ou, pelo menos, o domínio de definição da função  $f = f(t, x)$ , caso este não seja o plano todo), havendo, para cada ponto do plano, pelo menos uma solução passando por esse ponto. Essa solução em particular pode ser selecionada por uma condição inicial

$$x(t_0) = x_0,$$

indicando o ponto  $(t_0, x_0)$  pelo qual passa uma certa solução. Com isso, estudamos o *problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

No caso da função  $f = f(t, x)$  ser contínua, podemos garantir que, por cada ponto  $(t_0, x_0)$  no interior do domínio de definição da  $f = f(t, x)$ , passa pelo menos uma solução da equação diferencial, definida em um certo intervalo de tempo contendo  $t_0$ . Esse resultado será suficiente para nós nas diversas situações que encontraremos a seguir. Não demonstramos esse teorema aqui, mas indicamos abaixo dois métodos para a obtenção de soluções.

Antes disso, é instrutivo considerar o campo que a cada ponto  $(t, x)$  do plano  $tx$  associa o vetor  $(1, f(t, x))$  e imaginá-lo como representando o campo de vetores velocidade-instantânea de cada elemento infinitesimal de um escoamento de um fluido, ou, mais concretamente, como representando a correnteza de um rio. A solução da equação diferencial é uma função  $x = x(t)$  que representa uma curva  $(t, x(t))$  no plano  $tx$ . A equação diferencial expressa a condição de que essa curva seja tangente ao campo de velocidades da correnteza. Podemos interpretar essa curva como descrevendo a trajetória de uma bolinha de papel jogada no rio. A condição inicial representa, por sua vez, o ponto em que a bolinha toca a superfície do rio.

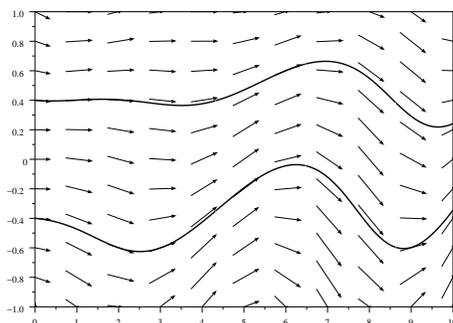


FIGURA 1.1. Campo de vetores  $(1, (t/4 - x) \sin(x - t)/6)$  e soluções da equação  $dx/dt = (t/4 - x) \sin(x - t)/6$ , no plano  $tx$ , com condições iniciais  $x(0) = -0.4$  e  $x(0) = 0.4$ .

A figura 1.1, por exemplo, mostra o campo de vetores  $(1, (t/4 - x) \sin(x - t)/6)$ , no plano  $tx$ , e duas soluções particulares da equação correspondente  $dx/dt = (t/4 - x) \sin(x - t)/6$ , uma com a condição inicial  $x(0) = -0.4$  e a outra com  $x(0) = 0.4$ . Cada condição inicial seleciona um ponto pelo qual a curva deve passar. Além dessas, há uma infinidade de curvas tangentes ao campo em questão, passando por outros pontos do plano.

**1.2. Existência de soluções via método de Euler.** Conforme descrito acima, o gráfico de uma solução  $x = x(t)$  da equação diferencial determina uma curva no plano  $tx$  que é tangente, em cada ponto, ao vetor  $(1, f(t, x))$ . Assim, podemos visualizar o campo de vetores  $(1, f(t, x))$  e tentar achar a solução  $x = x(t)$  através do seu gráfico, procurando construir uma curva sempre tangente ao campo de vetores. Um método para a obtenção dessa curva passa por construir uma seqüência de curvas feitas de segmentos de reta tangentes ao campo em um número finito de pontos.

Dada uma condição inicial  $(t_0, x_0)$ , fixamos um intervalo de tempo  $[t_0, t_0 + T]$ ,  $T > 0$ , e dividimos esse intervalo em  $n$  subintervalos,  $[t_{k-1}, t_k]$ , com  $t_k = t_0 + kT/n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Construimos uma seqüência  $x^n = x^n(t)$  de funções tais que o gráfico seja tangente ao campo em cada instante  $t_k$  e que sejam lineares em cada intervalo  $[t_{k-1}, t_k]$ . Isso pode ser construído recursivamente. A figura 1.2 mostra uma aproximação pelo método de Euler de uma solução da equação  $dx/dt = (t/4 - x) \sin(x - t)/6$ .

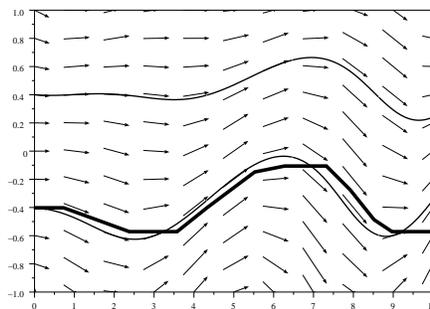


FIGURA 1.2. Campo de vetores  $(1, (t/4 - x) \sin(x - t)/6)$ , soluções da equação  $dx/dt = (t/4 - x) \sin(x - t)/6$ , no plano  $tx$ , com condições iniciais  $x(0) = -0.4$  e  $x(0) = 0.4$ , e, em linha mais grossa, uma aproximação da solução com  $x(0) = -0.4$  pelo método de Euler.

A reta que passa pelo ponto  $(t_{k-1}, x^n(t_{k-1}))$  e cuja inclinação é  $f(t_{k-1}, x^n(t_{k-1}))$  é

$$x - x^n(t_{k-1}) = f(t_{k-1}, x^n(t_{k-1}))(t - t_{k-1}).$$

A solução aproximada coincide com essa reta no intervalo  $[t_{k-1}, t_k]$ , logo o seu valor no instante  $t_k$  é

$$x^n(t_k) = x^n(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, x^n(t_{k-1}))\Delta t,$$

onde

$$\Delta t = t_k - t_{k-1} = \frac{T}{n}.$$

Assumindo  $f(t, x)$  continuamente diferenciável, é possível mostrar que para  $T$  suficientemente pequeno, essa seqüência de funções  $x^n = x^n(t)$  converge uniformemente para uma função continuamente diferenciável e satisfazendo a equação diferencial desejada no intervalo  $[t_0, t_0 + T]$ . Para isso, primeiro reescrevemos a equação diferencial na forma integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds.$$

É possível mostrar que cada solução aproximada satisfaz

$$x^n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^n(s)) \, ds + \mathcal{O}(\Delta t),$$

onde  $\mathcal{O}(\Delta t)$  representa um erro da ordem de  $\Delta t$ , o que implica em dizer que o erro vai pra zero à medida em que  $\Delta t$  vai pra zero. Assim, quando  $n \rightarrow \infty$ , como  $\Delta t = T/n \rightarrow 0$ , temos o limite  $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(t)$  satisfazendo a equação integral. Da equação integral, obtemos que a solução é continuamente diferenciável e satisfaz a equação diferencial.

O mesmo método pode ser adaptado para se construir uma solução no intervalo  $[t_0 - T, t_0]$ .

A convergência acima ainda pode ser obtida para funções  $f(t, x)$  um pouco menos regulares, satisfazendo uma certa continuidade Lipschitz mencionada na próxima seção. Mas caso a função  $f(t, x)$  seja apenas contínua, então é necessário aproximar  $f(t, x)$  por funções suaves  $f_n(t, x)$ , como polinômios, por exemplo, obter uma solução  $x_n(t)$  correspondendo a cada aproximação e, em seguida, mostrar que existe uma subsequência de  $x^n(t)$  convergindo para uma solução  $x(t)$  de  $x' = f(t, x)$ , garantindo a existência de solução.

**1.3. Existência de soluções via método de Picard.** O método de Picard passa por reescrever a equação diferencial com condição inicial  $x(t_0) = x_0$  na forma integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds.$$

Uma seqüência de funções contínuas é construída recursivamente como

$$\begin{aligned} x^0(t) &= x_0, \\ x^1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^0(s)) \, ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) \, ds, \\ x^2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^1(s)) \, ds, \\ &\vdots \\ x^n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^{n-1}(s)) \, ds, \\ &\vdots \end{aligned}$$

para  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ .

A idéia vem de olhar a equação integral como a equação para um ponto fixo de uma certa transformação. Essa transformação é entre funções. Mais precisamente, para cada função contínua  $y = y(t)$ , podemos considerar a função  $Ty = (Ty)(t)$  dada por

$$(Ty)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds.$$

Assim, a solução procurada satisfaz  $x = Tx$ , ou seja, é ponto fixo da transformação  $T$ .

Podemos fazer uma analogia com o problema de se achar um ponto fixo de uma transformação de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , digamos  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $|\mathrm{d}\varphi(r)/\mathrm{d}r| \leq \theta$  para algum  $\theta < 1$ , então podemos garantir que existe um e somente um ponto fixo  $x^* = \varphi(x^*)$ . Caso contrário, pode não haver nenhum ponto fixo. E um método de se achar o ponto fixo caso a limitação na derivada seja satisfeita é através do método de *aproximações sucessivas*, que consiste em escolher um ponto inicial  $r_0$  qualquer e construir a seqüência

$$r^{n+1} = \varphi(r^n).$$

Assim,  $r^n \rightarrow r^*$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Assumindo  $f(t, x)$  continuamente diferenciável, é possível mostrar que a seqüência de funções  $x^n = x^n(t)$  acima também converge uniformemente para uma função contínua satisfazendo a equação integral acima. Dessa equação integral, deduz-se que essa função contínua é, de fato, continuamente diferenciável e satisfaz a equação diferencial desejada. Como no caso do método de Euler, a convergência acima ainda pode ser obtida para funções  $f(t, x)$  um pouco menos regulares, satisfazendo a continuidade Lipschitz mencionada na próxima seção. Caso a função  $f(t, x)$  seja apenas contínua, então o máximo que se consegue, em geral, é a construção de uma seqüência de soluções de um problema aproximado (como feito no método de Euler) e a existência de uma subseqüência convergindo para uma solução da equação  $x' = f(t, x)$ .

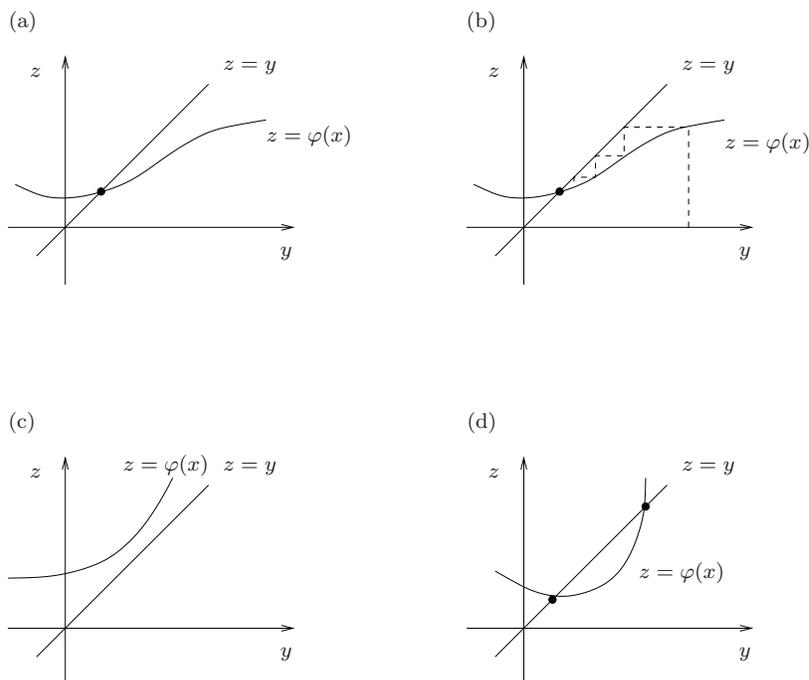


FIGURA 1.3. Ilustração do problema de ponto fixo: (a) uma função com inclinação menor que 1 em módulo, com um único ponto fixo; (b) o método de aproximações sucessivas para chegar no ponto fixo; (c) uma função com inclinação podendo ser maior do que um e sem ponto fixo; e (d) uma função com inclinação podendo ser maior do que um, sem a unicidade dos pontos fixos.

**1.4. Exemplo de aplicação do método de Picard.** Aplicando o método de Picard à equação

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(0) = x_0,$$

temos

$$\begin{aligned} x^0(t) &= x_0, \\ x^1(t) &= x_0 + \int_0^t x^0(s) \, ds = x_0 + \int_0^t x_0 \, ds = x_0 + x_0 t, \\ x^2(t) &= x_0 + \int_0^t x^1(s) \, ds = x_0 + \int_0^t (x_0 + s x_0) \, ds = x_0 \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} \right) \\ &\vdots \\ x^n(t) &= x_0 \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

No limite, obtemos a expressão em série da solução, que é exatamente a exponencial:

$$x(t) = x_0 \left( 1 + \frac{t}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \right) = x_0 e^t.$$

## 2. Unicidade e não-unicidade em relação às condições iniciais

No momento, nada garante que para cada condição inicial  $(t_0, x_0)$  haja apenas uma solução passando por esse ponto. De fato, pode ser que haja mais de uma solução.

**2.1. Exemplo de não-unicidade.** Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}.$$

Essa é uma equação separável, cujas soluções podem ser encontradas pelo método de separação de variáveis:

$$\frac{dx}{3x^{2/3}} = dt \quad \Rightarrow \quad x^{1/3} = t + C \quad \Rightarrow \quad x(t) = (t + C)^3.$$

A constante  $C$  pode ser determinada em função das condições iniciais:  $C = x_0^{1/3} - t_0$ , logo

$$x(t) = (x_0^{1/3} + (t - t_0))^3.$$

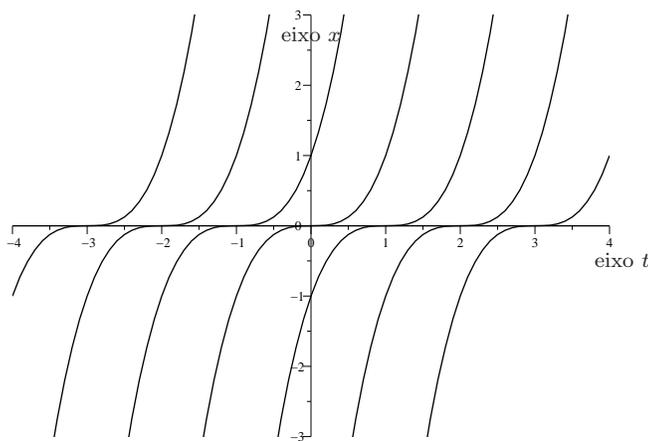


FIGURA 2.1. Soluções  $x(t)$  da equação  $x' = 3x^{2/3}$ , ilustrando a não-unicidade em  $x = 0$ .

Em particular, a solução que passa por  $x(0) = 0$  é

$$x(t) = t^3.$$

No entanto,  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , também é solução. Na verdade, temos infinitas soluções, pois podemos “colar” a solução  $x(t) = 0$ , em um intervalo  $]-\infty, t^*]$ , com a solução  $x(t) = (t - t^*)^3$ , no intervalo restante  $[t^*, \infty[$ . Também é possível “colar” a solução cúbica antes da solução nula. Assim, a solução geral tem a seguinte cara, com dois parâmetros  $t_*$  e  $t^*$ :

$$x(t) = \begin{cases} (t - t_*)^3, & t \leq t_*, \\ 0, & t_* < t < t^*, \\ (t - t^*)^3, & t^* \leq t, \end{cases} \quad \text{onde } -\infty \leq t_* \leq t^* \leq \infty.$$

Veja a figura 2.1. Como se pode observar nesse exemplo, a solução geral nos casos de não-unicidade é mais complicada de se escrever.

**2.2. Condições suficientes para a unicidade.** A unicidade pode ser garantida caso  $f = f(t, x)$  seja mais regular, não apenas contínua. Caso  $\partial f(t, x)/\partial x$  exista e seja contínua, então

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dx \right| \leq M|x_1 - x_2|,$$

para quaisquer  $x_1, x_2$  reais, onde  $M$  é uma limitação para a derivada parcial e  $|\cdot|$  indica o valor absoluto (módulo) de um número real. Uma função satisfazendo essa condição é dita *Lipschitz contínua*.

Então, caso houvesse duas soluções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  com as mesmas condições iniciais, então, da equação integral, teríamos

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \leq M \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)| ds.$$

Assim,

$$\max_{t_0 \leq s \leq t} \{|x_1(s) - x_2(s)|\} \leq M(t - t_0) \max_{t_0 \leq s \leq t} \{|x_1(s) - x_2(s)|\}.$$

Em um intervalo suficientemente pequeno tal que  $M(t - t_0) < 1$ , teríamos necessariamente que

$$x_1(t) = x_2(t),$$

provando a unicidade.

Não é necessário que a função  $f(t, x)$  seja continuamente diferenciável, basta que ela satisfaça a condição de continuidade Lipschitz na variável  $x$ , ou seja,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

A menor constante  $M$  com essa propriedade é chamada de *constante de Lipschitz* da função.

Um exemplo desse tipo de função que não é continuamente diferenciável é a função módulo:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

É fácil verificar que

$$|f(x_1) - f(x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|,$$

e, portanto, a função módulo é Lipschitz contínua. Logo, a unicidade também vale para a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = |x|.$$

A solução geral dessa equação pode ser obtida separando o problema em dois, um para  $x \geq 0$ , com  $x' = |x| = x$ , e outro para  $x < 0$ , com  $x' = |x| = -x$ . Assim, a solução geral dessa equação pode ser escrita como

- i)  $x(t) = x_0 e^t, \forall t \in \mathbb{R}$ , para  $x_0 \geq 0$ ;
- ii)  $x(t) = x_0 e^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}$ , para  $x_0 < 0$ .

A continuidade Lipschitz vale para funções contínuas cuja derivada parcial em relação a  $x$  seja contínua por partes. Mais precisamente, uma função  $f(t, x)$  definida e contínua em uma região  $R$  do plano tem sua derivada parcial  $\partial f / \partial x$  contínua por partes em  $R$  se a região  $R$  puder ser dividida em subregiões  $R_1, \dots, R_n$ , com  $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$ , com  $\partial f / \partial x$  definida e contínua no interior de cada região  $R_k, k = 1, \dots, n$ , e tal que para qualquer ponto  $(t_0, x_0)$  em  $R$  e qualquer seqüência  $\{(t_n, x_n)\}_n$  convergindo para  $(t_0, x_0)$  dentro de uma das regiões (ou seja para um certo  $k, (t_n, x_n) \in R_k$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ), o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x}$$

exista. A existência desse limite garante que a derivada parcial seja limitada próxima de algum ponto de descontinuidade.

A condição de diferenciabilidade (e até mesmo a de continuidade Lipschitz) para unicidade é suficiente mas não necessária. Não entraremos em maiores detalhes nesse aspecto. Vamos nos contentar com os seguintes resultados:

- Se a derivada parcial  $\partial f(t, x) / \partial x$  em relação a  $x$  da função  $f(t, x)$  for contínua em um ponto  $(t_0, x_0)$  no interior do domínio de definição de  $f(t, x)$ , então em um intervalo de tempo suficientemente pequeno contendo  $t_0$ , há uma e somente uma solução  $x(t)$  da equação  $x' = f(t, x)$  satisfazendo a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ ;
- Se a derivada parcial  $\partial f(t, x) / \partial x$  em relação a  $x$  for contínua por partes em uma região  $R$  do plano  $tx$ , então para qualquer ponto  $(t_0, x_0)$  no interior dessa região  $R$ , existe um intervalo de tempo suficientemente pequeno contendo  $t_0$ , no qual há uma e somente uma solução  $x(t)$  da equação  $x' = f(t, x)$  satisfazendo a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ ;
- Se  $f(t, x)$  for do tipo  $(x - x_*)^\alpha$ , com  $0 < \alpha < 1$ , então há mais de uma solução da equação  $x' = f(t, x)$  com a condição inicial  $x(t_*) = x_*$ .

Observe que a segunda condição engloba a primeira, mas resolvemos separar as duas pois a primeira é mais simples e será aplicável na maioria dos casos em que estamos interessados. No caso do ponto  $(t_0, x_0)$  não estar no interior do domínio de definição da  $f(t, x)$ , a situação é mais delicada. Não nos preocuparemos com esse caso.

**2.3. \*Unicidade no futuro e no passado.** As condições que acabamos de ver garantem a unicidade tanto no futuro quanto no passado. Mais precisamente, sob as condições de

diferenciabilidade de  $f(t, x)$  em relação a  $x$ , podemos garantir que, dada a condição inicial

$$x(t_0) = x_0,$$

há somente uma solução  $x = x(t)$  da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

definida em um intervalo  $]t_1, t_2[$  contendo  $t_0$ , ou seja,  $t_1 < t_0 < t_2$ . Isso garante a unicidade no passado, ou seja, no intervalo  $]t_1, t_0[$  e também no futuro, ou seja, no intervalo  $]t_0, t_2[$ . Em certas situações, porém, onde as condições para a unicidade falham, pode ainda haver unicidade em uma das direções, no passado ou no futuro.

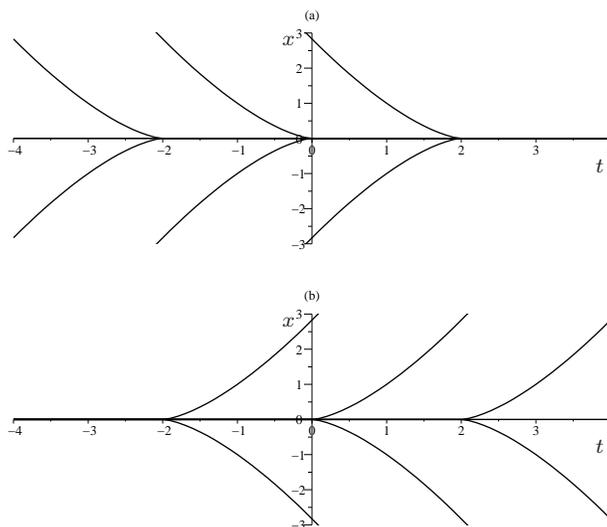


FIGURA 2.2. Soluções  $x(t)$  das equações (a)  $x' = -(3/2)x^{1/3}$ , ilustrando a não-unicidade no passado (irreversibilidade) e unicidade no futuro (determinismo), a partir dos pontos em que  $x = 0$ ; e (b)  $x' = (3/2)x^{1/3}$ , ilustrando a unicidade no passado (reversibilidade) e não-unicidade no futuro (indeterminismo), a partir dos pontos em que  $x = 0$ .

No exemplo de não-unicidade  $x' = 3x^{2/3}$ , vimos que a não-unicidade acontece tanto no passado quanto no futuro: dada a condição inicial  $x(t_0) = 0$ , temos várias soluções satisfazendo essa condição mas com comportamentos diferentes no futuro e/ou no passado.

Considerando, agora, a equação

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}x^{1/3},$$

vemos, por separação de variáveis, que as soluções têm a forma

$$x(t) = \begin{cases} \pm(t_* - t)^{3/2}, & t \leq t_*, \\ 0, & t > t_*, \end{cases} \quad \text{onde } -\infty \leq t_* < \infty.$$

Observe que todas as soluções eventualmente alcançam a origem  $x = 0$  e se mantêm nesse ponto a partir de um instante  $t_*$ . Dado um certo valor  $t_0 \in \mathbb{R}$ , todas as soluções com  $t_* \leq t_0$  satisfazem a condição  $x(t_0) = 0$ . Isso nos dá a não-unicidade no passado. Mas a unicidade no futuro está garantida, pois não tem como uma solução “escapar” da origem  $x = 0$ . Esse comportamento está ilustrado na figura 2.2(a).

O tipo de não-unicidade pode ser deduzido do gráfico da função próximo a um ponto onde a derivada em relação a variável dependente não está definida. Em particular, vamos considerar o caso de uma equação autônoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

com um zero  $x_0$  de  $f$ , i.e.  $f(x_0) = 0$ , e onde  $f'(x)$  está definido para  $x$  próximo de  $x_0$  mas não para  $x_0$ . Vamos assumir, ainda, que o gráfico de  $f(x)$  próximo a  $x_0$  tenha uma das formas ilustradas na figura 2.3. No caso (a), temos, pelo gráfico, que  $f(x)$  é positiva à direita de  $x_0$  e negativa à esquerda. Como  $x' = f(x)$ , isso significa que  $x$  é crescente à direita de  $x_0$  e decrescente à esquerda. Portanto, as soluções se afastam de  $x_0$ . Nesse caso, podemos ter não-unicidade no futuro, pois uma solução pode escapar de  $x_0$ , mas necessariamente temos unicidade no passado, pois nenhuma solução pode se aproximar de  $x_0$ . Uma solução que passe por  $x_0$  em um instante  $t_0$  necessariamente será igual a  $x_0$  para  $t \leq t_0$ .

No caso (b) da figura 2.3, as soluções se afastam de  $x_0$ , mas não podem se aproximar de  $x_0$ . Um raciocínio análogo ao anterior indica que podemos não ter unicidade no passado, pois as soluções podem alcançar  $x_0$ , mas necessariamente temos unicidade no futuro, pois nenhuma solução pode escapar de  $x_0$ .

Finalmente, nos casos (c) e (d) da figura 2.3, podemos não ter unicidade nem no passado nem no futuro, pois as soluções podem se aproximar de  $x_0$  por um lado e escapar por outro.

Em muitos casos físicos, a unicidade apenas no futuro é natural. Um objeto em repouso, por exemplo, pode ter chegado nesse estado por diversos caminhos possíveis. Pode ser impossível descobrir exatamente a sua trajetória antes de alcançar o estado de repouso, sendo esse um sistema irreversível.

A não-unicidade no futuro, porém, é menos aceita, indicando um possível erro na modelagem, ou seja, a equação obtida pode não corresponder ao fenômeno modelado. Isso se baseia na idéia filosófica de *determinismo*, que afirma que o futuro está determinado pelas condições atuais, não podendo haver mais de um futuro possível. Isso, porém, leva a questões filosóficas delicadas.

Uma equação que apresenta não-unicidade apenas no futuro é  $x' = (3/2)x^{1/3}$ . Verifique. O comportamento das soluções dessa equação está ilustrado na figura 2.2(b).

## Exercícios

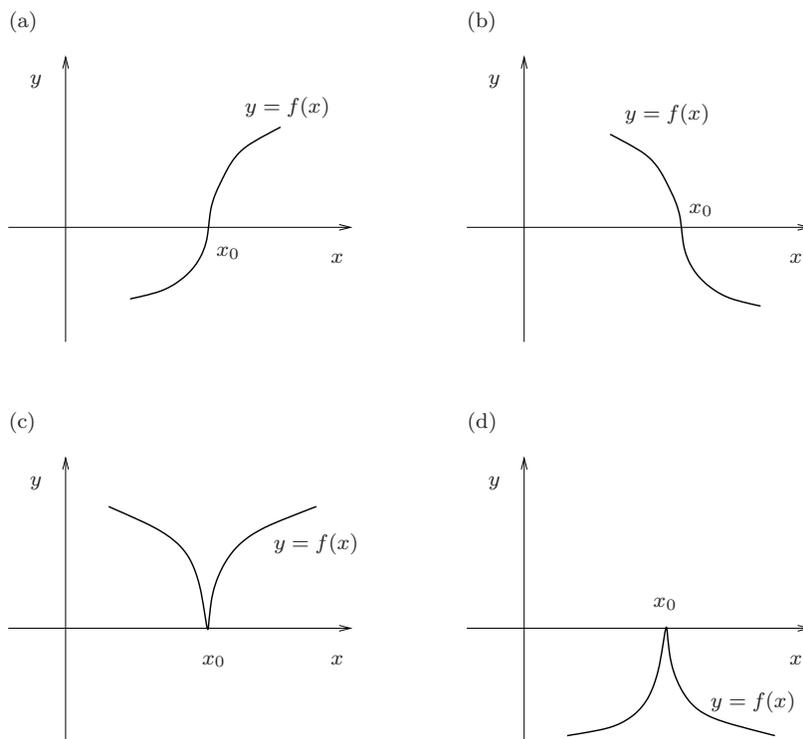


FIGURA 2.3. Exemplos de unicidade parcial: (a) unicidade no passado; (b) unicidade no futuro; (c) e (d) nenhuma unicidade garantida.

**2.1.** Em cada equação do tipo  $x' = f(t, x)$  abaixo, determine as regiões no plano  $tx$  onde a função correspondente  $f(t, x)$  está definida e tem derivada parcial em relação a  $x$  contínua por partes em  $t$  e  $x$  e, portanto, a unicidade pode ser garantida no interior da região.

- (a)  $x' = x \sin t$ ,      (b)  $x' = \ln x^{1/2}$ ,      (c)  $x' = \sqrt{tx}$ ,      (d)  $x' = x - t^{1/3}$ ,  
 (e)  $x' = |x - 1|$ ,      (f)  $x' = x^{1/2}|x - 1|^{1/3}$ ,      (g)  $x' = |tx|$ ,      (h)  $x' = |x - t|$ ,  
 (i)  $x' = (x - t)^{1/3}$ ,      (j)  $x' = x\sqrt{x - 2}$ .

**2.2.** Considere a equação  $x' = x^{1/2} - 1$ , em  $x \geq 0$ . Mostre que a função constante  $x(t) = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é solução dessa equação. Podemos garantir que ela seja a única solução com a condição inicial  $x(0) = 1$ ?

**2.3.** Resolva a equação

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}x^{1/3}$$

por separação de variáveis e verifique que há unicidade apenas no passado.

**2.4.** Escreva a solução geral da equação  $x' = (x - 1)^{1/2}$ , considerando apenas o semiplano  $x \geq 1$ .

- 2.5.** Escreva a solução geral da equação  $x' = (x - x_*)^\alpha$ , para  $0 < \alpha < 1$  e  $x_* \in \mathbb{R}$ , considerando apenas o semiplano  $x \geq x_*$ .
- 2.6.** Implemente o programa abaixo em **Scilab** (ou similar em **Matlab**, **Maple**, etc) para traçar as soluções da equação  $x' = \sin(tx)$  com condições iniciais  $x(-20) = -2, -1, 0, 1, 2$ . Para tal, instale a versão do **Scilab** para o seu sistema operacional (disponível para Linux ou Windows 9X/NT/2000/XP, por exemplo), edite um arquivo texto com os comandos abaixo (e chame-o de `programaequacaoprimeiraordem.sce` por exemplo) e, por fim, execute, na tela de comando do **Scilab**, o comando `exec programaprimeiraordem.sce`

```
// Programa Scilab para traçar soluções da equação x'=f(t,x)

// define termo da equação x'=f(t,x):
deff("[ff]=f(t,x)", ["ff=sin(t*x)"]);
// define instante inicial:
t0=-20;
// define instante final
T=20;
// define passo de tempo para a definição da solução:
dt=0.1;
// define intervalo de tempo e passo temporal
t=[t0:dt:T];

// define posição inicial:
x0=0;
// resolve equação diferencial x'=f(t,x), x(t0)=x0:
x=ode(x0,t0,t,f);
// traça o gráfico da solução:
plot2d(t,x);

// define nova posição inicial:
x0=1;
// resolve equação diferencial x'=f(t,x), x(t0)=x0:
x=ode(x0,t0,t,f);
// traça o gráfico da solução:
plot2d(t,x);

// define nova posição inicial:
x0=2;
// resolve equação diferencial x'=f(t,x), x(t0)=x0:
x=ode(x0,t0,t,f);
```

```
// traça o gráfico da solução:
plot2d(t,x);

// define nova posição inicial:
x0=-1;
// resolve equação diferencial x'=f(t,x), x(t0)=x0:
x=ode(x0,t0,t,f);
// traça o gráfico da solução:
plot2d(t,x);

// define nova posição inicial:
x0=-2;
// resolve equação diferencial x'=f(t,x), x(t0)=x0:
x=ode(x0,t0,t,f);
// traça o gráfico da solução:
plot2d(t,x);
```

- 2.7.** Modifique o programa Scilab do exercício 2.6 para traçar as soluções da equação  $x' = x \sin t$  no intervalo  $-10 \leq t \leq 10$  com as condições iniciais

$$x(-10) = -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4.$$

- 2.8.** Implemente o seguinte programa Scilab usado para criar a figura 1.1.

```
// define função f(t,x)=(t/4-x)*sin(x-t)/6 )
deff("[ff]=f(t,x)", ["ff=(t/4-x)*sin(x-t)/6"]);
// define campo de vetores (1, f(t,x))
deff("[ff]=fc(t,x)", ["ff=[1;f(x(1),x(2))]]");
// traça campo de vetores no retângulo [0,10]x[-1,1]
x1=[0:1:10];
x2=[-1:0.2:1];
fchamp(fc,0,x1,x2);

// traça trajetórias x'=(t/4-x)*sin(x-t)/6, x(0)=-0.4, 0.4
xset("thickness",3);
t=[0:0.01:10];
x=ode(-0.4,0,t,f);
plot2d(t,x,1,"000");
x=ode(0.4,0,t,f);
plot2d(t,x,1,"000");
xset("thickness",1);
```

## CAPÍTULO 3

### Equações de Primeira Ordem - Aspectos Geométricos

#### 1. \*Isóclinas e o estudo geométrico de equações não-autônomas

Considere uma equação diferencial de primeira ordem não-autônoma da forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Vimos, em alguns exemplos, que as soluções  $x = x(t)$  da equação diferencial podem ser representadas por curvas  $(t, x(t))$  no plano  $tx$ . Vamos ver, agora, como certas propriedades das soluções podem ser obtidas diretamente da equação, sem a necessidade de uma fórmula explícita para as soluções. De fato, uma equação diferencial de primeira ordem nos dá uma relação para a *inclinação*  $dx/dt$  da solução. Uma solução  $x = x(t)$  passa pelo ponto  $(t, x) = (t, x(t))$  no plano  $tx$  e, nesse ponto, tem inclinação  $dx/dt = f(t, x)$ . Assim, a partir do estudo das inclinações dadas por  $f(t, x)$ , é possível fazer um esboço das soluções.

**1.1. Isóclinas.** Um conceito útil nessa análise geométrica é o de isóclina. Uma *isóclina* é o lugar geométrico (no plano  $tx$ ) dos pontos nos quais as soluções têm uma mesma inclinação. Mais precisamente, para cada real  $m$ , temos a isóclina dada pelo conjunto de pontos  $(t, x)$  tais que

$$f(t, x) = m.$$

Cada solução da equação diferencial que passa por um ponto dessa isóclina tem, nesse ponto, inclinação  $dx/dt = m$ .

No caso da equação de decaimento radioativo,  $x' = -\lambda x$ , temos as isóclinas

$$-\lambda x = m.$$

Nesse caso, as isóclinas são as retas horizontais  $x = -m/\lambda$ , no plano  $tx$  (figura 1.1(a)). Em cada ponto da isóclina  $x = -m/\lambda$ , passa uma solução com inclinação  $m$ , o que pode ser visualizado traçando-se segmentos de reta com inclinação  $m$ , ao longo da isóclina (figura 1.1(b)). A partir apenas das isóclinas e dos segmentos de reta correspondentes, é possível visualizar o comportamento de decaimento das soluções.

**1.2. Concavidade.** Uma outra informação útil que pode ser obtida diretamente da equação é a concavidade das soluções. A concavidade é dada pelo sinal da segunda derivada, com a função sendo *côncava para cima* (ou tendo concavidade para cima ou positiva) se

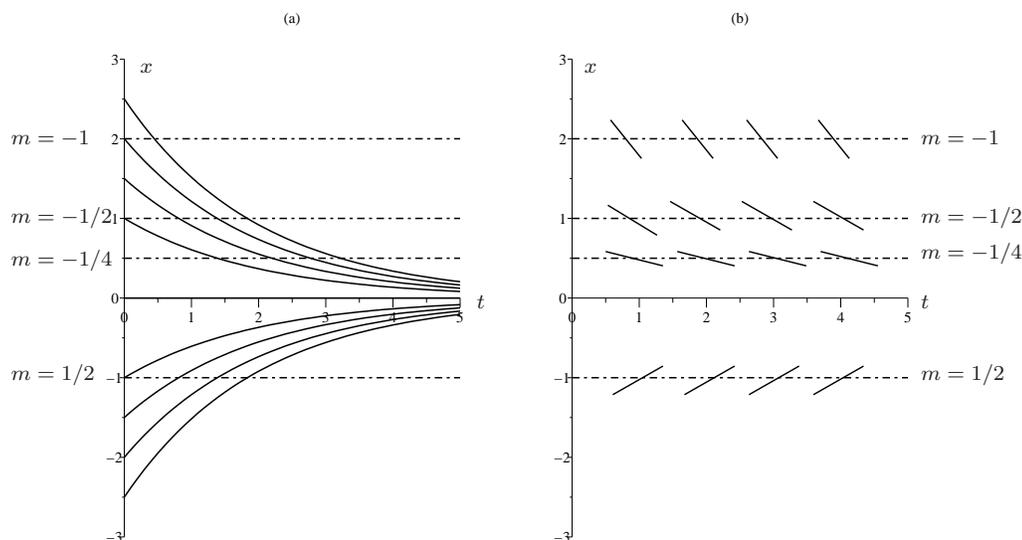


FIGURA 1.1. (a) Soluções da equação de decaimento radioativo (linhas sólidas), com  $\lambda = 1/2$ , e isóclinas (linhas tracejadas) correspondentes a  $m = -1/2, 1/4, 1/2$  e  $m = 2$ ; e (b) mesmas isóclinas, com segmentos de reta indicando a inclinação das soluções através das isóclinas.

$x'' > 0$  e *côncava para baixo* (ou tendo concavidade para baixo ou negativa) se  $x'' < 0$ . No caso da equação de decaimento radioativo, temos

$$x'' = (-\lambda x)' = -\lambda x' = \lambda^2 x.$$

Assim,  $x''$  é positivo quando  $x > 0$ , é negativo quando  $x < 0$ , e se anula quando  $x = 0$ . Nesse caso, as regiões de concavidade para cima e para baixo das soluções são separadas pela “curva”

$$x'' = 0 = \lambda^2 x,$$

isto é, por  $x = 0$ .

Mais geralmente, dada uma equação

$$x' = f(t, x),$$

a segunda derivada é dada por

$$x''(t) = \partial_t f(t, x(t)) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))x'(t) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))f(t, x(t))$$

onde  $f_t$  e  $f_x$  indicam as derivadas em relação a  $t$  e  $x$ , respectivamente. Assim, as regiões de concavidade das soluções no plano  $tx$  são dadas pelo sinal de  $f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x)$  e, portanto, delimitadas, em geral, pela curva de nível zero dessa função,

$$f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x) = 0.$$

Essas curvas de nível zero são os pontos de inflexão das soluções.

Pode acontecer, no entanto, de  $f(t, x)$  não estar definida em todo o plano, de modo que a concavidade pode ser separada pela região de indefinição da função (veja exemplo abaixo).

**1.3. Cuidado com a notação.** As variáveis fundamentais são a dependente e a independente. Se chamamos elas de  $x$  e  $t$  ou de  $y$  e  $x$ , ou outras letras quaisquer, isso não é tão relevante. Mas é preciso tomar cuidado, principalmente com a variável  $x$ , que, com frequência, ora pode ser a variável dependente, ora, a variável independente. No caso acima, consideramos equações da forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

onde  $x$  é a variável dependente. Mas, com frequência, iremos considerar equações escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

onde  $x$  é a variável independente. Nesse caso, as isóclinas são dadas por

$$f(x, y) = m,$$

no plano  $xy$ . A concavidade é dada pelo sinal da função

$$f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y).$$

**1.4. Exemplos.** Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = -2tx.$$

Esta é uma equação separável e pode ser resolvida via separação de variáveis. Mas vamos deixar isso de lado, por hora, e prosseguir com a análise geométrica. Posteriormente vamos considerar equações que não podem ser resolvidas explicitamente. As isóclinas da equação em consideração são as curvas

$$2tx = -m.$$

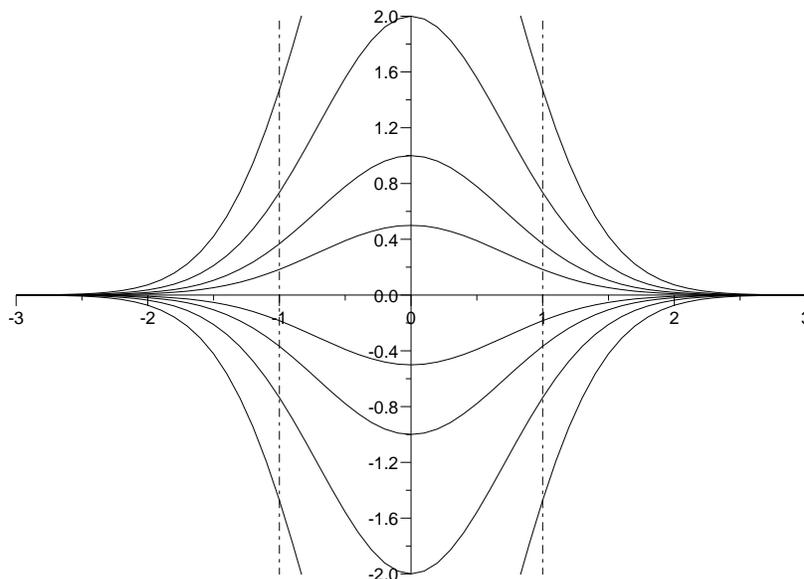
Logo, as soluções são decrescentes no primeiro e terceiro quadrantes e crescentes nos outros dois quadrantes. Há uma solução estacionária igual a  $x(t) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além dessa, as soluções no semi-plano  $x > 0$  alcançam um máximo em  $t = 0$ , enquanto que as soluções no semi-plano  $x < 0$  alcançam um mínimo em  $t = 0$ . As regiões de concavidade são determinadas pelo sinal de

$$x'' = -2x - 2tx' = -2x + 2t^2x = 2x(t^2 - 1).$$

Logo, as soluções são côncavas para cima quando  $x > 0$ ,  $|t| > 1$  e quando  $x < 0$ ,  $|t| < 1$  e são côncavas para baixo quando  $x > 0$ ,  $|t| < 1$  e quando  $x < 0$ ,  $|t| > 1$ . Inflexões ocorrem quando as soluções cruzam as retas  $t = \pm 1$ . A figura 1.2 ilustra algumas soluções dessa equação.

Considere, agora, a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

FIGURA 1.2. Soluções da equação  $x' = -tx$ .

As isóclinas são as retas

$$y = mx$$

que, por coincidência, também têm inclinação  $m$  (figura 1.3). Assim, é fácil deduzir que as próprias isóclinas são as soluções da equação, o que pode ser diretamente verificado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(mx) = m = \frac{y}{x}.$$

Um exemplo mais elaborado é dado pela equação

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2.$$

As isóclinas são as parábolas (figura 1.4)

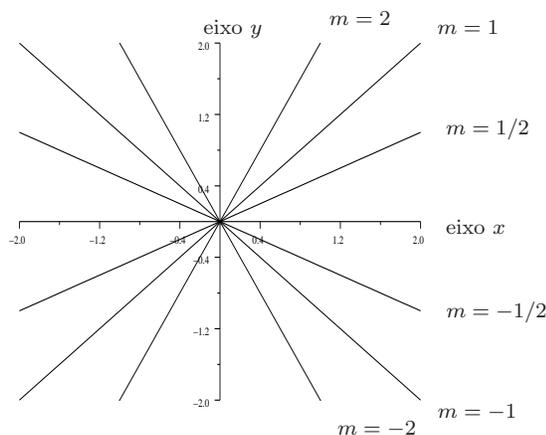
$$y = m + x^2.$$

As regiões de concavidade são determinadas pelo sinal de

$$y'' = y' - 2x = y - x^2 - 2x.$$

O sinal é delimitado pela curva de nível zero dessa função, ou seja, pela parábola

$$y = x^2 + 2x.$$

FIGURA 1.3. Soluções e isóclinas coincidentes da equação  $y' = y/x$ .

Na região do plano acima dessa parábola, a segunda derivada  $y''$  das soluções, por ser igual a  $y - x^2 - 2x$ , é positiva e as soluções nessa região são côncavas para cima. Na região do plano abaixo dessa parábola, as soluções são côncavas para baixo; veja figura 1.4(b). A figura 1.4(c) indica as regiões de crescimento e de decrescimento das soluções (setas) em combinação com as regiões de concavidade para cima e para baixo (pequenas parábolas). A figura 1.4(d) ilustra algumas soluções de  $y' = y - x^2$ .

Mas nem sempre as regiões de diferentes concavidades são separadas pela curva de nível zero. Na equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

por exemplo, temos

$$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

O numerador se anula apenas na origem,  $x = y = 0$ . Mas a função  $-x/y$  não está definida em todo eixo  $x$  e o sinal de  $y''$  muda de acordo com o sinal de  $y$ . Em outras palavras, as regiões de concavidade são delimitadas pelo eixo  $y = 0$ , no qual a equação não está definida. Em  $y > 0$ , as soluções são côncavas para baixo, enquanto que em  $y < 0$ , as soluções são côncavas para cima.

Em resumo, na busca do comportamento geométrico das soluções de uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

pode-se, inicialmente, fazer o esboço de algumas isóclinas, em conjunto com os segmentos indicando as inclinações das soluções sobre cada isóclina. Em seguida, procura-se determinar as regiões de crescimento e de decrescimento, em conjunto com as regiões de concavidade para cima e para baixo, das soluções. Isso pode ser feito começando-se com a curva de

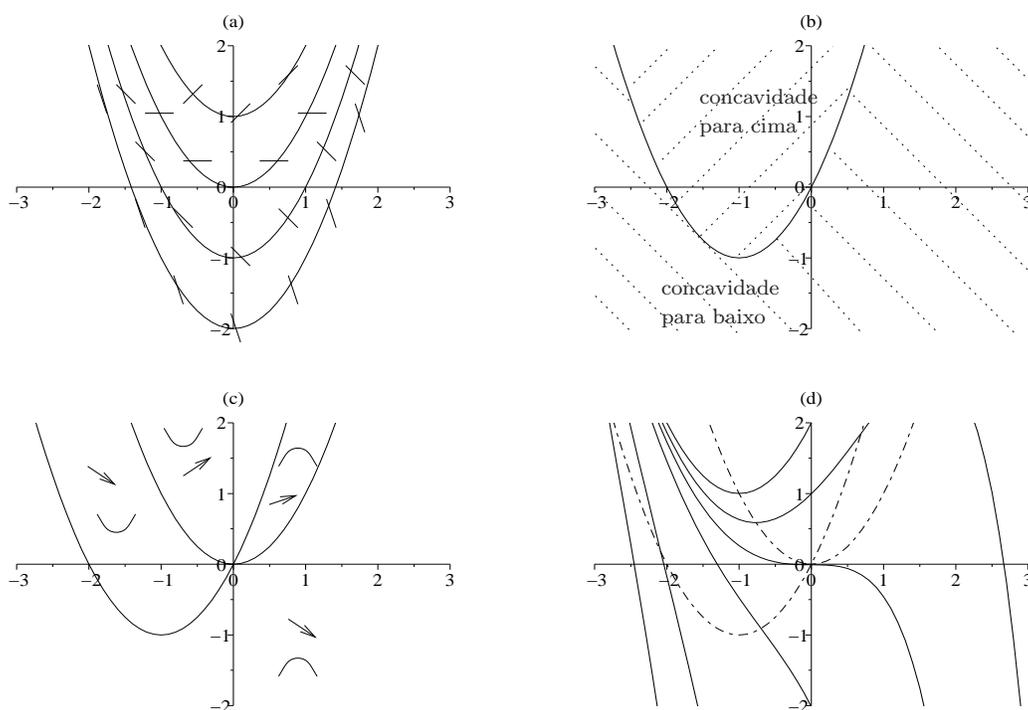


FIGURA 1.4. Sobre a equação  $y' = y - x^2$ , no plano  $xy$ : a) isóclinas (parábolas) com as inclinações das soluções (segmentos de reta) correspondentes a  $m = -2, -1, 0, 1$ ; b) regiões de concavidade para cima e para baixo das soluções; c) regiões de crescimento e de decréscimo das soluções em combinação com as regiões de concavidade para cima e para baixo; d) algumas soluções típicas da equação (linhas sólidas) e as regiões delimitadores (linhas tracejadas) do crescimento/decréscimo e da concavidade das soluções.

inclinação zero das soluções e com a curva de inflexão (segunda derivada nula) das soluções. Essas curvas determinam, em geral, quatro tipos de região, de acordo com a inclinação e a concavidade. No caso da função  $f(x, y)$  não estar definida no plano todo, as regiões de indefinição também devem ser identificadas e podem determinar mudanças de inclinação e de concavidade. A partir desses quatro tipos de região, já deve ser possível esboçar os tipos de comportamento geométrico das várias soluções.

## Exercícios

- 1.1. Para cada uma das equações não-autônomas abaixo, trace i) as isóclinas; ii) os segmentos de reta indicando as inclinações das soluções em cada isóclina; iii) as regiões de inclinação positiva, negativa e nula das soluções; iv) as regiões de concavidade

das soluções; e v) soluções típicas.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, x \neq 0, & \text{(b)} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, y \neq 0, & \text{(c)} \frac{dy}{dx} = xy, \\ \text{(d)} \frac{dy}{dx} = y - x, & \text{(e)} \frac{dx}{dt} = x + t, & \text{(f)} \frac{dx}{dt} = t^2x, \\ \text{(g)} \frac{dx}{dt} = -tx, & \text{(h)} \frac{dx}{dt} = x - t^3, & \text{(i)} \frac{dx}{dt} = x + t^3, \end{array}$$

**1.2.** Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = y - 2x + 1.$$

Trace, no plano  $xy$ , as isóclinas associadas às inclinações  $-1, 0, 1, 2, 3$  e determine as regiões de concavidade. Faça, ainda, um esboço da solução  $y(x)$  que satisfaz  $y(0) = 0$ .

**1.3.** Modifique o programa `Scilab` do exercício 2.6 do capítulo 2 para traçar algumas soluções da equação  $dy/dx = y - x^2$  discutida na presente seção.

## 2. Equações autônomas e linhas de fase

Um caso particular da equação  $dx/dt = f(t, x)$  é quando a função  $f(t, x)$  independente de  $t$ , i.e.  $f(t, x) = f(x)$ , como no caso de decaimento radioativo. Neste caso, temos uma equação de primeira ordem dita *autônoma*:

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Com frequência, iremos escrever, simplesmente,

$$x' = f(x),$$

com a variável independente omitida.

Conforme mencionado anteriormente, equações autônomas representam modelos sem a influência de fatores externos sazonais.

**2.1. Isóclinas e regiões de concavidade em equações autônomas.** O caso autônomo é mais simples de se analisar, pois as isóclinas são sempre horizontais! Veja, por exemplo, a figura 1.1. Assim, o comportamento das soluções pode ser obtido diretamente do gráfico da função  $f = f(x)$ , como veremos a seguir.

Tomemos como exemplo a equação com  $f(x) = x - x^2$ , i.e.

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2.$$

As isóclinas são horizontais, dadas por  $x - x^2 = m$ , i.e.  $x(1 - x) = m$ . Para  $m = 0$ , temos  $x = 0$  ou  $x = 1$ . Nessas duas retas, as soluções têm inclinação zero. Para  $0 < x < 1$ , temos  $m > 0$ , ou seja, para  $x$  entre 0 e 1, as soluções tem inclinação positiva; são crescentes. Para  $x > 1$  ou  $x < 0$ , temos  $m < 0$  e as soluções têm inclinação negativa; são decrescentes (figura 2.1(a)).

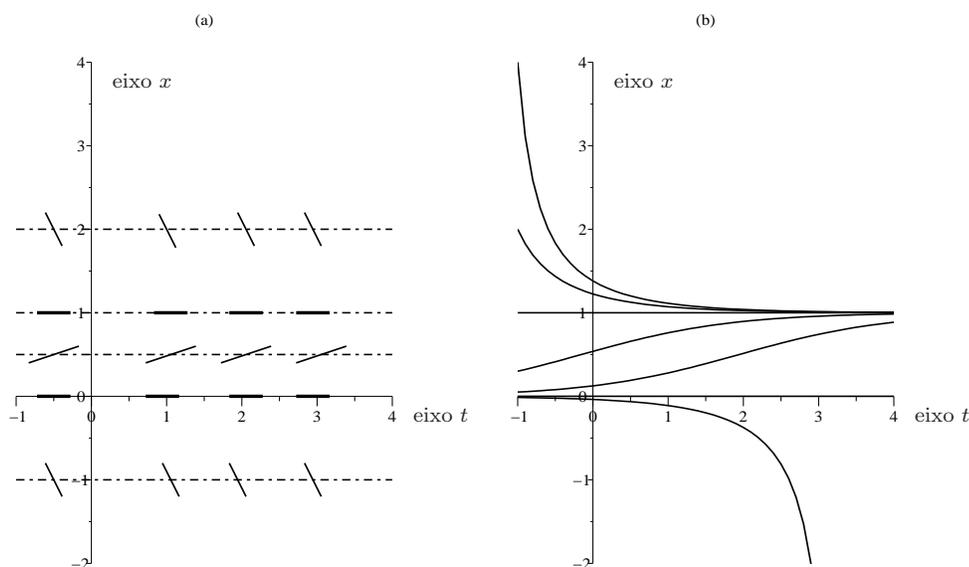


FIGURA 2.1. Sobre a equação  $x' = x - x^2$ : (a) isóclinas (linhas tracejadas) e inclinações (segmentos de reta) das soluções; (b) algumas soluções.

Primeiramente, nos zeros de  $f$ , i.e. nos pontos onde  $f(x) = 0$ , a inclinação é horizontal e coincide com a da isóclina correspondente. Portanto, a solução correspondente é horizontal, ou seja, constante. Mais precisamente, se  $f(x^*) = 0$ , então  $x(t) = x^*$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma solução constante, dita *solução estacionária*. De fato, por um lado,  $dx(t)/dt = 0$ , pois  $x(t) = x^*$  é constante, e, por outro,  $f(x(t)) = f(x^*) = 0$ , de modo que  $x(t) = x^*$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é solução da equação  $dx/dt = f(x)$ .

No caso da equação  $x' = x - x^2$ , temos duas soluções estacionárias,  $x(t) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e  $x(t) = 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , como ilustrado na figura 2.1(b).

Quanto às outras soluções (não-estacionárias), temos três comportamentos típicos. Para  $x$  entre 0 e 1, as soluções são crescentes, “saindo” de  $x = 0$  e “indo” para  $x = 1$ , à medida que  $t$  aumenta. Para  $x > 1$ , as soluções são decrescentes, saindo de  $x = +\infty$  e indo para  $x = 1$ . Para  $x < 0$ , as soluções são decrescentes, saindo de  $x = 0$  e indo para  $-\infty$ .

A concavidade em equações autônomas também é bem mais simples. As regiões de concavidade são “bandas” no plano  $tx$ . De fato, na equação

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)),$$

a concavidade é dada pelo sinal

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{df(x(t))}{dx} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{df(x(t))}{dx} f(x(t)).$$

Assim, as regiões de concavidade para cima são dadas por

$$\{(t, x); f'(x)f(x) > 0, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{x; f'(x)f(x) > 0\},$$

que é a união da região onde  $f$  é positiva e crescente com a região onde  $f$  é negativa e decrescente. As regiões de concavidade para baixo são dadas por

$$\{(t, x); f'(x)f(x) < 0, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{x; f'(x)f(x) < 0\},$$

que é a união da região onde  $f$  é positiva e decrescente com a região onde  $f$  é negativa e crescente. Para acharmos as regiões de concavidade, podemos traçar o gráfico de  $f = f(x)$  e identificar essas regiões, conforme ilustrado na figura 2.2, no caso da equação  $x' = x - x^2$ .

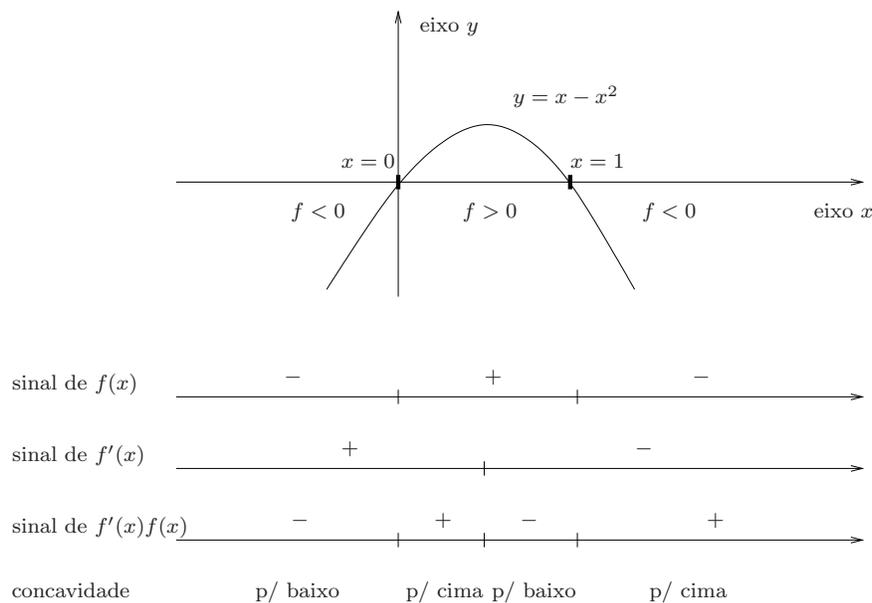


FIGURA 2.2. Gráfico da função  $f(x) = x - x^2$  e, abaixo, a indicação das regiões identificando os sinais de  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f'(x)f(x)$  e as regiões de concavidade das soluções  $x(t)$ .

Com isso, vemos que as soluções na região  $x > 1$  são decrescentes com concavidade sempre para cima; as soluções na região  $x < 0$  são decrescentes com concavidade sempre para baixo; e as soluções na região  $0 < x < 1$  são crescentes, mas com um ponto de inflexão alcançado quando  $x(t) = 1/2$ . Essas regiões estão ilustradas na figura 2.3, junto o gráfico de algumas soluções. O instante  $t$  de inflexão não é óbvio de se descobrir, mas ele ocorre sempre quando a solução alcança o valor  $x(t) = 1/2$ .

A classificação do comportamento das soluções de equações autônomas é, na verdade, ainda mais precisa. De fato, para uma equação autônoma, qualquer translação no tempo de uma solução continua sendo uma solução. Mais precisamente, se  $x(t)$  é uma solução, então

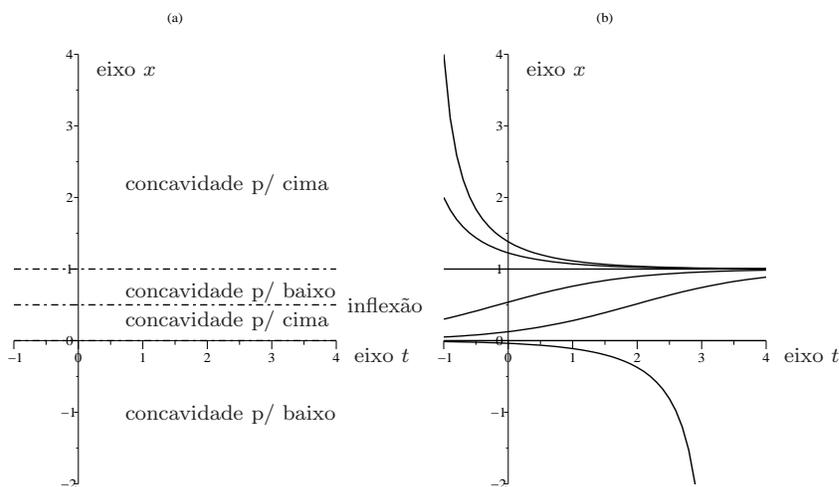


FIGURA 2.3. (a) Regiões de concavidade no plano  $tx$  e (b) soluções da equação  $x' = x - x^2$ .

a translação por um instante  $\tau$ , dada por  $\tilde{x}(t) = x(t + \tau)$ , também é solução, pois

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t + \tau) = \frac{dx}{dt}(t + \tau) = f(x(t + \tau)) = f(\tilde{x}(t)).$$

Esta é uma propriedade exclusiva de equações autônomas. A quantidade fundamental para a evolução não é o instante  $t$ , mas o valor  $x(t)$  da solução assumido naquele instante. Se esse mesmo valor for assumido em instantes diferentes, a evolução da solução será, na verdade, a mesma, a menos de uma translação no tempo. Isto porque a inclinação da solução é dada por uma função  $f(x(t))$ . Em uma equação não-autônoma, por outro lado, a inclinação é dada por  $f(t, x(t))$  que pode ser diferente em diferentes instantes, mesmo que o valor  $x$  assumido seja o mesmo.

**2.2. Pontos fixos, órbitas e linhas de fase.** Devido a característica de simetria por translações temporais, que acabamos de descrever, podemos representar as soluções apenas considerando o conjunto de valores assumidos por cada solução. Esse conjunto de valores assumidos por uma solução é chamado de *órbita*. No caso da equação  $x' = x - x^2$ , todas as soluções com condição inicial  $x_0$  no intervalo  $]0, 1[$  assumem, ao longo do eixo  $t$ , todos os valores no intervalo  $]0, 1[$ . Assim, a órbita dessas soluções é todo o intervalo  $]0, 1[$ .

No caso de soluções estacionárias,  $x(t) = x^*$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $f(x^*) = 0$ , a órbita se reduz a um ponto na reta, o ponto  $\{x^*\}$ . Conforme visto acima, a equação  $x' = x - x^2$ , possui duas soluções estacionárias,  $x(t) = 0$  e  $x(t) = 1$ , definidas para  $t \in \mathbb{R}$ . A órbita da solução  $x(t) = 0$  é o ponto  $\{0\}$  e a órbita da solução  $x(t) = 1$  é o ponto  $\{1\}$ . Os pontos dados pelas órbitas de soluções estacionárias são chamados de *pontos fixos*. Os pontos fixos podem ser achados diretamente da equação  $f(x) = 0$ .

No exemplo,  $x' = x - x^2$ , identificamos, até agora, três órbitas, a saber, a órbita  $]0, 1[$  e os pontos fixos  $\{0\}$  e  $\{1\}$ . As outras órbitas são os intervalos  $]1, +\infty[$  e  $]-\infty, 0[$ , correspondendo às soluções acima de  $x = 1$  e abaixo de  $x = 0$ , respectivamente. Nesse exemplo, temos, então, cinco órbitas, que descrevem todas as soluções possíveis. Podemos representar essas órbitas em um único eixo  $x$ , como mostra a figura 2.4. Nessa figura, traçamos, ainda, uma seta indicativa do sentido de evolução de cada órbita não estacionária. À medida que a variável independente cresce (pense em exemplos em que a variável independente representa o tempo), os valores assumidos pela solução variam de acordo com o sentido indicado pela seta.

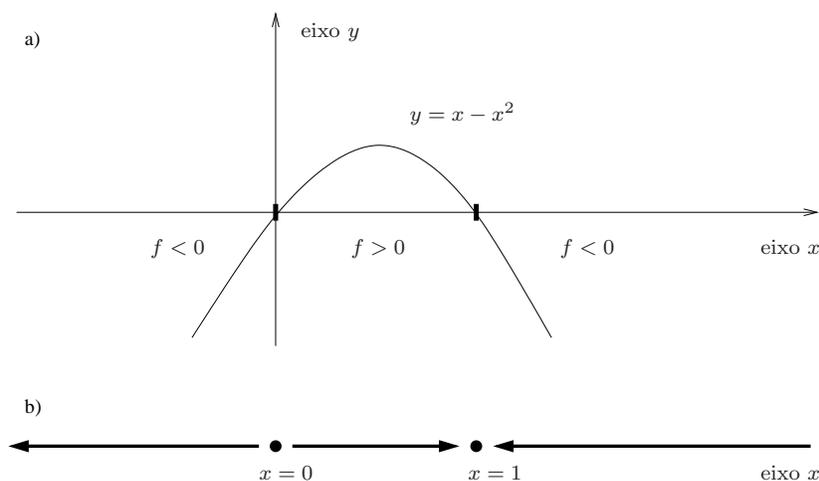


FIGURA 2.4. (a) Gráfico da função  $f(x) = x - x^2$  e (b) linha de fase da equação  $x' = x - x^2$ , exibindo as cinco órbitas da equação e o sentido de evolução delas.

O conjunto de órbitas de uma equação, com a seta indicativa do sentido das trajetórias é chamado de *linha de fase*. A figura 2.4(b) representa a linha de fase da equação  $x' = x - x^2$ . A linha de fase é um caso particular (unidimensional) de um *diagrama de fase*, que vale para uma equação ou um sistema de equações, podendo, então, ser uma linha de fase, um plano de fase, ou um espaço de fase, de acordo com a dimensão. Veremos planos de fase mais adiante.

Como as isóclinas de uma equação autônoma são horizontais, o esboço das isóclinas é um certo desperdício para o entendimento das órbitas. Há, de fato, uma maneira mais simples de se traçar a linha de fase. Ela pode ser obtida diretamente do gráfico da função  $f(x)$ . No caso do exemplo  $x' = x - x^2$ , o gráfico de  $f(x) = x - x^2 = x(1 - x)$  é o de uma parábola, com concavidade para baixo e raízes  $x = 0$  e  $x = 1$  (figura 2.4(a)).

Nos intervalos em que  $f$  é positivo, a derivada de  $x(t)$  é positiva e a solução cresce. Nos intervalos em que  $f$  é negativa, a solução decresce. Se uma condição inicial  $x_0$  está entre dois pontos fixos  $x_1$  e  $x_2$ , com, digamos,  $x_1 < x_2$ , e assumindo que não há nenhum outro ponto fixo entre  $x_1$  e  $x_2$ , então a solução  $x = x(t)$  com  $x(t_0) = x_0$  se aproxima de  $x_1$  ou de  $x_2$ , dependendo do sinal da  $f$  entre  $x_1$  e  $x_2$ . Se o sinal for positivo, então  $x(t)$  será crescente

e se aproximará de  $x_2$ . Se o sinal for negativo, então  $x(t)$  será decrescente e se aproximará de  $x_1$ .

Quando  $t \rightarrow \infty$ , a solução não poderá convergir para nenhum ponto intermediário  $x^*$ , entre  $x_1$  e  $x_2$ , pois este seria ponto fixo. De fato, teríamos

$$f(x^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx(t)}{dt} = 0.$$

Assim,  $x^*$  seria um ponto fixo, o que contraria a hipótese de que não há nenhum outro ponto fixo entre  $x_1$  e  $x_2$ .

Deste modo, os pontos fixos são os zeros da  $f(x)$ , as órbitas são os intervalos entre os pontos fixos, e o sentido de cada órbita é dado pelo sinal da  $f$  entre os respectivos pontos fixos, crescente quando  $f(x) > 0$  e decrescente quando  $f(x) < 0$ .

É preciso observar, ainda, a região de definição da função  $f(x)$ . No caso acima,  $f(x) = x - x^2$  está definido para todo  $x$  real e não precisamos nos preocupar com isso. No caso de decaimento radioativo, não estamos interessados em massas negativas, de modo que podemos considerar  $f(x) = -\lambda x$  definido apenas para  $x \geq 0$ . Nesse caso, a linha de fase se reduz a um ponto fixo em  $x = 0$  e uma órbita decrescente em  $]0, \infty]$ . Se  $f(x) = \arcsin x$ , então  $f(x)$  está definido apenas em  $-1 \leq x \leq 1$ , de modo que a linha de fase dessa equação se reduz ao intervalo  $] -1, 1[$ . Nesse intervalo, temos  $f(0) = 0$ ,  $f(x) > 0$  em  $0 < x \leq 1$  e  $f(x) < 0$  em  $-1 \leq x < 0$ . Desta forma, a linha de fase é composta de um ponto fixo em  $x = 0$  uma órbita  $]0, 1[$  crescente em  $x$  e uma órbita  $[-1, 0[$  decrescente em  $x$ .

Um outro exemplo em que é preciso tomar cuidado com a região de definição da equação é  $x' = \ln x$ . Nesse caso,  $f(x) = \ln x$  está definido para  $x > 0$ . Há um ponto fixo em  $x = 1$ , uma órbita decrescente em  $]0, 1[$  e uma órbita crescente em  $]1, \infty[$ .

Em resumo, para traçarmos a linha de fase, podemos começar delimitando a região (na reta  $x$ ) de definição da equação, ou seja, da função correspondente  $f(x)$ , e esboçando o gráfico de  $f(x)$ . Em seguida, podemos marcar os pontos fixos, que são os zeros de  $f(x)$ . Depois, podemos traçar segmentos de reta entre os pontos fixos (e dentro da região de definição da função), indicando as órbitas não-estacionárias. Finalmente, podemos marcar as setas indicativas do sentido de crescimento das órbitas, que é determinado pelo sinal da  $f(x)$  ao longo de cada órbita: sinal positivo indica um crescimento no sentido positivo de  $x$ , enquanto que um sinal negativo indica um decréscimo em  $x$ .

**2.3. Tipos de pontos fixos.** Os pontos fixos podem ser classificados de acordo com o comportamento das soluções vizinhas. Tipicamente, temos os pontos fixos *atratores*, *repulsores* e *conectores* (figura 2.5). No caso de atratores, as órbitas próximas ao ponto fixo se aproximam dele. No caso de repulsores, as órbitas próximas ao ponto fixo se afastam dele. No caso de um ponto fixo conector, as órbitas de um lado se aproximam dele, enquanto que as órbitas do outro lado se afastam. No exemplo  $x' = x - x^2$ , temos que  $x = 0$  é um ponto fixo repulsor, enquanto que  $x = 1$  é um ponto fixo atrator.

Há outros tipos de pontos fixos? (Veja o exercício 2.7.)

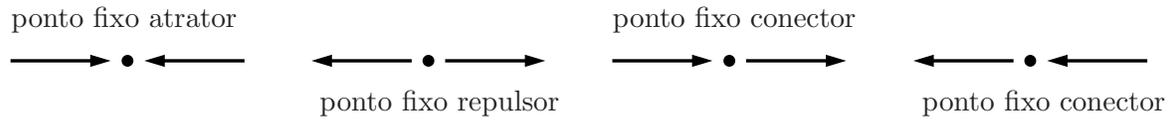


FIGURA 2.5. Pontos fixos atratores, repulsores e conectores.

**2.4. Exemplo: difusão de calor – lei de resfriamento de Newton.** Considere um objeto em um meio com temperatura ambiente  $T_r$ . A lei de resfriamento de Newton afirma que a taxa de variação de temperatura em relação ao tempo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do meio ambiente. Assim, se  $T$  denota a temperatura do objeto, temos a equação

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa(T - T_r).$$

O fator  $\kappa$  representa o coeficiente de dissipação térmica. A função  $f(T) = -\kappa(T - T_r)$  é uma reta, que se anula em  $T = T_r$ , é positiva para  $T < T_r$  e negativa para  $T > T_r$  (figura 2.6(a)). Assim, temos um ponto fixo em  $T = T_r$ , uma órbita decrescente em  $]T_r, \infty[$  e uma órbita crescente em  $] - \infty, T_r[$  (figura 2.6(b)). Cada órbita representa soluções da equação, que nesse caso são da forma  $T(t) = T_r + Ce^{-\kappa t}$ , com  $C = 0$  correspondendo ao ponto fixo,  $C > 0$ , à órbita  $]T_r, \infty[$  e  $C < 0$ , à órbita  $] - \infty, T_r[$  (figura 2.6(c)).

**2.5. Exemplo: dinâmica populacional – o modelo logístico.** Assumindo uma taxa de crescimento específico constante  $\mu > 0$  para uma população de um certo organismo, temos a equação

$$\frac{dx}{dt} = \mu x.$$

Nesse caso, a população cresce exponencial e indefinidamente,  $x(t) = C \exp(\mu t)$ . Por razões de escassez de recursos, fatores sociais, etc., é natural esperarmos que a taxa  $\mu$  não seja constante e diminua com o aumento da população, chegando mesmo a ficar negativo, caso a população seja muito grande.

Assim, é natural considerarmos  $\mu = \mu(x)$  dependendo da população  $x$ . Por exemplo,

$$\mu(x) = \lambda \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right).$$

Para  $x \ll x_r$ , temos  $\mu(x) \approx \lambda$ , ou seja, uma taxa de crescimento específico aproximadamente constante. Para  $x \approx x_r$ , temos  $\mu(x) \ll \lambda$ , ou seja, a taxa de crescimento diminui consideravelmente à medida que a população se aproxima do valor crítico  $x_r$ . Para  $x = x_r$ ,  $\mu(x) = 0$ , e a população se estabiliza. Para  $x > x_r$ , temos  $\mu(x) < 0$ , e a população decresce.

Temos, assim, a equação

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right) x.$$

Uma outra forma de escrever essa equação é

$$x' = \lambda x - \gamma x^2,$$

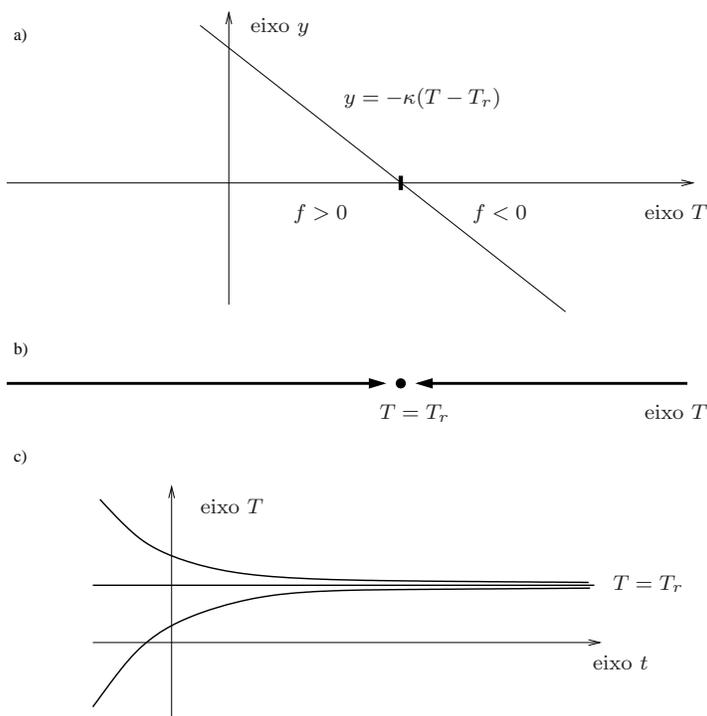


FIGURA 2.6. (a) Gráfico da função  $f(T) = -\kappa(T - T_r)$ ; (b) Linha de fase da equação  $T' = -\kappa(T - T_r)$ , exibindo as três órbitas da equação e o sentido de evolução delas; (c) Gráfico de três soluções  $T = T(t)$ , correspondentes a cada órbita.

onde  $\gamma = \lambda/x_r$ . Este é conhecido como o *modelo logístico* de dinâmica populacional. Sendo os parâmetros  $\lambda$  e  $\gamma$  positivos, sua análise, em termos de linha de fase, é essencialmente a mesma que a da equação  $x' = x - x^2$  feita anteriormente. Temos dois pontos fixos,  $x = 0$  e  $x = x_r = \lambda/\gamma$ , uma órbita ligando  $x = 0$  a  $x = x_r$ , uma órbita decrescendo de  $x = +\infty$  para  $x = x_r$  e, se permitirmos  $x$  negativo, uma outra órbita ligando  $x = 0$  a  $x = -\infty$ . O ponto fixo  $x = 0$  é um repulsor e o ponto fixo  $x = 1$ , um atrator.

Lembrando das fases de crescimento de uma colônia de bactérias, observamos que a equação logística é capaz de modelar aproximadamente a fase exponencial e a de estagnação. As outras fases, no entanto, só podem ser modeladas satisfatoriamente através de sistemas de duas ou mais equações de primeira ordem.

Um exemplo específico é dado pelo crescimento de uma colônia do fungo *S. cerevisiae*. Dois experimento realizados por Gause [6] apresentaram uma evolução do volume desse fungo de acordo com a seguinte tabela.

hora:	6	6,5	15	16	24	29	31,5	33	40	42	43	45,5	47
vol.:	0,37	1,63	6,2	8,87	10,97	12,5	12,6	12,9	13,27	12,77	12,87	12,9	12,7

A melhor aproximação pelo modelo logístico corresponde a  $\lambda = 0,2586$  e  $x_r = 12,74$ .

**Exercícios**

**2.1.** Esboce a linha de fase das seguintes equações diferenciais autônomas, classificando todos os pontos fixos:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \ x' = x(x-1)^2 & \text{(b)} \ x' = x^4 & \text{(c)} \ x' = \cos x & \text{(d)} \ x' = (x-1)x^2 \\ \text{(e)} \ x' = \sin 2x & \text{(f)} \ x' = x^2 & \text{(g)} \ x' = \cos x - 1 & \text{(h)} \ x' = x^2(x-1)(x+1) \\ \text{(i)} \ x' = x^2 + 1 & \text{(j)} \ x' = e^x & \text{(k)} \ x' = x + e^x & \text{(l)} \ x' = \sin x + 1 \end{array}$$

**2.2.** Classifique os pontos fixos das equações do exercício 2.1.

**2.3.** Esboce o gráfico das soluções (no plano  $tx$ ) correspondentes às órbitas das equações do exercício 2.1.

**2.4.** Para cada uma das linhas de fase da figura 2.5, reconstrua o conjunto de soluções no plano  $tx$ , traçando soluções compatíveis com o comportamento indicado na linha de fase.

**2.5.** Trace, no plano  $tx$ , soluções correspondentes a cada uma das órbitas de uma equação cuja linha de fase tem a forma  $\longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow$ .

**2.6.** Se uma solução não-estacionária  $x(t)$  da equação  $x' = x^2(x-1)(x+1)$  é tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , qual o valor de  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$ ?

**2.7.** Esboce a linha de fase da equação  $x' = f(x)$ , onde  $f(x) = -x^3 \sin(1/x)$ , para  $x \neq 0$ , e  $f(0) = 0$ . Podemos classificar todos os pontos fixos dessa equação como atratores, repulsores ou conectores?

**2.8.** Considere a equação diferencial  $x' = 4x^2(3-2x)$ . Faça um esboço da linha de fase dessa equação e faça um esboço do gráfico (no plano  $tx$ ) das soluções particulares com  $x(0) = 1/2$  e  $x(0) = -1$ .

**2.9.** Considere a equação  $x' = x(x+1/2)^2(x-1)^2$ . Seja  $x = x(t)$  a solução tal que  $x(0) = 1/2$ . Quais são os limites  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$ ?

**2.10.** Considere a equação  $x' = x(x-1)(x-2)$ . Se  $x = x(t)$  é a solução tal que  $x(10) = 3/2$ , ache o limite  $\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ .

**2.11.** Dê um exemplo explícito de uma função  $f(x)$  definida para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que a equação  $x' = f(x)$  tenha três pontos fixos, sendo dois repulsores e um atrator.

**2.12.** Várias leis foram propostas para a taxa de crescimento específico em dinâmica populacional, como, por exemplo,

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ \mu(x) = \lambda \ln \frac{x_r}{x}, & \text{(b)} \ \mu(x) = \frac{\lambda(x_r - x)}{x_r - \alpha x}, \\ \text{(c)} \ \mu(x) = \lambda \left( 1 - \left( \frac{x}{x_r} \right)^\alpha \right), & \text{(d)} \ \mu(x) = (\lambda - \alpha x + \beta e^{-x}), \end{array}$$

onde todos os parâmetros são positivos. Faça o esboço do diagrama de fase em cada um desses casos.

**2.13.** No caso da dinâmica logística

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - \gamma x^2,$$

mostre que  $y(t) = (\gamma/\lambda)x(t/\lambda)$  satisfaz

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2.$$

- 2.14.** O modelo de Solow para o crescimento econômico foi discutido no exercício 2.6 do capítulo 1. Nele, o produto nacional total é dado por  $\alpha K^{1-\theta} J^\theta$ , onde  $K$  é o capital,  $J$  é a força de trabalho,  $\alpha > 0$  e  $0 < \theta < 1$ . Uma fração constante  $0 < \lambda < 1$  desse produto é usada para aumentar o capital, de modo que a variação do capital é dada pela equação

$$\frac{dK}{dt} = \lambda \alpha K^{1-\theta} J^\theta.$$

enquanto que a força de trabalho cresce exponencialmente de acordo com a equação diferencial  $J' = \mu J$ , onde  $\mu > 0$ .

- (a) Ache uma equação diferencial de primeira ordem autônoma para o razão  $r(t) = K(t)/J(t)$  entre o capital e o trabalho e determine as regiões de existência e unicidade dessa equação.
- (b) Trace a linha de fase da equação para  $r$  e determine, para valores iniciais  $K(0), J(0)$  positivos arbitrários, o limite da razão capital/trabalho quando  $t$  vai para infinito.
- 2.15.** Implemente a modificação abaixo do programa Scilab do exercício 2.6 do capítulo 2 para traçar algumas soluções da equação  $x' = x - x^2$ . Como algumas soluções explodem em tempo finito, um certo cuidado deve ser tomado com o intervalo temporal de definição de cada solução. Por exemplo, as soluções com condições iniciais  $x(-1) = 0, 0.05, 0.3, 1, 2, 4$  estão definidas para todo  $t \geq 0$  e podemos traçar os seus gráficos no intervalo  $-1 \leq t \leq 5$ . Já a solução com condição inicial  $x(-1) = -0.005$  explode antes de  $t = 5$  e o seu gráfico deve ser traçado em um intervalo menor, por exemplo  $-1 \leq t \leq 4$ . O programa abaixo traça essas soluções

```
// Programa Scilab para traçar soluções da equação x'=x-x^2
// define termo da equação y'=f(t,y):
deff("[ff]=f(t,x)", ["ff=x-x^2"]);
// define instante inicial:
t0=-1;
// define instantes finais
Ta=5;
Tb=4;
// define passo de tempo para a definição da solução:
dt=0.1;
// define intervalos de tempo e passo temporal
ta=[t0:dt:Ta];
tb=[t0:dt:Tb];
// define posições iniciais:
x01=0
```

```

x02=0.05;
x03=0.3;
x04=1;
x05=4;
x06=-0.005;
// resolve equação diferencial x'=f(t,x), x(t0)=x0i:
x1=ode(x01,t0,ta,f);
x2=ode(x02,t0,ta,f);
x3=ode(x03,t0,ta,f);
x4=ode(x04,t0,ta,f);
x5=ode(x05,t0,ta,f);
x6=ode(x06,t0,tb,f);
// traça os gráficos das soluções:
plot2d(ta,[x1' x2' x3' x4' x5'],[1 1 1 1 1]);
plot2d(tb, x6);

```

### 3. Outros aspectos de linhas de fase

**3.1. Interseção de órbitas: unicidade versus não-unicidade.** Nas regiões de unicidade das soluções em relação às condições iniciais, a descrição é mais precisa. A unicidade implica em que ou as órbitas não se interceptam ou elas se coincidem completamente; elas não podem se interceptar apenas parcialmente. Em particular, dados dois pontos fixos  $x_1$  e  $x_2$ , que são soluções constantes, nenhuma outra solução pode “atravessar” esses pontos. Uma solução  $x(t)$  crescente entre  $x_1$  e  $x_2$  não poderá alcançar  $x_2$  em tempo finito. Logo, devemos necessariamente ter o limite  $x(t) \rightarrow x_2$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Analogamente, uma solução  $x(t)$  decrescente entre  $x_1$  e  $x_2$  será tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_1$ . Veja, por exemplo, a figura 2.4(b), que mostra as soluções da equação  $x' = x - x^2$ . As soluções  $x = x(t)$  entre  $x = 0$  e  $x = 1$  são tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ .

Já no caso da equação

$$\frac{dx}{dt} = -x^{2/3},$$

temos a solução trivial  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , assim como a solução  $x(t) = -t^3/3$ . Esta última solução se aproxima de  $x = 0$ , quando  $t \rightarrow 0^-$ , é igual a  $x = 0$ , quando  $t = 0$ , e se afasta de  $x = 0$ , em  $t > 0$ . Ela “atravessa” a solução trivial  $x(t) = 0$  em  $t = 0$ . Não há unicidade, nesse caso, e as órbitas se cruzam. Veja a figura 3.1. Há, na verdade, uma infinidade de soluções se cruzando na origem, como mostra o exemplo da figura 2.2.1.

**3.2. Quão rápido para infinito?** Considere uma equação da forma

$$\frac{dx}{dt} = x^p,$$

em  $x > 0$ , onde  $p > 0$ . Nesse caso, temos  $x^p > 0$  e as soluções crescem ilimitadamente. Mas quão rápido é esse crescimento? Isso está associado à potência  $p$ . De fato, para  $x \geq 1$  fixo,

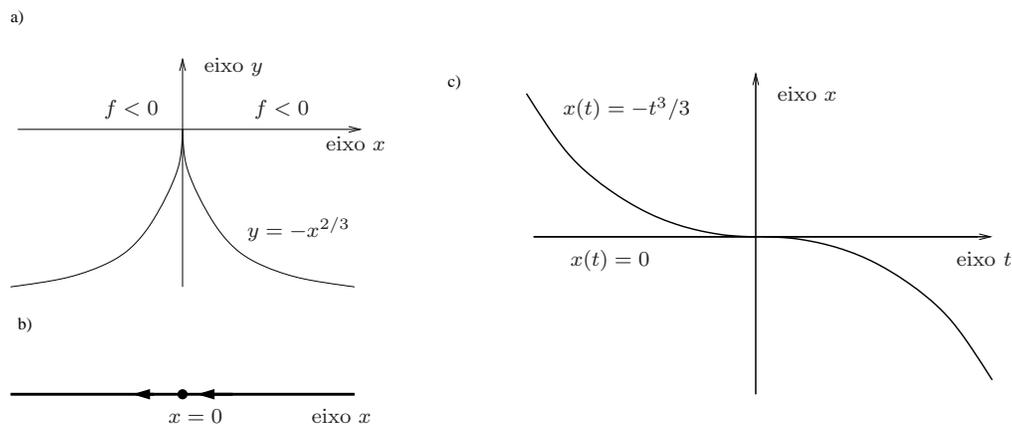


FIGURA 3.1. (a) Gráfico da função  $f(x) = -x^{2/3}$ ; (b) linha de fase da equação  $x' = -x^{2/3}$ , exibindo as três órbitas da equação e o sentido de evolução delas; e (c) gráfico de duas soluções passando pelo mesmo ponto, no mesmo instante, i.e. tais que  $x(0) = 0$ , ilustrando a não-unicidade e o cruzamento de soluções e de órbitas.

temos que  $x^p$  cresce à medida que  $p$  cresce, de modo que a velocidade  $dx/dt = x^p$  é mais rápida quanto maior for  $p$ .

Podemos fazer uma análise mais precisa resolvendo a equação via separação de variáveis. No caso de crescimento populacional ( $p = 1$ ), temos

$$x(t) = Ce^t,$$

definido para todo  $t$  real, e o crescimento é exponencial. No caso  $p = 1/2$ , temos

$$x(t) = \frac{1}{4}(t + C)^2,$$

definido pelo menos para todo  $t$  positivo, e o crescimento é algébrico (um polinômio de grau dois, no caso), muito mais lento que o exponencial. O crescimento também é algébrico para qualquer  $0 < p < 1$  (verifique resolvendo a equação pelo método de separação de variáveis). Nesse caso, o crescimento está limitado entre dois polinômios (de graus  $n$  e  $n + 1$ , respectivamente, onde  $n \leq 1/(1 - p) < n + 1$ ), por isso, dizemos também que a convergência é algébrica.

No caso  $p = 2$ , porém, a solução é

$$x(t) = \frac{1}{C - t},$$

que está definida apenas para  $t < C$ . Além disso,  $x(t) \nearrow \infty$ , quando  $t \nearrow C$ . Nesse caso, a solução diverge em tempo finito e dizemos que houve uma *explosão em tempo finito*. Essa explosão em tempo finito ocorre para todo  $p > 1$ , o que pode ser verificado explicitamente, resolvendo-se a equação por separação de variáveis.

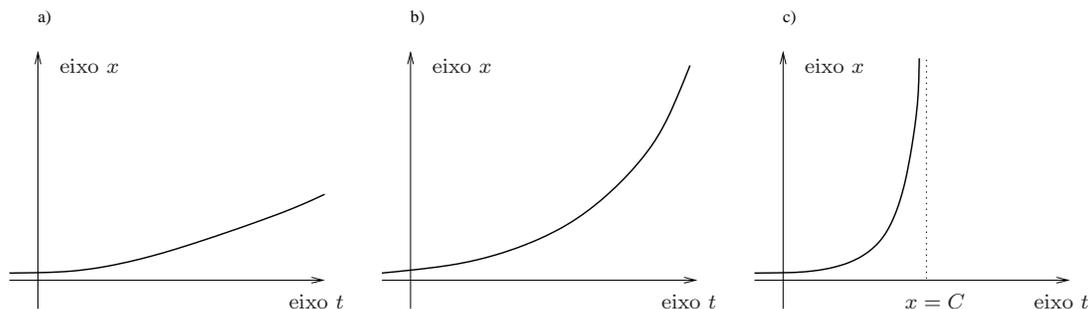


FIGURA 3.2. Solução de  $x' = x^p$  nos casos (a)  $0 < p < 1$ , explosão algébrica; (b)  $p = 1$ , explosão exponencial; e (c)  $p > 1$ , explosão em tempo finito  $t = C$ .

Em resumo, se  $0 < p < 1$ , dizemos que a solução explode algebricamente, se  $p = 1$ , a explosão é exponencial, e se  $p > 1$ , a solução explode em tempo finito (figura 3.2). Além disso, quanto maior  $p$ , mais rápida a explosão.

A mesma análise vale para uma equação  $x' = f(x)$  caso

$$ax^p \leq f(x) \leq bx^p, \text{ para } x \text{ suficientemente grande,}$$

onde  $0 < a < b < \infty$ . A idéia é que podemos comparar a solução de  $x' = f(x)$  com as soluções de  $y' = ay^p$  e  $z' = bz^p$  e mostrar (desde que elas tenham a mesma condição inicial) que  $y(t) \leq x(t) \leq z(t)$ . Assim, a potência  $p$  determina o crescimento de  $y(t)$  e  $z(t)$ , que, devido a essa desigualdade, determina o comportamento de  $x(t)$ .

Dessa forma, podemos afirmar que as soluções de

$$x' = x^5 - x^3 + \sqrt{x} + \sin(x)$$

com condição inicial suficientemente grande explodem em tempo finito, pois o termo que domina quando  $x \rightarrow \infty$  é  $x^5$ . Por outro lado, as soluções de

$$x' = x^{1/2}(2 + \sin(x))$$

com  $x(0) = x_0 > 0$  crescem algebricamente, pois  $x^{1/2} \leq x^{1/2}(2 + \sin(x)) \leq 3x^{1/2}$ , para todo  $x \geq 0$ . As soluções de  $x' = e^x$  também explodem em tempo finito, pois  $e^x$  é assintoticamente maior do que qualquer potência  $x^p$ . Equações  $x' = f(x)$  com funções racionais também podem ser facilmente analisadas. Por exemplo, as soluções positivas de

$$x' = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

explodem linearmente, pois para  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) = x^2/(1 + x^2) \rightarrow 1$ , de modo que para  $x$  grande, a solução satisfaz aproximadamente a equação  $x' = 1$ , que apresenta um crescimento linear (que é algébrico). Já as soluções positivas de

$$x' = \frac{x^4}{1 + x^2}$$

$p$	explosão
$0 < p < 1$	algébrica
$p = 1$	exponencial
$p > 1$	em tempo finito

TABELA 3.1. Tipo de explosão para as soluções de uma equação da forma  $x' \approx x^p$ , para  $x$  suficientemente grande.

apresentam explosão em tempo finito, pois  $x^4/(1+x^2) \sim x^2$  para  $x$  grande. A tabela 3.1 sintetiza esses resultados. Finalmente, um caso que não está coberto pela tabela é o da equação

$$x' = \frac{x}{1+x^2},$$

cujas soluções positivas apresentam uma explosão sub-linear. Isso se deve ao fato de que  $x/(1+x^2) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \infty$ , sendo a explosão menor do que qualquer crescimento linear.

Essa análise também vale quando a solução diverge para menos infinito. Por exemplo, as soluções negativas de  $x' = x$  explodem exponencialmente; as soluções negativas de  $x' = x^3$  explodem em tempo finito; e as soluções negativas de  $x' = -|x|^{1/2}$  explodem algebricamente. Isso pode ser estendido para outras potências, desde que a equação faça sentido. A figura 3.3 ilustra algumas situações.

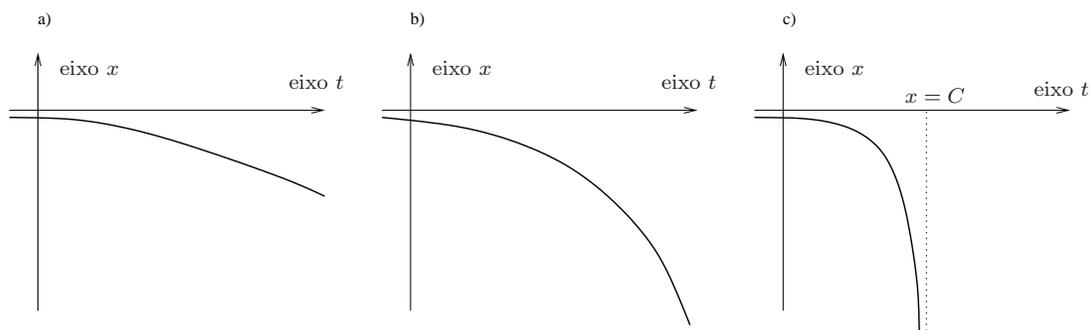


FIGURA 3.3. Solução de  $x' = -|x|^p$  nos casos (a)  $0 < p < 1$ , explosão algébrica; (b)  $p = 1$ , explosão exponencial; e (c)  $p > 1$ , explosão em tempo finito  $t = C$ .

Finalmente, essa análise de explosão também vale “no passado”, ou seja, se as soluções explodem em tempo finito, exponencialmente ou algebricamente, quando  $t$  decresce. A única diferença para que isso aconteça é o sinal. Mais precisamente, na equação

$$\frac{dx}{dt} = -x^p,$$

em  $x > 0$ , com  $p > 0$ , temos, quando  $t \rightarrow -\infty$ , crescimento algébrico, se  $0 < p < 1$ , crescimento exponencial, se  $p = 1$ , e explosão em tempo finito, se  $p > 1$  (veja figura 3.4). Idem para  $x' = f(x)$  caso

$$-ax^p \leq f(x) \leq -bx^p, \text{ para } x \text{ suficientemente grande,}$$

com  $0 < a < b < \infty$ .

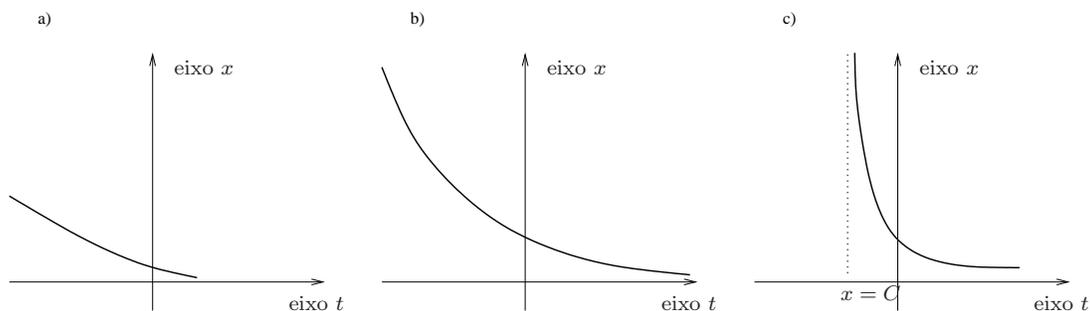


FIGURA 3.4. Comportamento quando  $t \rightarrow -\infty$  das soluções de  $x' = -x^p$  nos casos (a)  $0 < p < 1$ , explosão algébrica no passado, quando  $t \rightarrow -\infty$ ; (b)  $p = 1$ , explosão exponencial no passado, quando  $t \rightarrow -\infty$ ; e (c)  $p > 1$ , explosão em tempo finito no passado, quando  $t \searrow C$ .

**3.3. Quão rápido para o ponto fixo?** De maneira análoga, podemos analisar quão rápido as soluções convergem para um ponto fixo. Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = -x^p,$$

em  $x \geq 0$ , onde  $p > 0$ . Temos que  $x^* = 0$  é um ponto fixo. Além disso, em  $x > 0$ , temos  $-x^p < 0$ , de modo que as soluções, em  $x > 0$ , decrescem, convergindo para o ponto fixo. A rapidez dessa convergência também está associada à potência  $p$ . De fato, para  $0 < x < 1$  fixo, temos que  $x^p$  cresce à medida que  $p$  diminui, portanto a velocidade  $dx/dt = -x^p$  é mais rápida quanto menor for  $p$ .

No caso do decaimento radioativo ( $p = 1$ ), a solução é

$$x(t) = Ce^{-t}.$$

A convergência em direção ao ponto fixo é, portanto, exponencial. Note que o ponto fixo não é alcançado em tempo finito, isto é, as órbitas não se cruzam. Isto está associado ao fato de, nesse caso de  $p = 1$  (ou, mais geralmente, para  $p \geq 1$ ), a solução ser única em  $x \geq 0$ . Já no caso  $p = 2/3$ , vimos anteriormente que a convergência é muito mais rápida, pois a solução,

$$x(t) = -\frac{1}{3}(t - t_*)^3,$$

alcança o ponto fixo em tempo finito  $t_*$ . Essa situação acontece, de fato, para toda potência  $0 < p < 1$ . Verifique usando separação de variáveis!

Considere, agora, o caso  $p = 2$ . Nesse caso, usando separação de variáveis, e considerando a condição inicial  $x(1) = 1$ , temos a solução

$$x(t) = \frac{1}{t}.$$

Esta solução também converge para o ponto fixo  $x^* = 0$ , mas essa convergência é algébrica (o inverso de um polinômio de grau um, no caso), muito mais lento que o exponencial. A convergência também é algébrica para qualquer inteiro  $p > 1$ . Verifique resolvendo a equação pelo método de separação de variáveis. Mesmo no caso em que  $p > 1$  não é um inteiro, temos  $n < p < n+1$ , para algum inteiro  $n$ , e, assim, a convergência está limitada entre duas funções algébricas (mais precisamente,  $(n-1)^{-1}t^{-(n-1)} \leq x(t) \leq n^{-1}t^{-n}$ ). Por isso, dizemos também que a convergência é algébrica.

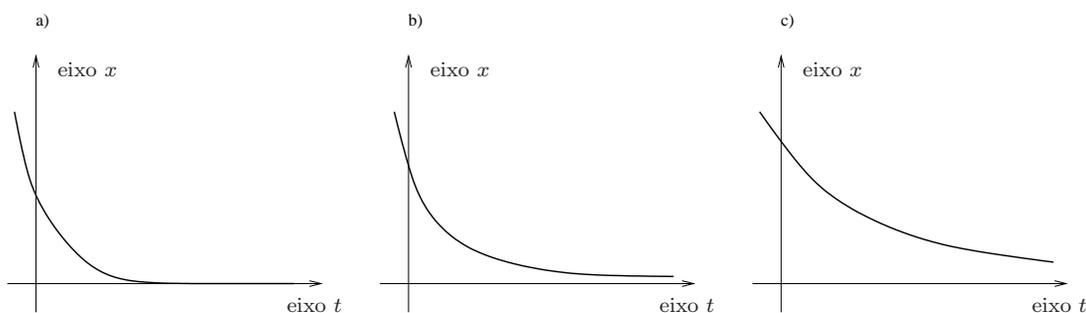


FIGURA 3.5. Solução típica de  $x' = -x^p$ , em  $x \geq 0$ , nos casos (a)  $0 < p < 1$ , convergência em tempo finito; (b)  $p = 1$ , convergência exponencial; e (c)  $p > 1$ , convergência algébrica.

De maneira geral, temos que a convergência é mais rápida quanto menor for a potência  $p$ . Além disso, a convergência pode ser em tempo finito, se  $0 < p < 1$ , exponencial, se  $p = 1$ , e algébrica, se  $p > 1$  (figura 3.5). Em relação à unicidade, temos que  $-x^p$  é diferenciável em  $x \geq 0$  se  $p \geq 1$  e não é diferenciável se  $0 < p < 1$ . Portanto, temos unicidade de soluções se  $p \geq 1$  e não-unicidade se  $0 < p < 1$ .

Essa análise pode ser estendida para  $x < 0$ , desde que a equação faça sentido e as soluções nessa região cresçam em direção ao ponto fixo. Por exemplo, podemos considerar

$$\frac{dx}{dt} = |x|^p,$$

que a convergência para o ponto fixo  $x^* = 0$  tem o mesmo comportamento em relação à potência  $p$  descrito acima. Os possíveis comportamentos estão ilustrados na figura

Esta mesma análise pode ser feita para uma equação  $x' = f(x)$  em torno de um ponto fixo qualquer  $x^*$ , a partir de uma aproximação da forma  $f(x) \approx \alpha(x - x^*)^p$ , próximo de  $x^*$ , onde o erro nessa aproximação pode envolver termos com potência maior que  $p$ . Mais precisamente, a conclusão da velocidade de decrescimento vale próximo a um ponto fixo  $x^*$  caso

$$f(x) = -(x - x^*)^p g(x),$$

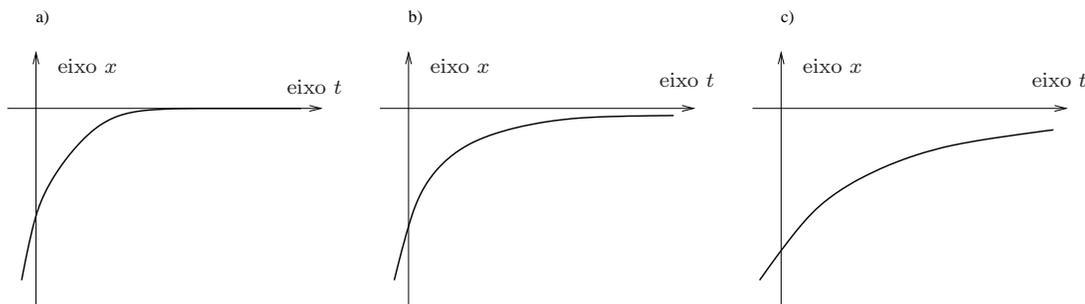


FIGURA 3.6. Solução típica de  $x' = |x|^p$ , em  $x \leq 0$ , nos casos (a)  $0 < p < 1$ , convergência em tempo finito; (b)  $p = 1$ , convergência exponencial; e (c)  $p > 1$ , convergência algébrica.

$p$	convergência	unicidade
$0 < p < 1$	em tempo finito	não
$p = 1$	exponencial	sim
$p > 1$	algébrica	sim

TABELA 3.2. Tipo de convergência e unicidade para as soluções em  $x \geq x^*$  de uma equação da forma  $x' = -(x - x^*)g(x)$ , onde  $x^* \in \mathbb{R}$  e  $g(x)$  é uma função continuamente diferenciável com  $g(x^*) > 0$ .

para  $x \geq x^*$ , onde  $g(x)$  é uma função continuamente diferenciável em  $x^*$ , com  $g(x^*) > 0$ . O exercício 3.13 dá um esboço da demonstração desse resultado. A tabela 3.2 sintetiza esses resultados. Como antes, essa análise pode ser devidamente adaptada para  $x \leq x^*$ .

**3.4. Reconstrução das soluções a partir da linha de fase.** Vimos, acima, o processo de construção da linha de fase a partir da equação ou a partir das soluções. Um processo inverso importante é o de reconstruir o gráfico das soluções a partir da linha de fase. Basta, para isso, observarmos os pontos fixos, que geram as soluções estacionárias, e, em seguida, as setas indicativas do sentido das outras órbitas, indicando se as soluções correspondentes a cada órbitas são crescentes ou decrescentes.

Uma informação que perdemos nesse processo é a das regiões de concavidade. Outra informação é sobre a unicidade. Perdemos, ainda, as informações sobre a velocidade de crescimento para o infinito (se algébrico, exponencial ou com explosão em tempo finito) e de aproximação dos pontos fixos (se algébrica, exponencial ou em tempo finito). Caso nada seja explicitado em contrário, assumiremos sempre que há unicidade, eliminando, pelo menos, a possibilidade de aproximação dos pontos fixos em tempo finito e um possível “escape” das soluções a partir de pontos fixos.

No exemplo da figura 3.7(a), vemos quatro pontos fixos, o primeiro (da esquerda para a direita), atrator, o segundo, repulsor, o terceiro, conector e o quarto, atrator. Um conjunto

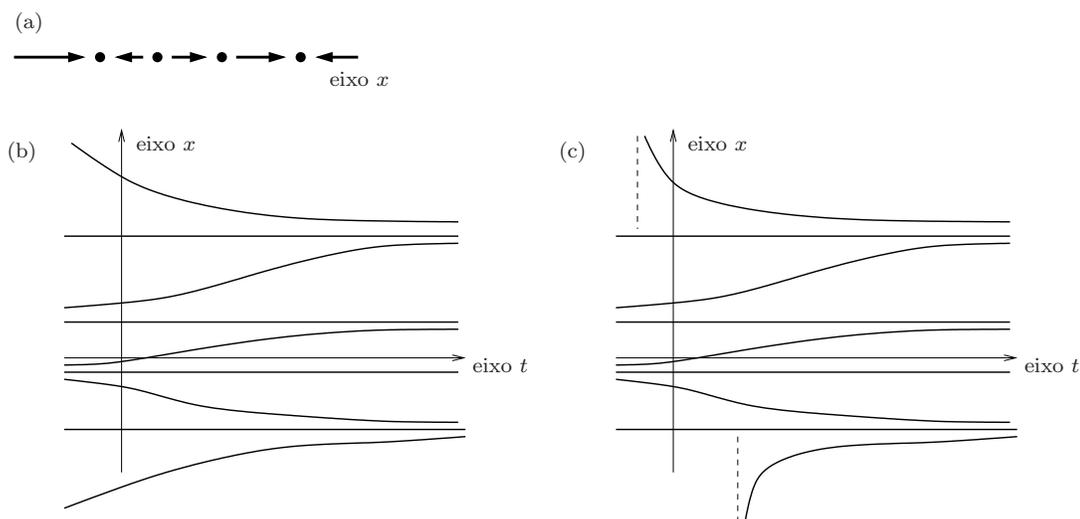


FIGURA 3.7. (a) Linha de fase e (b) reconstrução de um conjunto de soluções compatíveis com a linha de fase.

de soluções compatíveis com essa linha de fase aparece na figura 3.7(b). Assumimos, nesse caso, unicidade, mas não podemos afirmar se há explosão em tempo finito no passado para as soluções ilimitadas (acima e abaixo de todos os pontos fixos). A figura 3.7(c) mostra um outro conjunto de soluções, com explosão em tempo finito, também compatível com a linha de fase.

**3.5. Reações químicas.** Em fenômenos envolvendo reações químicas e bioquímicas, uma lei fundamental é a *lei de ação das massas*. Esta lei descreve a razão de variação da concentração das substâncias envolvidas na reação. Tomemos como exemplo duas substâncias químicas  $X$  e  $Y$  que se combinam para formar uma nova substância  $Z$ . A notação clássica é



Um exemplo simples de reação dessa forma é a formação de cloreto de sódio por  $\text{Na}^+ + \text{Cl}^- \rightarrow \text{NaCl}$ . Nessa reação, um átomo de sódio cede um elétron para um átomo de cloro, formando um íon eletro-positivo de sódio e um íon eletro-negativo de cloro, levando a uma atração elétrica entre os dois íons e à formação de uma ligação química no composto NaCl chamada de ligação iônica. Um outro exemplo é  $\text{H}^+ + \text{OH}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O}$ . Esta é uma ligação covalente, onde elétrons de um ou mais átomos são compartilhados com os outros átomos. No caso, o elétron de cada hidrogênio é compartilhado com o outro átomo de hidrogênio e com o átomo de oxigênio. Esta ligação é mais forte que a iônica.

Voltando à reação  $X + Y \rightarrow Z$ , para que cada molécula da substância  $Z$  seja criada, duas moléculas de  $X$  e  $Y$  devem colidir com energia suficiente. Se  $x$  e  $y$  denotam a concentração dessas substâncias em um determinado volume (concentração = quantidade de moléculas por unidade de volume, tipicamente molaridade por litro, sendo  $1 \text{ mol} = 6,02 \times 10^{23}$  moléculas), a probabilidade de uma colisão é proporcional ao produto  $xy$ . É razoável assumir que a

probabilidade de uma colisão ser suficientemente energética é uma fração da probabilidade total de colisões e, portanto, é também proporcional ao produto  $xy$ . Assim, a taxa de variação da concentração  $z$  da substância  $Z$  é proporcional ao produto  $xy$ . Logo, existe uma constante de proporcionalidade  $\kappa$ , chamada de *constante de reação*, tal que

$$\frac{dz}{dt} = \kappa xy.$$

Se quisermos explicitar a constante de reação  $\kappa$ , escrevemos



Esta constante de reação depende da estrutura das moléculas e da temperatura da mistura.

Observe que nesse processo, as concentrações de  $X$  e  $Y$  também diminuem. Isso pode ser analogamente quantificado pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = -\kappa xy, \quad \frac{dy}{dt} = -\kappa xy.$$

Assim, temos um sistema de equações diferenciais ordinárias, com as três variáveis dependentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  e a variável independente  $t$ . Esse sistema pode ser simplificado considerando-se uma certa conservação de massa, já que as substâncias se transformam umas nas outras. De fato, é natural esperarmos que a soma  $x + z$  das concentrações de  $X$  e  $Z$  seja constante durante uma reação visto que a cada colisão suficientemente energética uma molécula de  $X$  desaparece enquanto que uma de  $Z$  aparece. Da mesma forma, a soma  $y + z$  também deve ser constante. Esses fatos podem ser observados diretamente das equações acima, verificando que

$$\frac{d}{dt}(x + z) = 0 = \frac{d}{dt}(y + z).$$

Em outras palavras,  $x + z$  e  $y + z$  são constantes durante a reação.

Digamos, agora, que  $x + z = a$  e  $y + z = b$ , para constantes  $a$  e  $b$ . Conhecendo as concentrações iniciais de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , podemos achar  $a$  e  $b$  e escrever uma equação diferencial para a concentração  $z$ :

$$\frac{dz}{dt} = \kappa(a - z)(b - z).$$

A lei de ação de massas também se aplica a reações envolvendo mais de duas substâncias, ou números diferentes de moléculas de cada substância. Por exemplo, no caso de uma reação da forma  $X + 2Y + 3Z \rightarrow W$ , a reação acontece após uma colisão sextupla, suficientemente energética, entre uma molécula de  $X$ , duas de  $Y$  e três de  $Z$ , de forma que

$$\frac{dw}{dt} = \kappa xy^2 z^3.$$

Como antes, temos, também, equações para as derivadas de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , dando um sistema de quatro equações:

$$\begin{cases} x' = -\kappa xy^2 z^3, \\ y' = -2\kappa xy^2 z^3, \\ z' = -3\kappa xy^2 z^3, \\ w' = \kappa xy^2 z^3. \end{cases}$$

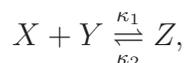
Observe as constantes multiplicativas nas equações para  $y'$  e  $z'$ , indicando a quantidade de moléculas de  $Y$  e  $Z$  que são absorvidas em cada colisão. Observe, ainda, que as quantidades  $x + w$ ,  $y + 2w$  e  $z + 3w$  são conservadas. Como antes, essa informação pode ser usada para reduzir o sistema a apenas uma equação.

Um exemplo de reação com mais de uma molécula de cada elemento é a decomposição de peróxido de hidrogênio (água oxigenada) em água e oxigênio, dada por  $2\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$ . Esta é uma reação lenta, caracterizada por uma constante de reação relativamente pequena. Essa reação pode ser acelerada em mil vezes com a adição do catalizador  $\text{FeCl}_3$ , como acontece, por exemplo, com água oxigenada em um fermento, com o borbulhamento de  $\text{O}_2$ . A reação ainda pode ser acelerada até um bilhão de vezes com a enzima catalase, presente em muitas células.

Uma outra reação importante envolve o ozônio da atmosfera, que pode reagir com um íon de cloro na reação  $\text{Cl} + \text{O}_3 \rightarrow \text{OCl} + \text{O}_2$ . Os átomos de  $\text{OCl}$  tendem a se juntar entre si, formando um dímero  $(\text{OCl})_2$ , que, por sua vez, se quebra sob a ação da radiação solar, de acordo com  $(\text{OCl})_2 \rightarrow \text{O}_2 + 2\text{Cl}$ . Isso forma uma reação em cadeia, prejudicial à camada de ozônio. Mas essa é apenas uma dentre muitas reações que envolvem a evolução da camada de ozônio, que é um fenômeno bastante complexo.

O fenômeno de decaimento radioativo também pode ser posto no contexto de reações químicas. O decaimento do carbono-14, por exemplo, é dado pela reação  $\text{C}_6^{14} \rightarrow \text{N}_7^{14} + e$ . Utilizando a lei de ação das massas, obtemos a equação  $x' = -\lambda x$  para o decaimento da massa de carbono-14, para uma constante de reação  $\lambda > 0$  apropriada.

Na prática, no entanto, a grande maioria das reações acontece nas duas direções, com uma molécula de  $Z$  podendo se quebrar em duas moléculas de  $X$  e  $Y$ , mas com uma constante de reação que pode ser muito menor. De qualquer maneira, temos tipicamente uma reação que pode escrita na forma



com constantes de reação  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ . Assim, as equações para as respectivas concentrações são

$$\begin{cases} z' = \kappa_1 xy - \kappa_2 z, \\ x' = \kappa_2 z - \kappa_1 xy, \\ y' = \kappa_2 z - \kappa_1 xy. \end{cases}$$

A solução de equilíbrio satisfaz

$$\kappa_1 xy - \kappa_2 z = 0.$$

Novamente, se não houver mais nenhuma reação envolvendo essas substâncias, temos  $x + z = a$  e  $y + z = b$  constantes, logo,

$$z' = \kappa_1(a - z)(b - z) - \kappa_2z.$$

com a solução de equilíbrio dada por uma das raízes de

$$\kappa_1(a - z)(b - z) - \kappa_2z = 0,$$

que são

$$z_{\pm} = \frac{1}{2} \left( a + b + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \pm \sqrt{\left( a + b + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^2 - 4ab} \right).$$

A linha de fase da equação em  $z$ , com  $a$  e  $b$  fixos, tem a forma mostrada na figura 3.8(a). No entanto, como  $x, y, z \geq 0$ , devemos ter  $a, b > 0$  e  $0 \leq z \leq \min\{a, b\}$ . Além



FIGURA 3.8. Linha de fase da equação  $z' = \kappa_1(a - z)(b - z)$  nos casos (a) reta toda, (b) intervalo  $0 \leq z \leq \min\{a, b\}$ .

disso, comparando a parábola  $\kappa_1(a - z)(b - z)$  com a parábola  $\kappa_1(a - z)(b - z) - \kappa_2z$  em  $z \geq 0$ , podemos deduzir que  $0 < z_- < \min\{a, b\} \leq \max\{a, b\} < z_+$ . Portanto, no intervalo  $0 \leq z \leq \min\{a, b\}$ , temos a linha de fase mostrada na figura 3.8(b) e podemos deduzir que para qualquer condição inicial  $z_0$  com  $0 \leq z_0 \leq \min\{a, b\}$ , a solução  $z(t)$  com  $z(0) = z_0$  satisfaz  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z_-$ , ou seja, a concentração da substância  $Z$  converge para  $z_-$ . Os parâmetros  $a$  e  $b$  estão, na verdade, relacionados com as concentrações iniciais  $x_0, y_0$  e  $z_0$  das substâncias  $X, Y$  e  $Z$ , através de  $a = x_0 + z_0$  e  $b = y_0 + z_0$ . Assim, dadas as concentrações iniciais das três substâncias, podemos encontrar as concentrações limites delas.

Há várias unidades de medida para indicar a concentração de uma substância em uma mistura. Uma unidade típica é a de porcentagem de volume. Por exemplo, 100ml de cerveja com álcool a 4,7% vol. tem aproximadamente 4,7ml de álcool diluídos em 95,3ml de água (o que não é totalmente verdade, pois há várias outras substâncias diluídas na cerveja, como gás carbônico, mencionado abaixo). Também é costume se usar porcentagem de massa, indicando a proporção da massa de uma substância em relação à massa total da mistura. Por exemplo, cervejas apresentam uma concentração de gás carbônico variando entre 0,4 e 0,78% de massa, o que também pode ser expresso em porcentagem de volume, que nesse caso varia entre 2.2 e 4% vol. Para pequenas concentrações, uma unidade típica é a ppm, ou partes por milhão. Ela descreve a quantidade de massa de uma substância em relação a quantidade total de uma mistura de substâncias. Quantidades ainda menores podem ser medidas em ppb, ou partes por bilhão. Casos típicos são os de concentração de íons diluídos em água. Por exemplo, a quantidade de cálcio em fontes de água mineral no Brasil varia de menos de 1 até quase 100ppm, enquanto que a quantidade de ferro é da ordem de algumas ppb. Para substâncias diluídas em pequenas quantidades em um líquido, uma outra medida

típica é  $\text{mg}/1$ , ou miligramas por litro. Como um litro de água doce pesa aproximadamente um quilograma (a densidade da água pura varia com a temperatura, sendo, por exemplo,  $1\text{g}/\text{cm}^3$  a  $5^\circ\text{C}$  e  $0,9584\text{g}/\text{cm}^3$  a  $100^\circ\text{C}$ ), é comum, em certas situações, substituir  $\text{ppm}$  por  $\text{mg}/1$ , tomando  $1\text{ppm}=1\text{mg}/1$ .

### Exercícios

**3.1.** Refaça o exercício 2.3, indicando se as soluções ilimitadas explodem em tempo finito (no passado ou no futuro) ou não.

**3.2.** Considere a equação  $x' = 3x^2 - x^3$ .

(a) Trace a linha de fase da equação.

(b) No plano  $tx$ , faça um esboço das soluções  $x(t)$ , indicando, inclusive, as concavidades, os pontos de inflexão e se as soluções explodem em tempo finito.

(c) Sabendo que uma certa solução  $x(t)$  não-estacionária é tal que o limite

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0,$$

determine o limite

$$\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t).$$

**3.3.** Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = x^2(x - 6)(3x - 10).$$

(a) Trace a linha de fase da equação.

(b) No plano  $tx$ , faça um esboço das soluções  $x = x(t)$ , indicando, inclusive, as concavidades, as inflexões e se as soluções explodem em tempo finito ou não.

(c) Sabendo que  $x = x(t)$  é uma solução não-estacionária cujos limites  $\ell_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$  e  $\ell_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  existem, determine  $\ell_+$ .

**3.4.** Em um modelo de propagação de doenças, temos uma fração  $x(t)$  ( $0 \leq x(t) \leq 1$ ) de indivíduos infectados e o restante, não infectado,  $y(t) = 1 - x(t)$ . A evolução da fração infectada é dada pela equação diferencial

$$x' = \alpha yx - \beta x,$$

onde  $\alpha > 0$  é um coeficiente de transmissão da doença e  $\beta > 0$  é um coeficiente de recuperação. Determine os possíveis diagramas de fase de acordo com diferentes combinações dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ .

**3.5.** Em uma reação química  $Y + 2Z \xrightarrow{\kappa} X$ , uma substância  $X$  é formada a partir de duas substâncias  $A$  e  $B$ , onde uma molécula de  $A$  e duas de  $B$  se combinam para formar uma de  $X$ . Nesse caso, a concentração  $x$  da substância  $X$  satisfaz a equação

$$x' = \kappa yz^2,$$

onde  $y$  e  $z$  são as concentrações de  $Y$  e  $Z$ , respectivamente. Usando que  $x + y = a$  e  $2x + z = b$  são constantes ao longo da reação, reescreva a equação na forma

$$x' = \kappa(a - x)(b - 2x)^2,$$

e esboce os possíveis diagramas de fase dessa equação, dependendo dos parâmetros  $a, b > 0$ . Assumindo que a concentração inicial de  $X$  seja  $x = 0$ , qual a quantidade superior limite da substância  $X$  que pode ser produzida? Quais as concentrações restantes limites de  $Y$  e  $Z$  nessa reação?

- 3.6.** Em uma certa reação auto-catalítica, uma molécula de uma substância  $X$  se combina com uma de outra substância  $A$  para formar duas moléculas da substância  $X$ . Notação:  $X + A \xrightleftharpoons[\kappa_2]{\kappa_1} 2X$ . Ache a equação diferencial para a taxa de variação da concentração  $x$  da substância  $X$ . Assumindo que a concentração  $a$  de  $A$  é mantida constante e que a concentração inicial de  $X$  é positiva, mostre que essa concentração  $x$  se aproxima de  $x_* = \kappa_1 a / \kappa_2$ .

- 3.7.** Considere uma reação química reversível  $X \xrightleftharpoons[\kappa_2]{\kappa_1} Y$  e a sua versão com um catalisador  $X + Z \xrightleftharpoons[\kappa_4]{\kappa_3} Y + Z$ . Assumindo que o catalisador apenas acelera a reação mas não altera a solução de equilíbrio, obtenha uma relação entre as constantes de reação  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ .

- 3.8.** Uma substância tóxica está sendo liberada no meio-ambiente por uma indústria a uma razão  $a = 54 \text{ppm/s}$  (partes por milhão por segundo). A indústria analisa duas estações de tratamento que usam processos químicos diferentes. A primeira combina cada molécula da substância com um dado reagente de tal forma que a concentração  $x(t)$  da substância varia com o tempo  $t$  de acordo com a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = a - \beta x,$$

onde  $\beta = 27 \text{s}^{-1}$ . A segunda combina um outro reagente com cada três moléculas da substância de tal forma que

$$\frac{dx}{dt} = a - \gamma x^3,$$

com  $\gamma = 2 \text{ppm}^{-2} \text{s}^{-1}$ . Qual das duas estações é a mais potente no sentido de reduzir mais a concentração final da substância?

- 3.9.** Um filtro industrial é acionado e passa a receber 2 litros de água por segundo para filtragem. O recipiente do filtro tem um formato cilíndrico com comprimento  $l = 30 \text{cm}$  e seção transversal triangular de tal forma que o volume  $V$  (em litros =  $\text{dm}^3$ ,  $\text{dm} = 10 \text{cm}$ ) de água no recipiente está relacionado com a altura  $h$  (em  $\text{cm}$ ) do nível da água por  $V = lh^2/3$ . Usando a lei de Bernoulli da mecânica dos fluidos, é possível deduzir que a filtragem ocorre aproximadamente a uma razão proporcional a  $\sqrt{h}$ , de tal forma que o volume  $V$  satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dV}{dt} = 2 - V^{1/4}.$$

- (i) Determine se para essa equação vale a unicidade das soluções em relação às condições iniciais no semi-eixo  $V > 0$ .  
 (ii) Trace a linha de fase dessa equação no semi-eixo  $V > 0$ .

(iii) Qual a altura mínima que o recipiente deve ter para a água não transbordar?

- 3.10.** Considere um corpo de massa  $m$  em queda livre cuja altura  $h$  satisfaz a equação diferencial com resistência do ar dependendo quadraticamente da velocidade:

$$m \frac{d^2h}{dt^2} = -mg - \beta \left| \frac{dh}{dt} \right| \frac{dh}{dt},$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\beta > 0$ , um coeficiente de resistência. i) Escreva uma equação diferencial de primeira ordem para a velocidade vertical  $v(t) = dh/dt$ . ii) Esboce o diagrama de fase dessa equação para  $v$ . iii) Qual a velocidade limite de queda do corpo?

- 3.11.** Repita o exercício anterior para

$$m \frac{d^2h}{dt^2} = -mg - \alpha \frac{dh}{dt} - \beta \left| \frac{dh}{dt} \right| \frac{dh}{dt},$$

com  $\alpha > 0$ .

- 3.12.** Em um modelo de dieta [8], o peso  $W(t)$  de um indivíduo varia com o tempo de acordo com a equação

$$\frac{dW}{dt} = F(t) - E(t) - M(W),$$

onde  $F = F(t)$  representa a taxa de ingestão de calorias,  $E = E(t)$ , a taxa de queima de calorias para manter as suas funções fisiológicas (incluindo exercícios físicos), e  $M = M(W)$ , uma função dependente do metabolismo do corpo. Dados experimentais são consistentes com  $M(W) = \beta W^\alpha$ , com  $\alpha \approx 0.7$ . Por simplicidade, vamos assumir  $M(W) = \beta W^{3/4}$ , com  $\beta > 0$ .

- (i) Assuma taxas constantes de ingestão e queima de calorias, com  $\lambda = F - E > 0$  (esta hipótese é razoável se consideramos a unidade de tempo como sendo de um dia e o comportamento social do indivíduo como sendo regular). Assim, temos a equação

$$W' = \lambda - \beta W^{3/4}.$$

Podemos garantir a unicidade das soluções na região  $W > 0$ ? Qual o diagrama de fase nessa região? Podemos garantir a unicidade da solução estacionária associada ao ponto fixo?

- (ii) Assuma uma taxa inicial constante  $\lambda_i = F - E$  de ingestão-queima de caloria tal que um peso constante  $W_i$  possa ser mantido. Qual a relação entre  $W_i$  e  $\lambda_i$ ? Suponha que um aumento ou uma redução de peso para um peso ideal  $W_f$  seja desejável. Qual deve ser a nova taxa  $\lambda_f$  de ingestão-queima de caloria para que esse peso seja alcançado?

Com a idade, é razoável assumirmos que  $\beta$  aumenta ou diminui?

- 3.13.** \*Sobre a velocidade de decrescimento para um ponto fixo, considere a equação  $x' = f(x)$ , com  $f(x) = -(x - x^*)^p g(x)$ , onde  $p > 0$ ,  $x^* \in \mathbb{R}$  e  $g(x)$  é continuamente diferenciável em  $x^* \in \mathbb{R}$  e tal que  $g(x^*) > 0$ . Por continuidade, existem  $a, b$  reais tais  $0 < a \leq g(x) \leq b < \infty$ , para  $x$  próximo de  $x^*$ . Considere, também, as equações

$y' = -a(y - x^*)^p$  e  $z' = -b(z - x^*)^p$ . Observe que  $x^*$  é um ponto fixo das três equações. Considere, agora,  $x_0$  próximo e estritamente maior que  $x^*$  e as soluções  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  das equações correspondentes com a mesma condição inicial  $x(0) = y(0) = z(0) = x_0$ . Mostre que  $z(t) \leq x(t) \leq y(t)$ , para  $t \geq 0$ , e deduza que a velocidade de decrescimento de  $x(t)$  é da mesma ordem que as de  $z(t)$  e  $y(t)$  e, portanto, o decrescimento é em tempo finito, se  $0 < p < 1$ , exponencial, se  $p = 1$ , e algébrico, se  $p > 1$ .

#### 4. Equivalência qualitativa e bifurcações unidimensionais

Em vários modelos, encontramos uma série de parâmetros importantes, tais como massa de um objeto, coeficiente de atrito, taxa de crescimento populacional, constante de reação, etc. Mudanças nesses parâmetros podem, ou não, afetar o comportamento qualitativo da equação. Dessa forma, é interessante estudar o comportamento qualitativo de toda uma família de equações, parametrizada por um ou mais parâmetros.

Em primeiro lugar, modelos envolvem aproximações e é importante sabermos se uma pequena aproximação pode resultar em um comportamento diferente do que o do esperado para o fenômeno modelado. Em segundo lugar, a partir de um parâmetro em que o comportamento seja simples, podemos estudar a variação da dinâmica em relação ao parâmetro, buscando um entendimento melhor da dinâmica no caso mais complicado. Este último argumento é bastante importante em sistemas de equações, onde a dinâmica pode ser muito mais complicada do que as de equações de primeira ordem vistas até agora. À medida em que o parâmetro é modificado, a dinâmica vai se tornando mais complicada, mas de uma maneira gradual, permitindo um melhor entendimento do fenômeno.

**4.1. Equivalência qualitativa.** Há várias maneiras de comparar duas equações. É claro que uma ínfima mudança no coeficiente de atrito de um modelo mecânico vai alterar o conjunto de soluções, mas essa mudança pode não ser drástica. Ela pode, por exemplo, alterar a velocidade de decrescimento para a posição de equilíbrio, mas não o fato do sistema convergir para essa situação de equilíbrio. No caso do resfriamento de um corpo segundo a lei de resfriamento de Newton,  $T' = -\kappa(T - T_r)$ , uma alteração na temperatura  $T_r$  do meio não altera o fato de que a temperatura  $T$  do corpo decresce exponencialmente para uma temperatura de equilíbrio; apenas o valor (um dado quantitativo) dessa temperatura limite é que foi alterado. Por esse motivos, é interessante termos uma maneira mais refinada de comparação, analisando certas características qualitativas das soluções.

Uma maneira de preservar certas propriedades qualitativas é a seguinte: duas equações são ditas *qualitativamente equivalentes* quando houver uma bijeção contínua entre os seus diagramas de fase, levando órbitas em órbitas e preservando o sentido delas. Por exemplo, das linhas de fase da figura 4.1, a) e b) são equivalentes entre si, mas não são equivalentes a c) porque uma das órbitas está em sentido contrário. Os três primeiros têm três pontos fixos cada, portanto, não podem ser equivalentes a nenhum dos três últimos, que têm dois pontos fixos. Finalmente, e) e f) são equivalentes entre si, mas não são equivalentes a d) porque as órbitas estão em sentido contrário.

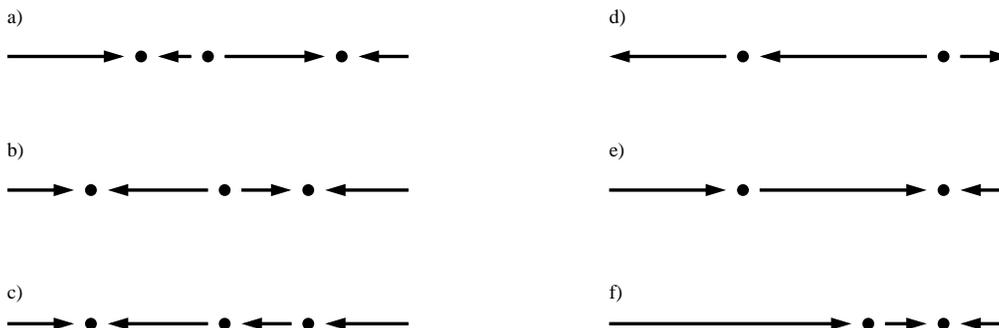


FIGURA 4.1. Equivalência qualitativa de linhas de fase: (a) e (b) são equivalentes entre si, assim como (e) e (f).

**4.2. Dinâmica populacional logística com colheita constante.** Vamos considerar uma dinâmica populacional dada pelo modelo logístico, mas com um termo extra representando uma colheita constante:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - \gamma x^2 - h.$$

O parâmetro  $h$  representa o termo de colheita, mais precisamente, a taxa de colheita em relação ao tempo. É de se esperar que a dinâmica da população varie consideravelmente dependendo do parâmetro ser grande ou pequeno, representando, possivelmente, uma colheita predatória, dizimando a população, ou uma colheita sustentável, preservando uma população em quantidade razoável. Considerando  $\lambda, \gamma > 0$  fixos, vamos analisar apenas a variação em  $h > 0$ .

Os pontos fixos são as raízes de

$$\lambda x - \gamma x^2 - h = 0,$$

ou seja

$$x_{\pm} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4h\gamma}}{2\gamma}.$$

Assim, temos comportamentos diferentes, dependendo do sinal de  $\lambda^2 - 4h\gamma$ .

Se  $h > \lambda^2/4\gamma$ , temos  $\lambda x - \gamma x^2 - h < 0$  para todo  $x$ , de modo que  $x(t)$  é decrescente, até a população ser exterminada em tempo finito.

Se  $h = \lambda^2/4\gamma$ , temos que  $x_* = \lambda/2\gamma$  é um ponto fixo; se a população inicial  $x(0)$  for maior que  $x_*$ , então  $x(t)$  decresce, se aproximando da população limite  $x_*$ ; e se a população inicial  $x(0)$  for menor que  $x_*$ , então  $x(t)$  decresce, até a população ser exterminada em tempo finito.

Finalmente, se  $0 < h < \lambda^2/4\gamma$ , temos dois pontos fixos  $x_{\pm} > 0$ ; caso a população inicial seja  $x(0) > x_+$ , então a população se aproximará de  $x_+$ ; e caso a população inicial seja  $x(0) < x_-$ , a população  $x(t)$  decresce, até ser exterminada em tempo finito.

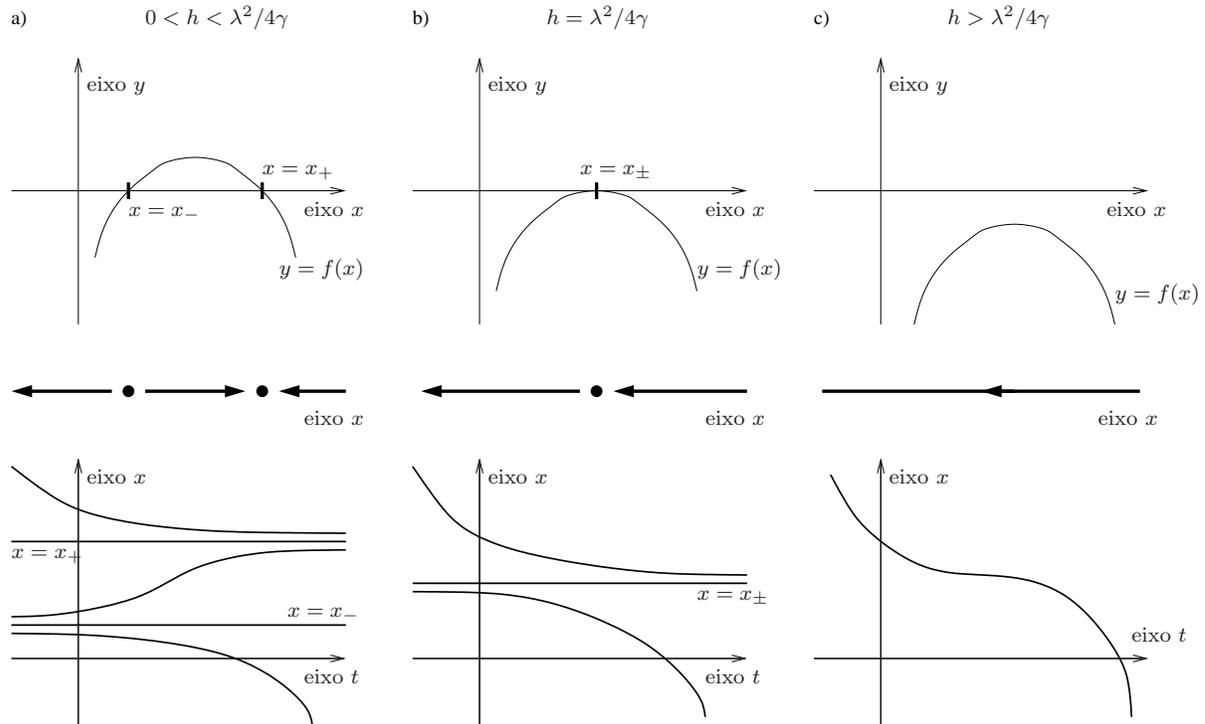


FIGURA 4.2. Estudo de  $x' = f(x) = \lambda x - \gamma x^2 - h$  nos casos (a)  $h > \lambda^2/4\gamma$ , colheita sustentável; (b)  $h = \lambda^2/4\gamma$ , ponto de bifurcação; e (c)  $0 < h < \lambda^2/4\gamma$ , colheita predatória. Em cada caso, temos, de cima para baixo, o gráfico da função  $y = f(x)$  correspondente, a linha de fase, e as soluções típicas correspondendo a cada órbita.

A figura 4.2 mostra essas três situações. Em cada caso, temos três gráficos, ilustrando o gráfico da função  $y = f(x) = \lambda x - \gamma x^2 - h$ , a linha de fase correspondente e as soluções típicas de cada órbita da linha de fase.

Equações correspondentes a parâmetros de colheita entre 0 e  $\lambda^2/4\gamma$  são qualitativamente equivalentes. Idem se os parâmetros forem maiores que  $\lambda^2/4\gamma$ .

**4.3. Bifurcações.** No exemplo acima, o valor  $h_* = \lambda^2/4\gamma$  é dito um ponto de bifurcação. Para dois parâmetros  $h_1, h_2 > h_*$ , ou  $h_1, h_2 < h_*$ , as equações correspondentes são qualitativamente equivalentes. Porém, para  $h_1 < h_* < h_2$ , as dinâmicas em  $h_1$  e  $h_2$  não são qualitativamente equivalentes. Mais geralmente, um ponto  $h^*$  de um parâmetro  $h$  é dito um *ponto de bifurcação* se para todo intervalo  $]h_-, h_+[$ , com  $h_- < h^* < h_+$ , é possível achar  $h_1, h_2$  nesse intervalo tais que as dinâmicas correspondentes aos dois parâmetros não são qualitativamente equivalentes.

Uma representação instrutiva e que facilita o estudo de como a linha de fase varia com o parâmetro é a de um *diagrama de bifurcações*. Nesse diagrama, consideramos um plano onde o eixo horizontal representa o parâmetro e o eixo vertical, a linha de fase. Nesse plano,

podemos traçar o conjunto dos pontos fixos – os pontos fixos dependem do parâmetro, portanto formam, tipicamente, uma curva nesse plano –, tornando mais clara a variação da dinâmica em relação ao parâmetro.

No caso da dinâmica logística com colheita constante:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - \gamma x^2 - h,$$

temos que o comportamento das órbitas é determinado pela função

$$f(x, h) = \lambda x - \gamma x^2 - h.$$

Usualmente, consideramos  $h$  constante e trabalhamos com uma função  $f = f(x)$ , dependente apenas de  $x$ . Mas na verdade, é claro que essa função depende de  $h$ , o que pode ser explicitado escrevendo-se  $f = f(x, h)$ . Isso se torna relevante a partir do momento que passamos a considerar a influência do parâmetro  $h$  nessa família de equações dependendo de  $h$ .

Agora, podemos traçar o conjunto dos pontos fixos da equação, no plano  $hx$ , que é a curva dada por  $f(x, h) = 0$ , isto é

$$\lambda x - \gamma x^2 - h = 0.$$

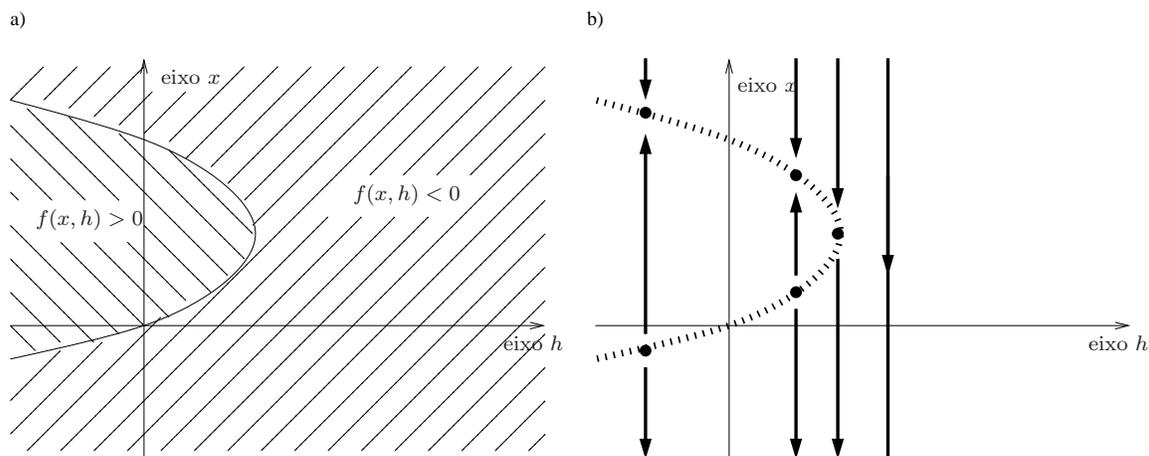


FIGURA 4.3. Estudo de  $x' = f(x, h) = \lambda x - \gamma x^2 - h$ : (a) regiões onde  $f(x, h) > 0$  e  $f(x, h) < 0$  e a parábola onde  $f(x, h) = 0$ ; e (b) diagrama de bifurcações, com linhas de fase típicas, para diferentes valores do parâmetro  $h$ , incluindo  $h$  negativo, apesar do modelo ter sido considerado apenas para  $h$  positivo.

Esta curva é uma parábola,  $h = -\gamma x^2 + \lambda x$ . Como estamos considerando o plano  $hx$ , ao invés do plano  $xh$ , temos, na verdade, uma parábola “deitada”, conforme ilustrado na figura 4.3. Essa curva delimita duas regiões no plano  $hx$ , uma onde  $f(x, h) > 0$  e outra onde  $f(x, h) < 0$ . Como  $x' = f(x, h)$ , temos que na região onde  $f(x, h) > 0$ , as soluções são crescentes, enquanto que na região onde  $f(x, h) < 0$ , as soluções são decrescentes. Observe,

ainda, que estamos analisando uma família de equações dependendo do parâmetro  $h$ , com cada equação correspondendo a um valor fixo de  $h$ . Portanto, as soluções estão restritas às retas verticais, correspondentes a valores fixos de  $h$ , com as órbitas crescendo ou decrescendo paralelamente ao eixo  $x$  (a menos dos pontos fixos, que estão... fixos).

Na modelagem, estamos considerando apenas  $h$  positivo, representando a colheita, mas em termos matemáticos, a equação está definida para  $h$  negativo. O diagrama de bifurcações esboçado na figura 4.3 contempla  $h$  negativo.

Observe, finalmente, que o diagrama de bifurcações facilita a análise dos três tipos diferentes de linhas de fase.

**4.4. Alguns tipos de bifurcações.** Vamos ver, a seguir, exemplos de alguns tipos de bifurcação.

**Bifurcação do tipo sela-nó.** Este é o tipo de bifurcação da dinâmica logística com parâmetro de colheita constante. Em uma forma mais canônica, podemos considerar a equação

$$x' = \lambda - x^2,$$

os pontos fixos são  $x_{\pm} = \sqrt{\lambda}$ , que existem para  $\lambda \geq 0$ , sendo coincidentes quando  $\lambda = 0$ . Vamos estudar o diagrama de bifurcações em relação ao parâmetro  $\lambda$  (figura 4.4). Traçando a parábola  $\lambda = x^2$  no plano  $\lambda x$  (uma parábola “deitada”), temos o diagrama de bifurcações dessa equação. O ponto  $\lambda = 0$  é um ponto de bifurcação. Para  $\lambda < 0$ , a dinâmica é tal que todas as soluções decrescem ilimitadamente. Para  $\lambda = 0$ , temos um ponto fixo conector. Para  $\lambda > 0$ , temos dois pontos fixos, um atrator e outro repulsor.

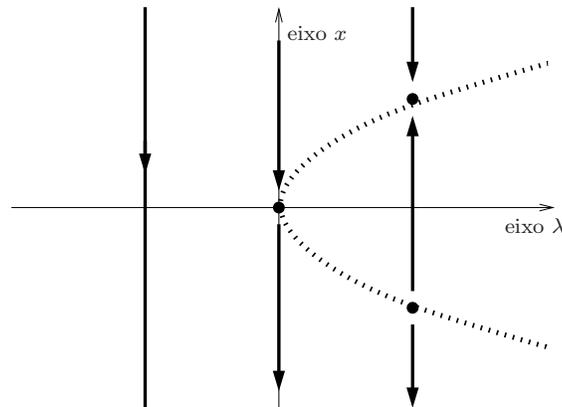


FIGURA 4.4. Estudo da bifurcação do tipo sela-nó, na forma canônica  $x' = \lambda - x^2$ .

O que caracteriza a bifurcação sela-nó é o fato de que no ponto de bifurcação  $\lambda^*$ , temos um ponto fixo conector, que, para um lado do parâmetro, se quebra em dois pontos fixos, um atrator e um repulsor, e, para o outro lado, o ponto fixo desaparece. No caso acima,  $\lambda^* = 0$ , mas isso não é relevante. As direções das órbitas também não são relevantes, exceto pelo

fato de que o ponto fixo conector se quebra em dois, um atrator e um repulsor. Compare as figuras 4.4 e 4.3 para se convencer que a bifurcação na dinâmica logística com colheita constante é do tipo sela-nó.

**Bifurcação *transcrítica*.** Considere a equação

$$x' = \lambda x - x^2.$$

Os pontos fixos no diagrama de bifurcação são dados pela equação  $\lambda x - x^2 = 0$ . Podemos pôr  $x$  em evidência e escrever  $x(\lambda - x) = 0$ . Desta forma, podemos ver que os pontos fixos são dados pelas retas  $x = 0$  e  $x = \lambda$ . Essas duas retas determinam quatro regiões no plano  $\lambda x$ , onde a função  $f(x, \lambda) = \lambda x - x^2$  é positiva ou negativa. De acordo com esse sinal, as órbitas crescem ou decrescem em  $x$ . A figura 4.5 mostra o diagrama de bifurcações da equação, com essas retas determinando os pontos fixos e com as órbitas típicas da equação.

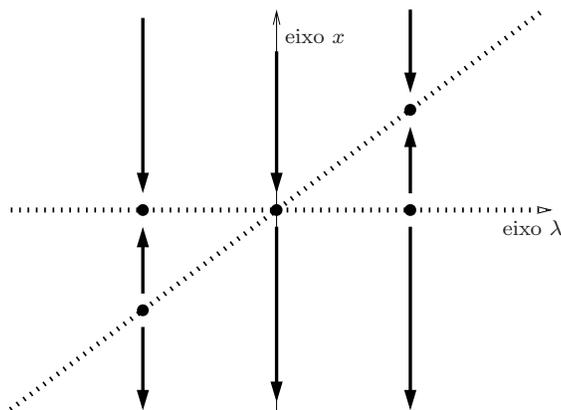


FIGURA 4.5. Estudo da bifurcação transcrítica, na forma canônica  $x' = \lambda x - x^2$ .

O ponto  $\lambda^* = 0$  é um ponto de bifurcação. Nesse ponto, a dinâmica se reduz a um ponto fixo conector. Para  $\lambda \neq \lambda^*$ , a dinâmica é composta de dois pontos fixos, um atrator e um repulsor. As dinâmicas com  $\lambda \neq \lambda^*$  são qualitativamente equivalentes, independente de  $\lambda > \lambda^*$  ou  $\lambda < \lambda^*$ . Mas essas dinâmicas não são equivalentes à dinâmica associada a  $\lambda = \lambda^*$ , por isso  $\lambda^*$  é um ponto de bifurcação.

**Bifurcação do tipo *tridente*.** Considere, agora, a equação

$$x' = \lambda x - x^3.$$

Os pontos fixos no diagrama de bifurcação são dados pela equação  $\lambda x - x^3 = 0$ . Podemos pôr  $x$  em evidência e escrever  $x(\lambda - x^2) = 0$ . Desta forma, vemos que os pontos fixos são dados pela reta  $x = 0$  e pela parábola  $\lambda = x^2$ . Essas curvas determinam quatro regiões no plano  $\lambda x$ , onde a função  $f(x, \lambda) = \lambda x - x^3$  é positiva ou negativa. De acordo com esse sinal, as órbitas crescem ou decrescem em  $x$ . A figura 4.6(a) mostra o diagrama de bifurcações da

equação, com essas curvas determinando os pontos fixos e com as órbitas típicas da equação, entre os pontos fixos.

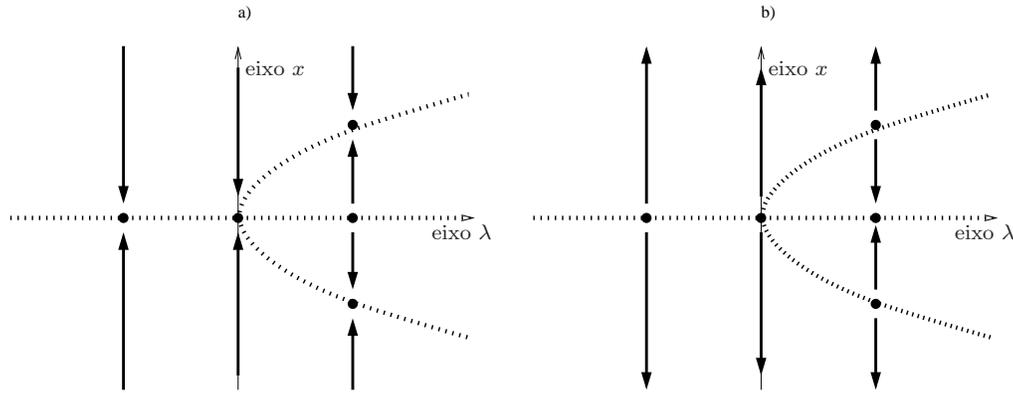


FIGURA 4.6. Estudo da bifurcação do tipo tridente, (a) na forma canônica  $x' = \lambda x - x^3$ ; e (b) na forma  $x' = -\lambda x + x^3$ .

O ponto  $\lambda^* = 0$  é um ponto de bifurcação. Nesse ponto, a dinâmica se reduz a um ponto fixo atrator. Para  $\lambda < \lambda^*$ , temos, também, apenas um ponto fixo atrator. Para  $\lambda > \lambda^*$ , a dinâmica é composta de três pontos fixos, um repulsor e dois atratores.

O que caracteriza a bifurcação do tipo tridente não é que um ponto fixo atrator dá lugar a três, um repulsor e dois atratores. A equação

$$x' = -\lambda x + x^3$$

também apresenta uma bifurcação considerada do tipo tridente (figura 4.6(b)). A diferença é que, nesse caso, um ponto fixo repulsor dá lugar a três, um atrator e dois repulsores. Em ambos os casos, um ponto fixo muda de tipo, enquanto dois outros pontos fixos nascem com o tipo do ponto fixo original, com esses dois pontos fixos surgindo perpendicularmente ao eixo dos parâmetros.

### Bifurcação no infinito.

Um outro caso interessante é o dado pela equação

$$x' = 1 + \lambda x.$$

Observe que  $\lambda = 0$  é um ponto de bifurcação. Em  $\lambda = 0$ , não há ponto fixo e todas as soluções crescem indefinidamente. Em  $\lambda < 0$ , temos um único ponto fixo, que é atrator, e em  $\lambda > 0$ , temos, também, um único ponto fixo, que nesse caso é repulsor. Observe que nesse exemplo a bifurcação não se dá a partir de um certo ponto fixo, como nos casos anteriores.

**4.5. \*Curiosidades.** As bifurcações acima são em relação a um único parâmetro (co-dimensão um). Outras bifurcações, com dois ou mais parâmetros, são também possíveis e podem ser muito mais complicadas de se analisar.

Um exemplo é o da bifurcação tipo *cúspide*, que envolve dois parâmetros:

$$x' = \lambda + \varepsilon x - x^3.$$

Essa equação é considerada no exercício 4.10, mas com  $\varepsilon$  fixo. Uma análise conjunta dos dois parâmetros, considerando a função  $f(x, \lambda, \varepsilon) = \lambda + \varepsilon x - x^3$ , dá um pouquinho do gosto da *teoria de singularidades*. Em uma análise dos dois parâmetros, o conjunto  $f(x, \lambda, \varepsilon) = 0$  dos pontos fixos forma uma superfície no plano  $\varepsilon\lambda x$  (figura 4.7). A partir dessa superfície, vários diagramas de bifurcação de um parâmetro podem ser obtidos cortando a superfície por planos paralelos ao eixo vertical  $x$ .

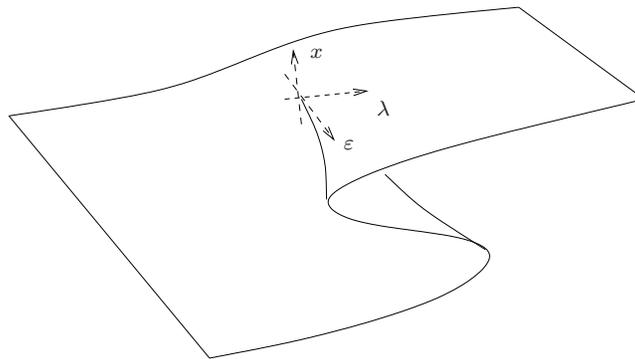


FIGURA 4.7. Superfície de pontos fixos da equação  $x' = \lambda + \varepsilon x - x^3$ , no plano  $\varepsilon\lambda x$ .

Dada uma família de equações, com uma certa bifurcação, busca-se perturbações dessa família, com a introdução de novos parâmetros, que descrevam todas as possíveis modificações na dinâmica. Por exemplo, a família

$$x' = \lambda x - x^3 + \mu_1 + \mu_2 x^2,$$

é o *desdobramento universal* da bifurcação do tipo tridente, pois descreve a perturbação mais geral desse tipo de bifurcação. Em outras palavras, a adição de quaisquer outros termos da forma  $\alpha x^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , não gera nenhuma outra dinâmica qualitativamente diferente na família acima. As novas bifurcações introduzidas pelo desdobramento universal são, às vezes, chamadas de *bifurcações imperfeitas*, em alusão a novos parâmetros importantes, descartados em uma primeira modelagem com certas simetrias “perfeitas”. Observe, também, que a bifurcação do tipo cúspide é um caso particular do desdobramento universal da bifurcação do tipo tridente, obtida considerando  $\mu_2 = 0$ .

## Exercícios

- 4.1. Determine as equações diferenciais do exercício 2.1 que são qualitativamente equivalentes entre si.
- 4.2. Quantos tipos qualitativamente diferentes de linhas de fase com dois pontos fixos existem? Com três pontos fixos? Com  $n$  pontos fixos?

**4.3.** Sabendo que uma equação  $x' = f(x)$  tem apenas três pontos fixos,  $a, b, c$ , com  $a < b < c$ , e que  $a$  é o único ponto fixo do tipo conector, quantos possíveis diagramas de fase qualitativamente diferentes existem? Faça um esboço de cada um deles.

**4.4.** Considere a equação

$$x' = -x(x^2 + 2x + \mu),$$

onde  $\mu$  é um parâmetro real arbitrário. (i) Trace o diagrama de bifurcações dessa equação. (ii) Trace o diagrama de fase da equação nos casos  $\mu = 0$  e  $\mu = 1$ . (iii) Ache os possíveis diagramas de fase qualitativamente diferentes da equação, dependendo de  $\mu$ , juntamente com os intervalos de  $\mu$  em que cada tipo de diagrama ocorre.

**4.5.** Repita o exercício anterior para

$$x' = (x - \lambda)(x^2 - \lambda),$$

com  $\lambda$  real.

**4.6.** Considere a equação

$$x' = \lambda - 2 - 1000(x - 0.1)^3.$$

Para quais valores de  $\lambda$  temos que todas as soluções são tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq 0.1$ ? Idem para  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq 0.2$ .

**4.7.** Considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = (x - 1)(\lambda - 1 - x^2).$$

Faça um esboço do diagrama de bifurcações da equação em relação ao parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , indicando os pontos de bifurcação e as linhas de fase típicas.

**4.8.** Considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = (2\lambda - x^2)(16x - \lambda^2),$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro real.

(a) Faça um esboço do diagrama de bifurcações da equação em relação a  $\lambda$  e determine os pontos de bifurcação.

(b) Determine o valor de  $\lambda$  tal que a solução  $x = x(t)$  com  $x(0) = 0$  convirja para  $x^* = 1$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**4.9.** Considere um problema no qual a temperatura, em graus centígrados, em um forno industrial é dada pela equação

$$x' = 1000\lambda - x^3,$$

com o parâmetro  $\lambda$  podendo ser ajustado. Para quais valores de  $\lambda$  a temperatura pode ser mantida estável entre 100 e 200 graus?

**4.10.** Considere a equação

$$x' = \lambda + \varepsilon x - x^3,$$

em relação ao parâmetro  $\lambda$ , com  $\varepsilon$  constante. (i) No caso  $\varepsilon = 0$ , trace o diagrama de bifurcações dessa equação em relação a  $\lambda$  e determine se  $\lambda = 0$  é ou não um ponto de bifurcação; (ii) mostre que se  $\varepsilon < 0$ , então não há ponto de bifurcação em

relação ao parâmetro  $\lambda$ ; (iii) mostre que se  $\varepsilon > 0$ , há dois pontos de bifurcação do parâmetro  $\lambda$  e determine esses pontos.

- 4.11.** Sabendo que  $x = x(t)$  satisfaz  $x' = -(x-1)(x-\alpha)$  com  $x(0) = 0$ , para quais valores reais de  $\alpha$  temos  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$ ?
- 4.12.** Determine os valores reais de  $\alpha$  para os quais a equação  $x' = \alpha - x^2$  é qualitativamente equivalente à  $x' = (1-x)(1+x)$ .
- 4.13.** Faça um esboço do diagrama de bifurcações da equação

$$x' = -x(x-1)(x-\alpha),$$

indicando os pontos de bifurcação, e determine para quais valores reais de  $\alpha$  temos que a solução com a condição inicial  $x(0) = 1/2$  satisfaz  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$ .

- 4.14.** Faça um esboço do diagrama de bifurcações da equação

$$x' = -x(x-1)(x^2 - \alpha)$$

em relação a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , indicando os devidos pontos de bifurcação, e determine para quais valores de  $\alpha$  temos que a solução com a condição inicial  $x(0) = 1/2$  satisfaz  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

- 4.15.** Considere uma dinâmica populacional logística, com colheita proporcional à população:

$$x' = \lambda x - \gamma x^2 - hx.$$

Assumindo  $\lambda, \gamma > 0$  fixos, estude a variação da dinâmica dessa equação em relação a  $h > 0$ . Trace o diagrama de bifurcações correspondente.

- 4.16.** Considere novamente uma dinâmica populacional logística com colheita proporcional à população:

$$x' = \lambda x - \gamma x^2 - hx,$$

com  $\lambda, \gamma, h > 0$ . Determine para quais valores de  $h$ , em função de  $\lambda$  e  $\gamma$ , a população limite fica reduzida a menos de 10% da população estável do caso sem colheita.

- 4.17.** Considere uma população satisfazendo a equação logística e permitindo imigrações e emigrações entre populações vizinhas, conforme o modelo

$$x' = \lambda x - \gamma x^2 - \mu(x - x_r),$$

com  $\lambda, \gamma, \mu, x_r > 0$ . Observe que se  $x > x_r$ , o termo  $\mu(x - x_r)$  representa um emigração, enquanto que se  $x < x_r$ ,  $\mu(x - x_r)$  representa imigração. Com  $\lambda, \gamma$  e  $x_r$  fixos, descreva qualitativamente o diagrama de bifurcações em relação a  $\mu$ .

- 4.18.** No caso da dinâmica logística com colheita constante,

$$x' = \lambda x - \gamma x^2 - h,$$

mostre que  $y(t) = (\gamma/\lambda)x(t/\lambda)$  satisfaz

$$y' = y - y^2 - k,$$

para um novo parâmetro  $k$ , mostrando que, de fato, apenas um parâmetro é necessário para descrever toda a dinâmica da família inicial de equações com três parâmetros  $\lambda, \gamma, h$ .

- 4.19.** Em um processo químico envolvendo uma certa reação auto-catalítica, a concentração  $x(t)$ , no instante  $t$ , de uma substância  $X$  satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + ax^2 - x^3,$$

onde  $a$  está associado à concentração de uma outra substância e  $\lambda$ , à taxa de retirada (ou injeção, se  $\lambda$  for negativo) da substância  $X$ . Assumindo  $a$  positivo e fixo, trace o diagrama de bifurcações da equação, em relação ao parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ . No caso em que  $a = 10$ ,  $\lambda = 9$  e  $x(0) = 10$ , qual o valor limite da concentração quando  $t \rightarrow \infty$ ?



## Equações de Primeira Ordem - Soluções Explícitas

### 1. Soluções explícitas via separação de variáveis

Até agora, analisamos prioritariamente aspectos geométricos das soluções de algumas equações diferenciais, destacando o comportamento qualitativo das soluções (crescimento, decréscimo, concavidade, limites em relação à variável independente, etc.). Vamos, agora, nos concentrar em informações mais quantitativas, tentando obter expressões explícitas das soluções em termos da variável independente.

Obtivemos algumas soluções explícitas a partir do método de separação de variáveis, visto em capítulos anteriores. Vamos explorar um pouco mais esse método e conhecer outros métodos para transformar equações não-separáveis em separáveis.

É fundamental conjugar os métodos explícitos com os geométricos. Por um lado, uma fórmula para as soluções nem sempre pode ser obtida facilmente e, mesmo quando disponível, não nos dá um entendimento tão imediato do comportamento das soluções como nos métodos geométricos. Por outro lado, os métodos geométricos não nos dão informações quantitativas precisas sobre as soluções.

**1.1. Equações separáveis e integração via frações parciais.** Como vimos anteriormente, equações diferenciais de primeira ordem separáveis têm a forma

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x).$$

Uma manipulação formal leva a

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt,$$

Após a integração (caso haja uma fórmula fechada), obtemos uma fórmula implícita, e algumas vezes explícita, para as soluções, pelo menos nas regiões em que  $h(x) \neq 0$ . Por outro lado, em cada ponto em que  $h(x^*) = 0$ , temos  $g(t)h(x^*) = 0$ , para todo  $t$  e, portanto, uma solução estacionária  $x(t) = x^*$  definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Juntando as soluções estacionárias com as soluções obtidas pela separação de variáveis, obtemos, em geral, o conjunto completo de todas as soluções (com a exceção da colagem de diferentes soluções, nos casos de não-unicidade, como no exemplo da seção 2.2.1).

Vimos alguns exemplos de equações separáveis nos capítulos anteriores. Vamos ver mais alguns exemplos, antes de passar para outros métodos. Começamos com a equação logística,

que tem a forma

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2.$$

Separando as variáveis,

$$\frac{dx}{x - x^2} = dt.$$

Para integrar o lado esquerdo da equação, usamos o método de frações parciais. Escrevemos  $x - x^2 = x(1 - x)$ , cujas raízes são  $x = 0$  e  $x = 1$ , e procuramos constantes  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{1}{x - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1}.$$

Expandindo o lado direito da equação,

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + Bx}{x(x - 1)} = \frac{A - (A + B)x}{x - x^2}.$$

Logo, devemos ter  $A = 1$  e  $B = -1$ :

$$\frac{1}{x - x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1}.$$

Voltando à equação, temos

$$\left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1} \right) dx = dt.$$

Integrando ambos os lados, obtemos

$$\ln|x| - \ln|x - 1| = t + C_1.$$

Como  $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ , temos

$$\ln \left| \frac{x}{x - 1} \right| = t + C_1.$$

Tomando a exponencial dos dois lados,

$$\left| \frac{x}{x - 1} \right| = e^{C_1} e^t.$$

Logo,

$$\frac{x}{x - 1} = \pm e^{C_1} e^t.$$

Podemos substituir  $\pm e^{C_1}$  por uma constante real arbitrária  $C_2 \neq 0$ , de modo que

$$\frac{x}{x - 1} = C_2 e^t.$$

Resolvendo para  $x$ , encontramos

$$x(t) = \frac{C_2 e^t}{C_2 e^t - 1} = \frac{C_2}{C_2 - e^{-t}}.$$

para  $C_2 \neq 0$ . Além dessas soluções, temos as soluções estacionárias  $x(t) = 0$  e  $x(t) = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Observe, ainda, que se  $C_2 > 0$ , então a solução não está definida para  $t = -\ln C_2$ . Assim, as soluções da equação logística são

- i)  $x(t) = \frac{C_2}{C_2 - e^{-t}}$ ,  $C_2 \neq 0$ , com  $t \neq -\ln C_2$  se  $C_2 > 0$ ,
- ii)  $x(t) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,
- iii)  $x(t) = 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Vimos anteriormente cinco tipos de comportamentos das soluções da equação logística, como mostra a figura 2.1: i) em  $x > 1$ , as soluções decrescem em direção a  $x = 1$ ; ii)  $x(t) = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é solução estacionária; iii) em  $0 < x < 1$ , as soluções crescem, se afastando de  $x = 0$  e se aproximando de  $x = 1$ ; iv)  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é solução estacionária; e v) em  $x < 0$ , a solução decresce ilimitadamente. Analisando a fórmula para as soluções explícitas, observamos que esses comportamentos estão associados às seguintes soluções, respectivamente:

- i)  $x(t) = \frac{C_2}{C_2 - e^{-t}}$ , para  $t > -\ln C_2$ , com  $C_2 > 0$ ;
- ii)  $x(t) = 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $x(t) = \frac{C_2}{C_2 - e^{-t}}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , com  $C_2 < 0$ .
- iv)  $x(t) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ;
- v)  $x(t) = \frac{C_2}{C_2 - e^{-t}}$ , para  $t < -\ln C_2$ , com  $C_2 > 0$ .

Observe que quando  $C_2 > 0$ , a fórmula para a solução se divide em duas partes, uma para  $t < -\ln C_2$ , correspondente às soluções na região  $x < 0$ , e outra para  $t > -\ln C_2$ , correspondente às soluções em  $x > 1$ . À medida em que  $C_2 > 0$  varia, percorremos todas as soluções em  $x > 1$  e em  $x < 0$ .

**1.2. Trajetórias ortogonais.** Um problema interessante é o de se encontrar curvas (ou trajetórias) ortogonais a uma dada família de curvas. Por exemplo, dada a família de círculos centrados na origem, com raio arbitrário, é fácil ver que qualquer reta passando pelo origem é ortogonal a todos os círculos dessa família. Mas como podemos resolver isso em situações menos óbvias? A ideia é olhar para a inclinação  $m$  de cada curva da família dada inicialmente, e procurar curvas que tem inclinação  $-1/m$ . A dificuldade é que  $m$  varia não apenas com o ponto da curva, mas com a curva da família. Vejamos como resolver isso em um exemplo.

Considere a família de parábolas  $x = ky^2$ , com parâmetro  $k \in \mathbb{R}$  arbitrário. Quando  $k = 0$ , a curva correspondente é o eixo  $y$ , o que significa dizer que todas as trajetórias ortogonais devem cruzar o eixo  $y$  com inclinação nula. Quando  $k \neq 0$ , podemos derivar implicitamente a equação  $x = ky^2$  e deduzir que, ao longo de cada curva, a coordenada  $y$  varia com  $x$  de tal forma que

$$1 = 2ky \frac{dy}{dx}.$$

Ou seja, a inclinação da reta tangente nesse ponto é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky},$$

em  $y \neq 0$  (em  $y = 0$ , a reta tangente ao gráfico de  $x = ky^2$  é vertical, correspondendo a  $dy/dx = \pm\infty$ ).

Olhando para a equação acima, deduzimos que as trajetórias ortogonais devem satisfazer a equação

$$\frac{dy}{dx} = -2ky$$

Mas cuidado. Nesse momento não devemos olhar para  $k$  como um parâmetro dessa equação, pois queremos achar curvas ortogonais não apenas a  $x = ky^2$  para um determinada  $k$ , mas, sim, para todas as parábolas  $x = ky^2$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Para resolver isso, observamos que  $k = x/y^2$  em todos os pontos e parâmetros da família. Substituindo esse valor de  $k$  na equação acima, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{x}{y}.$$

Via separação de variáveis, obtemos

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C,$$

ou seja,

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C,$$

que é uma família de elipses.

Caso não tivéssemos substituído o valor de  $k$ , teríamos encontrado as soluções  $y = Ce^{-2kx}$ , que são exponenciais. Essa é uma família a dois parâmetros. Fixando  $k$ , temos, na verdade, uma família a um parâmetro  $C \in \mathbb{R}$  que é ortogonal à família de parábolas transladadas  $x = ky^2 + b$ , com parâmetro  $b \in \mathbb{R}$  e  $k$  fixo.

## Exercícios

**1.1.** Ache fórmulas explícitas para o conjunto de soluções das seguintes equações diferenciais, onde  $x' = dx/dt$  e os parâmetros  $\lambda$  e  $\gamma$  são positivos:

$$(a) x' = e^x, \quad (b) x' = \lambda x - \gamma x^2, \quad (c) x' = \lambda x - x^3, \quad (d) x' = \cos^2 x,$$

$$(e) x' = t\sqrt{x}, \quad (f) x' = x^3 \sin t, \quad (g) x' = \frac{x+1}{t-t^2}, \quad (h) x' = t^2 x^2.$$

**1.2.** Traça o gráfico dos vários tipos de soluções das equações do exercício 1.1.

**1.3.** Nos itens (a), (b), (c) e (d) do exercício 1.1, identifique as expressões das soluções correspondentes a cada órbita da equação, conforme feito no exemplo da equação logística.

1.4. Determine a solução particular da equação

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos(x)$$

que satisfaz  $y(0) = 1$  e determine o maior intervalo da forma  $]a, b[$ , com  $a < 0 < b$ , no qual essa solução está definida.

1.5. Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = (x - 1)^2.$$

(a) Ache a solução geral da equação (solução explícita como função de  $t$ ), indicando o intervalo (em  $t$ ) de definição de cada solução.

(b) Faça um esboço, no plano  $tx$ , do gráfico das soluções  $x(t)$  obtidas no item (a).

1.6. Seja  $n \in \mathbb{N}$  fixo e considere a família de curvas polinomiais de ordem  $n$  dada por  $y = ax^n$ , com o parâmetro  $a \in \mathbb{R}$  arbitrário. Encontre as trajetórias ortogonais a essa família.

## 2. Equações homogêneas - transformação em equações separáveis

Uma função  $h = h(x, y)$  é dita *homogênea de grau  $n$*  quando

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n h(x, y),$$

para todo  $\lambda \neq 0$ . Por exemplo, as funções abaixo são homogêneas de graus respectivamente três, um e zero:

$$h(x, y) = xy^2 + x^2y, \quad h(x, y) = \frac{xy + x^2}{x - 2y}, \quad h(x, y) = \frac{x - y}{x + 2y} + \sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

Porém, observe que a combinação linear de funções homogêneas de graus diferentes não é homogênea, como, por exemplo,  $f(x, y) = y + xy + y^3$ .

No caso de uma função homogênea de grau zero, temos

$$h(\lambda x, \lambda y) = h(x, y),$$

para todo  $\lambda \neq 0$ . Tomando  $\lambda = 1/x$ , uma função homogênea de grau zero pode ser reescrita na forma

$$h(x, y) = h\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x}y\right) = h\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Uma equação diferencial *homogênea* é uma equação

$$\frac{dy}{dx} = h(x, y),$$

com uma função  $h = h(x, y)$  homogênea de grau zero. Essa equação pode, então, ser reescrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = h\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Observe que o lado direito da equação depende apenas da razão  $y/x$ . Essa equação pode ser transformada em uma equação separável através da introdução de uma nova variável dependente  $z = z(x)$ , no lugar de  $y = y(x)$ , dada exatamente pela relação

$$z = \frac{y}{x}.$$

De fato, temos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{1}{x} \left( \frac{dy}{dx} - z \right) = \frac{1}{x} \left( h \left( 1, \frac{y}{x} \right) - z \right) = \frac{1}{x} (h(1, z) - z).$$

Logo,

$$\frac{dz}{h(1, z) - z} = \frac{dx}{x},$$

Essa é uma equação separável em  $z$  e  $x$ . A partir desse ponto, a resolução segue como no método de separação de variáveis, levando a uma solução  $z = z(x)$  da equação acima. Em seguida, é preciso lembrar que  $z = y/x$ , para obter a solução final  $y(x) = xz(x)$ .

**2.1. Exemplo de equação homogênea.** Uma das equações homogêneas mais simples é a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Observe que ela também é separável e pode ser resolvida facilmente por separação de variáveis. Mas para efeito de ilustração, vamos resolver essa equação pelo método para equações homogêneas. Nesse caso, introduzindo a nova variável dependente  $z = y/x$  e derivando implicitamente a relação  $xz = y$ , obtemos

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = z.$$

Portanto, chegamos a

$$x \frac{dz}{dx} = 0.$$

Para  $x \neq 0$ , isso nos dá que

$$\frac{dz}{dx} = 0.$$

Ou seja, as soluções são constantes

$$z(x) = C.$$

Essa função está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$  e, apesar da singularidade da equação original em  $x = 0$ , a função  $z(x) = Cx$  satisfaz a equação  $x dz/dt = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Voltando para a variável  $y$ , obtemos que

$$y(x) = Cx.$$

Essa função pode ser definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ , mas a equação diferencial original só tem sentido em  $x \neq 0$ . A solução geral é, então,  $y = Cx$ ,  $x \neq 0$ , onde  $C$  é uma constante real arbitrária.

**2.2. Outro exemplo de equação homogênea.** Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + x^2}{xy},$$

que é homogênea. Introduzindo a variável dependente  $z = y/x$ , obtemos, pela fórmula final acima, a equação

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{zx}.$$

É aconselhável, porém, obter essa equação em cada caso, diretamente da relação  $xz = y$ , para evitar confusões. Assim, derivando os dois lados da equação  $xz = y$  em relação a  $x$ , obtemos, usando a regra do produto no lado esquerdo da equação,

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + x^2}{xy} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = z + \frac{1}{z}.$$

Eliminando  $z$  dos dois lados, chegamos a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{xz}.$$

Assim, temos

$$z \, dz = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{2} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad z(x) = \pm \sqrt{\ln x^2 + 2C}.$$

Como  $y = xz$ , obtemos

$$y(x) = \pm x \sqrt{\ln x^2 + 2C},$$

que está definido e é diferenciável para todo  $C$  real e para todo  $|x| > -\exp(C)$ .

**2.3. Trajetórias ortogonais com equação homogênea.** Considere a família de círculos  $x^2 + y^2 = 2ax$ , com  $a \in \mathbb{R}$ . Completando o quadrado, vemos que  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ . Essa é uma família de círculos com centro no eixo  $x$  e raio igual à distância do centro à origem. Derivando em relação a  $x$ , obtemos

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 2a.$$

Explicitando a derivada e substituindo o valor de  $a$ , obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 + y^2}{x} - 2x}{2y} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Assim, as trajetórias ortogonais são dadas pelo conjunto de soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

Esta é uma equação homogênea. Substituindo  $y$  por  $z$ , com  $xz = y$ , vemos que

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2y}{x \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{2z}{1 - z^2}.$$

Assim,

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{1 - z^2} - z = \frac{2z - z(1 - z^2)}{1 - z^2} = \frac{z(1 + z^2)}{1 - z^2}.$$

Está é uma equação separável, cuja solução é dada implicitamente por

$$\int^z \frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)} dz = \int^x \frac{dx}{x}.$$

A integral do lado esquerdo pode ser tratada via frações parciais:

$$\frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)} = \frac{A}{z} + \frac{B + Cz}{1 + z^2} = \frac{A + Bz + (A + C)z^2}{z(1 + z^2)}.$$

Isso nos dá  $A = 1$ ,  $B = 0$  e  $C = -2$ . Logo, a menos de uma constante,

$$\int^z \left( \frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)} = \frac{1}{z} - \frac{2z}{1 + z^2} \right) dz = \ln |z| - \ln(1 + z^2) = \ln \frac{|z|}{1 + z^2}.$$

Portanto, obtemos

$$\ln \frac{|z|}{1 + z^2} = \ln |x| + C.$$

Isso nos dá

$$z = Cx(1 + z^2),$$

para outra constante real arbitrária. Voltando para a variável  $y = xz$ , chegamos a

$$y = Cx^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = C(x^2 + y^2).$$

Ou seja, a família de trajetórias ortogonais é dada por

$$x^2 + y^2 = \frac{y}{C}.$$

Completando o quadrado, temos

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2},$$

que são círculos com centro no eixo  $y$  e raios arbitrários iguais à distância do centro à origem. Esta família é uma rotação de noventa graus da família original.

## Exercícios

**2.1.** Ache a solução geral das equações

$$(a) \frac{dy}{dx} = \frac{yx^2 - xy^2}{x^3}, \quad (b) \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2},$$

**2.2.** Ache a solução particular da equação  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ , com a condição inicial  $y(1) = 2$  e determine o maior intervalo de definição, da forma  $]a, b[$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , dessa solução.

**2.3.** Ache a solução particular da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

tal que  $y(1) = 2$  e determine o maior intervalo de definição dessa solução, da forma  $]a, b[$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ .

**2.4.** Ache a solução particular da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right),$$

com  $y(1) = \pi/2$  e determine o maior intervalo de definição dessa solução particular.

**2.5.** Coloque a equação abaixo na forma de uma equação homogênea e ache a solução geral da equação (c.f. Exercício 4.3)

$$4x + 3y + x \frac{dy}{dx} = 0.$$

**2.6.** Verifique que a mudança de variáveis para coordenadas polares  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  também transforma uma equação homogênea

$$\frac{dy}{dx} = h(x, y)$$

em uma equação separável, da forma

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{(1 + (\tan \theta)h(\tan \theta, 1))}{(h(\tan \theta, 1) - \tan \theta)}.$$

### 3. Equações exatas

**3.1. Equações exatas.** Dada uma equação de primeira ordem

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

temos buscado soluções explícitas,  $y = y(x)$ , em termos de funções elementares de  $x$ . Em muitos casos, porém, obtemos, mais geralmente, soluções dadas implicitamente por uma equação

$$\varphi(x, y) = c,$$

para alguma função  $\varphi$  e uma certa constante arbitrária  $c$ . Nesse caso, as soluções são as curvas de nível da função  $\varphi(x, y)$ . As soluções explícitas são casos particulares desse tipo de situação. De fato, as soluções  $y(x) = Ce^{-\lambda x}$  da equação de decaimento radioativo  $y' = \lambda y$ , por exemplo, podem ser vistas como as curvas de nível da função

$$\varphi(x, y) = \ln |y| + \lambda x.$$

Na tentativa de identificar quais equações podem nos dar facilmente soluções dadas implicitamente pelas curvas de nível de uma função  $\varphi(x, y)$ , vamos fazer o processo inverso, partindo de uma função  $\varphi(x, y)$  e obtendo uma equação para  $dy/dx$ . Considere, por exemplo, a função  $\varphi(x, y) = yx - x^2 + y^5$ . Diferenciando implicitamente a relação

$$yx - x^2 + y^5 = c,$$

onde  $c$  é uma constante real qualquer associada a um nível de  $\varphi$ , vemos que  $y = y(x)$ , dado implicitamente por essa relação, satisfaz a equação

$$\frac{dy}{dx}x + y - 2x + 5y^4 \frac{dy}{dx} = 0,$$

que pode ser escrita como

$$y - 2x + (5y^4 + x) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{5y^4 + x}.$$

De maneira geral, uma função  $y = y(x)$  dada implicitamente por uma relação  $\varphi(x, y) = c$  satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Se uma equação estiver nessa forma, suas soluções são dadas implicitamente por  $\varphi(x, y) = c$ , para qualquer constante  $c$ , que são as curvas de nível da função  $\varphi$ .

Porém, uma dada equação não aparece claramente dessa forma, mas, sim, na forma

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

para certas funções  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$ . Uma questão que se impõe é como reconhecer que uma equação dada nessa forma pode ser vista em termos de derivadas parciais de uma única função  $\varphi = \varphi(x, y)$ , isto é, como saber se existe uma função  $\varphi(x, y)$  tal que  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  sejam as derivadas parciais

$$M(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}.$$

Se isso for possível, as soluções são dadas implicitamente pela relação  $\varphi(x, y) = c$ .

Observe que uma condição necessária para que isso aconteça (assumindo  $\varphi$  suave - duas vezes continuamente diferenciável) é

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

De fato, trocando a ordem de derivação da derivada mista, temos

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Sob certas hipóteses, esta se torna uma condição necessária e suficiente, conhecida como *condição de Euler*. Por exemplo, se  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  forem continuamente diferenciáveis em um retângulo  $R = \{(x, y); a < x < b, c < y < d\}$ , com

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

nesse retângulo, então podemos integrar essas funções de maneira apropriada para achar  $\varphi$ . Esta função procurada deve satisfazer as duas equações

$$M(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}.$$

Podemos forçar a primeira equação integrando  $M(x, y)$  em relação a  $x$ , o que nos dá

$$\varphi(x, y) = C_1(y) + \int^x M(x, y) dx.$$

A função  $C_1(y)$  representa a constante de integração, que depende de  $y$ , pois a integração é em  $x$ , para cada  $y$ . Para que  $\varphi(x, y)$  seja a função procurada, falta satisfazer a condição

$$N(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}.$$

Essa condição será usada para encontrarmos  $C_1(y)$ . Derivando a expressão para  $\varphi(x, y)$  em relação a  $y$ , temos

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{dC_1(y)}{dy} + \int^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx.$$

Para que a derivada de  $\varphi(x, y)$  em relação a  $y$  seja  $N(x, y)$ , precisamos que  $C_1(y)$  satisfaça

$$\frac{dC_1(y)}{dy} = N(x, y) - \int^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx.$$

Para que essa função  $C_1(y)$  exista, é preciso que o lado direito seja uma função apenas de  $y$ , o que é garantido pela condição de Euler:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( N(x, y) - \int^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx \right) = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Assim,  $C_1(y)$  pode ser encontrada da equação diferencial acima, i.e.

$$C_1(y) = \int^y N(x, y) dy - \int^y \int^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx dy.$$

Isso só é possível caso a condição de Euler seja válida, caso contrário o lado direito da expressão acima não é função apenas de  $y$ , invalidando todo o processo.

Esse processo parece complicado, nesse nível abstrato, mas, na prática, a condição de Euler trata de tornar as coisas simples. O método consiste de duas etapas. Primeiro, integramos  $M(x, y)$  em relação a  $x$  para achar

$$\varphi(x, y) = C_1(y) + \int^x M(x, y) dx.$$

Em seguida, derivamos o lado direito em relação a  $y$  para achar  $C_1(y)$  através da equação

$$\frac{dC_1(y)}{dy} = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int^x M(x, y) dx.$$

A condição de Euler garante que o lado direito seja função apenas de  $y$ . É claro que essa condição deve ser verificada de antemão, antes de se aplicar o método.

Observe que há maneiras alternativas de se proceder. Podemos, primeiro, integrar  $N(x, y)$  em relação a  $y$  e depois derivar em relação a  $x$ , ou, ainda, integrar  $M(x, y)$  em relação a  $x$  e  $N(x, y)$  em relação a  $y$  e juntar todos os termos não repetidos (veja exemplo a seguir).

Em resumo, podemos afirmar o seguinte:

Considere uma equação diferencial da forma

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

onde  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  são funções definidas e continuamente diferenciáveis em um retângulo  $R = \{(x, y); a < x < b, c < y < d\}$ . Se a condição de Euler

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

for satisfeita em todo  $R$ , então existe uma função  $\varphi(x, y)$  definida em  $R$  e duas vezes continuamente diferenciável tal que as soluções  $y = y(x)$  da equação diferencial são dadas implicitamente pela relação  $\varphi(x, y) = c$ , para quaisquer constantes  $c$ .

**3.2. Exemplo de equação exata.** Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2 + 2x}{2xy + y^3 - x^2},$$

que pode ser escrita como

$$2xy - y^2 + 2x + (x^2 - 2xy - y^3) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Essa equação está na forma

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

com

$$M(x, y) = 2xy - y^2 + 2x, \quad N(x, y) = (x^2 - 2xy - y^3),$$

que são funções definidas em  $R = \mathbb{R}^2$ .

Observe que a condição de Euler é satisfeita, pois

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2x - 2y = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Procurando uma primitiva para  $M(x, y)$  em relação a  $x$ , obtemos

$$\varphi(x, y) = C_1(y) + x^2y - xy^2 + x^2.$$

Derivando essa expressão em relação a  $y$  e igualando a  $N(x, y)$ , temos

$$\frac{dC_1(y)}{dy} + x^2 - 2xy = x^2 - 2xy - y^3.$$

Logo,

$$\frac{dC_1(y)}{dy} = -y^3.$$

Então,

$$C_1(y) = -\frac{y^4}{4} + C_0,$$

para uma constante arbitrária  $C_0$ . Assim, achamos

$$\varphi(x, y) = x^2 + x^2y - xy^2 - y^4 + C_0,$$

para uma constante arbitrária  $C_0$ . A solução geral é, portanto, dada implicitamente por

$$x^2 + x^2y - xy^2 - y^4 = c,$$

onde  $c$  é uma constante real arbitrária.

Um outro caminho passa por integrar  $N(x, y)$  em relação  $y$ , para obter

$$\varphi(x, y) = C_2(x) + yx^2 - xy^2 - y^4,$$

para alguma função  $C_2(x)$ . Igualando as duas expressões para  $\varphi(x, y)$ , temos

$$C_1(y) + x^2y - xy^2 + x^2 = C_2(x) + yx^2 - xy^2 - y^4.$$

Simplificando,

$$C_1(y) + y^4 = C_2(x) - x^2.$$

Como o lado esquerdo só depende de  $y$  e o lado esquerdo só depende de  $x$ , eles são constante, logo para uma constante  $C_0$  arbitrária, temos

$$C_1(y) = C_0 - y^4, \quad C_2(x) = C_0 + x^2.$$

Assim, achamos, novamente

$$\varphi(x, y) = C_0 + x^2 + x^2y - xy^2 - y^4,$$

de onde tiramos a solução geral

$$x^2 + x^2y - xy^2 - y^4 = c,$$

para uma constante real arbitrária  $c$ .

**\*Curiosidades.** A condição de Euler é suficiente não apenas em retângulos mas em qualquer região do plano que seja *simplesmente conexa*, ou seja, sem “buracos”. De maneira rigorosa, uma região do plano é dita simplesmente conexa quando dois pontos quaisquer da região podem ser ligados por curvas suaves e, quando dadas duas curvas nessa região com os mesmos pontos extremos, uma curva pode ser deformada continuamente na outra, mantendo os extremos fixos e sem sair da região. Mais explicitamente, essa deformação contínua significa dizer que existe uma função contínua  $\sigma(r, s)$ ,  $0 \leq r, s \leq 1$ , com valores nessa região e tal que  $s \rightarrow \sigma(s, 0)$  e  $s \rightarrow \sigma(s, 1)$  são, respectivamente, parametrizações de cada uma das curvas. Essa condição expressa matematicamente a idéia da região não ter “buracos”.

A idéia fundamental do método é a de que podemos encontrar  $\varphi$  da seguinte forma. Primeiro, fixamos um ponto  $p_0 = (x_0, y_0)$  na região. Em seguida, dado um outro ponto qualquer  $p = (x, y)$ , integramos o campo  $(M(x, y), N(x, y))$  ao longo de uma curva qualquer ligando  $p_0$  a  $p$ . Parametrizando a curva por  $\sigma = \sigma(s) = (x(s), y(s))$ , com  $0 \leq s \leq 1$ ,  $\sigma(0) = p_0 = (x_0, y_0)$  e  $\sigma(1) = p = (x, y)$ , temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(x(1), y(1)) \\ &= \varphi(x(0), y(0)) + \int_0^1 \frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s)) \, ds \\ &= \varphi(x_0, y_0) + \int_0^1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(s), y(s)) \frac{dx(s)}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(s), y(s)) \frac{dy(s)}{ds} \right) \, ds \\ &= \varphi(x_0, y_0) + \int_0^1 \left( M(x, y) \frac{dx}{ds} + N(x, y) \frac{dy}{ds} \right) \, ds \\ &= \varphi(x_0, y_0) + \int_{\sigma} (M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy). \end{aligned}$$

A condição de Euler é equivalente à de que o rotacional do campo  $(M(x, y), N(x, y))$  seja nulo. Assim, para os que conhecem o Teorema de Green, segue que a integral de linha desse campo ao longo de uma curva fechada é zero, desde que o interior da curva esteja dentro da região, condição que será sempre garantida no caso de regiões simplesmente conexas. Mais explicitamente, usando a parametrização  $\sigma(s, r)$  considerada acima, a integral

$$\int_{\sigma(\cdot, r)} (M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy)$$

independe do parâmetro  $r$ , o que pode ser visto derivando essa integral em relação a  $r$  e usando integração por partes em certos termos.

Portanto, a integral de linha ao longo de uma curva  $\sigma$  ligando os dois pontos  $p_0$  e  $p$  independe da escolha da curva  $\sigma$ . Desta maneira,  $\varphi$  dada por

$$\varphi(x, y) = C_0 + \int_{\sigma} (M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy)$$

está bem definida e é função apenas de  $x$  e  $y$ , e não do caminho, e onde  $C_0$  é uma constante arbitrária.

O cálculo feito anteriormente coincide com este quando a curva escolhida é formada por um segmento de reta horizontal, ligando  $(0,0)$  a  $(x,0)$ , e um segmento de reta vertical, ligando  $(x,0)$  a  $(x,y)$ , dando

$$\varphi(x, y) = \int^x M(x, 0)dx + \int^y N(x, y)dy = C_0 + \int_0^x M(\xi, 0) d\xi + \int_0^y N(x, \eta) d\eta.$$

Verifique que está fórmula dá, de fato,  $\varphi_x(x, y) = M(x, y)$  e  $\varphi_y(x, y) = N(x, y)$ .

Já a condição do domínio ser simplesmente conexo não é necessária. Por exemplo, no domínio  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , basta considerarmos qualquer função  $\varphi(x, y)$  definida em  $\mathcal{D}$  que obtemos uma equação exata nesse domínio, com os termos  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  correspondentes satisfazendo a condição de Euler. Por exemplo, se

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

então

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2},$$

de modo que

$$\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

é uma equação exata. O exercício 3.6 nos dá um outro exemplo interessante.

Agora, considerando a equação

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{dy}{dx} = 0,$$

é fácil verificar que

$$M(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad N(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

satisfazem a condição de Euler, no domínio  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Porém, não existe  $\varphi$  definida e contínua em todo o  $\mathcal{D}$  e cujas derivadas parciais sejam  $M$  e  $N$ . Veja exercício 3.7

### Exercícios

**3.1.** Verifique que uma equação separável pode ser facilmente transformada em uma equação exata.

**3.2.** Determine quais equações abaixo são exatas.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y + (x^2 + \sin y) \frac{dy}{dx} &= 0, & \text{(b)} \quad y + t \frac{dy}{dt} &= 0, \\ \text{(c)} \quad 2t - \sin x \frac{dx}{dt} &= 0, & \text{(d)} \quad (3y^2 - x \sin y) \frac{dy}{dx} &= \cos y. \end{aligned}$$

**3.3.** Encontre o conjunto de soluções das seguintes equações.

$$(a) \ y + x + (x + \cos y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (b) \ 2x \cos y + (x - x^2 \sin y) \frac{dy}{dx} = -y + x^4,$$

$$(c) \ e^t + x + (x + t) \frac{dx}{dt} = 0, \quad (d) \ (2y - x \sin y) \frac{dy}{dx} = -\cos y.$$

**3.4.** Determine o inteiro  $n$  para que a equação abaixo seja exata.

$$nx^2 \cos y + y^2 + (2xy - x^n \sin y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

**3.5.** Suponha que a equação

$$M(y) + N(x) \frac{dy}{dx} = 0$$

seja exata, com  $M(0) = N(0) = 0$ . Ache uma integral para a equação.

**3.6.** Mostre que as funções

$$M(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad N(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

satisfazem a condição de Euler em todo o seu domínio de definição  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \neq (0, 0)\}$  e que, apesar desse domínio ter um “buraco” na origem, a função  $\varphi(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  é tal que  $\nabla \varphi = (M, N)$  e as curvas de nível de  $\varphi$  nos dão soluções da equação  $M(x, y) + N(x, y) dy/dx = 0$ .

**3.7.** Considere as funções

$$M(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad N(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Mostre que  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  satisfazem a condição de Euler em  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , mas que não existe  $\varphi(x, y)$  definida e contínua em  $\mathcal{D}$  cujas derivadas parciais  $\partial_x \varphi$  e  $\partial_y \varphi$  sejam, respectivamente,  $M$  e  $N$ . (Sugestão: Calcule a integral de linha do campo  $\mathbf{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$  ao longo de um círculo de raio  $a > 0$  qualquer.)

#### 4. Fatores de integração e equações lineares

**4.1. Fatores de integração.** Em alguns casos, uma equação da forma

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

pode não ser exata, mas pode ser transformada em uma com uma mera multiplicação por uma função auxiliar  $I(x, y)$ . Mais precisamente, a função  $I(x, y)$  deve ser tal que a equação

$$I(x, y)M(x, y) + I(x, y)N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

seja exata. Uma função  $I(x, y)$  com essa propriedade é dita um *fator de integração*.

Considere, por exemplo, a equação

$$xy + x^2 + 1 + x^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Temos

$$\frac{\partial(xy + x^2 + 1)}{\partial y} = x \neq 2x = \frac{\partial x^2}{\partial x}.$$

Porém, dividindo a equação por  $x$ , obtemos a equação

$$y + x + \frac{1}{x} + x \frac{dy}{dx} = 0,$$

que satisfaz a equação de Euler. Temos, assim,

$$\varphi(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C_1(y),$$

$$\varphi(x, y) = xy + C_2(x).$$

Logo,

$$C_1(y) = C_0 = C_2(x) - \frac{x^2}{2} - \ln|x|.$$

Portanto,

$$\varphi(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} + \ln|x|.$$

A solução geral se escreve

$$xy + \frac{x^2}{2} + \ln|x| = c,$$

para qualquer constante real  $c$ . Nesse caso, o fator de integração foi  $I(x, y) = 1/x$ .

**4.2. Equações lineares de primeira ordem.** Quando a equação diferencial de primeira ordem

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

é linear em  $x$  e  $dx/dt$ , temos uma equação do tipo

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t).$$

No caso particular em que  $q(t) = 0$ , temos simplesmente

$$\frac{dx}{dt} = -p(t)x,$$

que pode ser resolvida via separação de variáveis, dando

$$x(t) = \pm e^{-\int^t p}$$

onde  $\int^t p$  é uma primitiva qualquer de  $p$ . De maneira mais explícita, podemos escrever

$$x(t) = Ce^{-\int_0^t p(s) ds},$$

para uma constante real  $C$ , o que inclui a solução trivial identicamente igual a zero.

Observe, de outra forma, que, quando  $q(t) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( x(t) e^{\int_0^t p(s) ds} \right) = \left( \frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t) \right) e^{\int_0^t p(s) ds} = 0,$$

de onde tiramos que

$$x(t) e^{\int_0^t p(s) ds} = C$$

para alguma constante  $C$ , conforme obtido via separação de variáveis.

Por outro lado, no caso em que  $q(t) \neq 0$ , podemos utilizar a relação

$$\frac{d}{dt} \left( x(t) e^{\int_0^t p(s) ds} \right) = \left( \frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t) \right) e^{\int_0^t p(s) ds},$$

obtida acima, para reescrever a equação

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)$$

na forma equivalente

$$\frac{d}{dt} \left( x(t) e^{\int_0^t p(s) ds} \right) = q(t) e^{\int_0^t p(s) ds}.$$

Esta última equação pode ser resolvida explicitamente via integração direta:

$$x(t) e^{\int_0^t p(s) ds} = C_0 + \int_0^t q(s) e^{\int_0^s p(\tau) d\tau} ds.$$

Assim, a solução toma a forma

$$x(t) = C_1 e^{-\int_0^t p(s) ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau) d\tau} q(s) ds.$$

A resolução de uma equação de primeira ordem pode ser colocada, ainda, no contexto de fatores de integração. De fato, a equação

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)$$

não é uma equação exata. No entanto, multiplicando essa equação por  $\exp(\int^t p(t))$ , temos

$$(p(t)x - q(t))e^{\int^t p(t)} + e^{\int^t p(t)} \frac{dx}{dt} = 0.$$

Com isso, a condição de Euler é satisfeita, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (p(t)x - q(t))e^{\int^t p(t)} \right) = p(t)e^{\int^t p(t)} = \frac{\partial}{\partial t} e^{\int^t p(t)},$$

que dá uma equação exata. O termo  $I(t, x) = \exp(\int^t p(t))$  é o fator de integração, nesse caso.

**4.3. Difusão de calor em um meio.** Considere a equação de difusão de calor em um meio com temperatura ambiente constante  $T_r$  e coeficiente de difusão térmica  $\kappa$ :

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa(T - T_r).$$

Esta é uma equação linear não-homogênea de primeira ordem, que pode ser escrita na forma

$$\frac{dT}{dt} + \kappa T = \kappa T_r.$$

Esta equação também é separável, mas a título de ilustração, vamos resolvê-la da forma descrita acima, como uma equação linear. Multiplicamos essa equação pelo fator de integração  $e^{\kappa t}$ , de forma que

$$\frac{d}{dt}(Te^{\kappa t}) = \frac{dT}{dt}e^{\kappa t} + \kappa Te^{\kappa t} = \left(\frac{dT}{dt} + \kappa T\right)e^{\kappa t} = \kappa T_r e^{\kappa t}.$$

Integrando, obtemos

$$T(t)e^{\kappa t} = C_1 + T_r e^{\kappa t}.$$

Logo, a solução geral da equação é

$$T(t) = C_1 e^{-\kappa t} + T_r.$$

Dada uma temperatura inicial  $T(0)$ , obtemos a relação

$$T(0) = C_1 + T_r$$

entre a constante de integração  $C_1$  e a condição inicial. Assim, podemos escrever, mais explicitamente,

$$T(t) = T(0)e^{-\kappa t} + T_r(1 - e^{-\kappa t}).$$

De qualquer modo, podemos observar que, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos  $T(t) \rightarrow T_r$ , conforme deduzimos na análise geométrica. Agora, porém, temos uma informação mais precisa em termos quantitativos.

**4.4. Resolução da equação logística via transformação para equação linear.** Podemos resolver a equação logística

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - \gamma x^2$$

via uma transformação de variável dependente que a leva a uma equação linear. Como usual, consideramos  $\mu, \gamma > 0$ .

Observe primeiro que  $x \equiv 0$  é uma solução estacionária dessa equação. Enquanto que para  $x \neq 0$  podemos definir

$$z = \frac{1}{x}$$

e buscar uma equação para  $z(t) = 1/x(t)$ . Derivando o quociente, obtemos

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x^2}(\mu x - \gamma x^2) = -\frac{\mu}{x} + \gamma,$$

Substituindo  $1/x$  por  $z$  no lado direito, chegamos à equação linear de primeira ordem

$$\frac{dz}{dt} = -\mu z + \gamma.$$

O fator de integração é  $e^{\mu t}$ , o que nos leva a

$$\frac{d}{dt} (ze^{\mu t}) = \gamma e^{\mu t}.$$

Integrando, obtemos

$$z(t)e^{\mu t} = \frac{\gamma}{\mu} e^{\mu t} + C,$$

ou seja,

$$z(t) = Ce^{-\mu t} + \frac{\gamma}{\mu},$$

definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. Voltando para a variável dependente original  $x$ , temos

$$\frac{1}{x(t)} = Ce^{-\mu t} + \frac{\gamma}{\mu},$$

o que nos dá

$$x(t) = \frac{\mu}{Ce^{-\mu t} + \gamma},$$

onde  $C$  é uma outra constante arbitrária e  $t$  é tal que  $Ce^{-\mu t} + \gamma \neq 0$ , i.e.

$$e^{\mu t} \neq \frac{C}{\gamma}.$$

Temos dois casos, dependendo de  $C \geq 0$  ou não. Assim, não esquecendo a solução identicamente nula, temos a seguinte solução geral

- i)  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $x(t) = \frac{\mu}{Ce^{-\mu t} + \gamma}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}, C \geq 0$ ;
- iii)  $x(t) = \frac{\mu}{Ce^{-\mu t} + \gamma}$ , para  $t \neq (1/\mu) \ln(C/\gamma)$  onde  $C \in \mathbb{R}, C < 0$ .

Observe que a outra solução estacionária,  $x \equiv \mu/\gamma$  aparece quando escolhemos  $C = 0$ . As soluções globais que estão entre as duas soluções estacionárias são as soluções com  $C > 0$ . E as outras soluções que explodem em tempo finito correspondem a  $C < 0$ , sendo que as que estão acima da solução estacionária  $x \equiv \mu/\gamma$  estão definidas no intervalo  $t > (1/\mu) \ln(C/\gamma)$ , enquanto que as que estão abaixo da solução estacionária  $x \equiv 0$  estão definidas no intervalo  $t < (1/\mu) \ln(C/\gamma)$ .

**4.5. Outro exemplo de equação linear.** Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1}y = (x+1)^2.$$

Temos

$$e^{-\int_0^x \frac{1}{\xi+1} d\xi} = e^{-\ln|x+1|} = \frac{1}{|x+1|}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dx} \left( y \frac{1}{|x+1|} \right) = \frac{1}{|x+1|} (x+1)^2 = |x+1|.$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \frac{y}{|x+1|} &= C_1 + \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x, & x > -1 \\ -\frac{x^2}{2} - x, & x < -1 \end{cases} \\ &= C_1 + \frac{x+1}{|x+1|} \frac{x}{2} (x+2) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral pode ser escrita na forma

$$y(x) = C_1|x+1| + \frac{x}{2}(x+1)(x+2).$$

Observe que as soluções estão definidas para todo  $x$ , inclusive  $x = -1$ . No caso em que  $x = -1$ , temos necessariamente que  $y(-1) = 0$ . Não há solução com  $y(-1) \neq 0$ .

### Exercícios

**4.1.** Em cada item abaixo, indique se a equação é separável, homogênea, exata, linear, ou nenhum desses tipos.

- (a)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , (b)  $\frac{dy}{dx} = \mu xy - x^2$ , (c)  $y - x^4 + \frac{dy}{dx} = 0$ ,  
 (d)  $\frac{dy}{dx} = y^2 e^x$ , (e)  $\frac{dx}{dt} = x\sqrt{t} + \sin t$ , (f)  $(t^2 + 2xt)\frac{dx}{dt} = t^2 - 2tx - x^2$ ,  
 (g)  $\frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{t^2 - x^2}$ , (h)  $\frac{dx}{dt} = x^3 \sin t$ , (i)  $\frac{du}{dt} = -\lambda \sin(t)u + \kappa \cos(t)$ ,  
 (j)  $(r + \theta)\frac{dr}{d\theta} = r\theta$ , (k)  $\frac{dT}{dx} = \frac{xT + x^2}{T^2}$ , (l)  $\frac{dS}{dp} = pS^2 + p^2S$ .

**4.2.** Utilize o fator de integração  $I(x, y) = x$  para resolver a equação

$$3xy + 2 \sin y + (x^2 + x \cos y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

**4.3.** Determine para qual valor inteiro  $m$  a função  $x^m$  é um fator de integração para a equação abaixo e encontre a solução geral da equação:

$$4x + 3y + x \frac{dy}{dx} = 0.$$

Observe que essa equação também pode ser escrita na forma de uma equação homogênea (veja Exercício 2.5).

4.4. Considere a equação

$$4xy + 3y^3 + (2x^2 + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

(a) Ache números inteiros positivos  $m$  e  $n$  tais que  $I(x, y) = x^m y^n$  seja um fator de integração dessa equação.

(b) Ache uma fórmula algébrica implícita para as soluções da equação.

4.5. Ache o inteiro  $p$  tal que  $I(x, y) = x^p$  seja um fator de integração para a equação

$$5x + 4y + 5xy^2 + (x + 2x^2y) \frac{dy}{dx} = 0$$

e ache uma relação algébrica implícita para a solução geral dessa equação.

4.6. Determine o valor real do parâmetro  $a$  tal que  $x$  seja um fator de integração para a seguinte equação:

$$2y^2 + axy + (2xy + x^2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

4.7. Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} + kx = t,$$

onde  $k > 0$ . (a) Ache a solução geral; (b) ache a solução particular com  $x(0) = x_0$ ; e (c) em função de  $x_0$  e  $k$ , ache o valor mínimo assumido por  $x(t)$  em  $t \geq 0$ .

4.8. Resolva a equação linear

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = (x+1)^2,$$

em  $x > -1$ .

4.9. Resolva as equações lineares

$$(a) \frac{dy}{dx} + 3y = 27x^2, \quad (b) \frac{dy}{dx} - 2y = 5 \cos x, \quad (c) \frac{dy}{dx} + (x+1)y = 2x+2.$$

4.10. Considere a equação  $\frac{dy}{dt} + 2ty = 4t$ .

(a) Ache a solução geral dessa equação.

(b) Para uma solução qualquer  $y(t)$ , qual o limite de  $y(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ ?

4.11. Se a temperatura  $T_r$  de um meio varia periodicamente, segundo a hora do dia, conforme  $T_r(t) = T_s + \Delta T \cos(\omega t)$ , onde  $T_s, \Delta T, \omega > 0$ , ache a temperatura  $T = T(t)$  de um objeto colocado nesse meio, com uma temperatura inicial  $T(0) = T_0$ , que é dada pela equação

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa(T - T_r(t)).$$

onde  $\kappa > 0$  é o coeficiente de difusão térmica. (Use integração por partes duas vezes para eliminar o sinal de integral do termo envolvendo o cosseno.)

**4.12.** Em um processo químico, estamos interessados em produzir uma substância  $Y$ , a partir de uma matéria prima  $X$ , considerando que a substância  $Y$  também se degrada, mais lentamente, em um resíduo  $Z$ . As reações químicas envolvidas são dadas por  $X \xrightarrow{\kappa_1} Y \xrightarrow{\kappa_2} Z$ , com  $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$ , cujas equações para as respectivas concentrações  $x, y$  e  $z$  dessas substâncias são  $x' = -\kappa_1 x$ ,  $y' = \kappa_1 x - \kappa_2 y$ ,  $z' = \kappa_2 y$ . Inicialmente, temos apenas uma concentração  $x(0) = x_0 > 0$  para a substância  $X$ , com  $y(0) = z(0) = 0$ .

- Mostre que  $x(t) + y(t) + z(t)$  é constante em relação a  $t$ .
- Resolva as equações para achar  $x(t), y(t)$  e  $z(t)$ , para  $t \in \mathbb{R}$ .
- Mostre que, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos  $x(t), y(t) \rightarrow 0$  e  $z(t) \rightarrow x_0$ .
- Ache o instante de tempo  $T$  que maximiza a produção de  $Y$  e mostre que esse instante é positivo.
- O fator de utilização do processo é a razão  $u(t) = y(t)/x_0$ . Mostre que a utilização máxima independe da concentração inicial  $x_0$  e depende apenas da razão  $\kappa_2/\kappa_1$ , sendo igual a

$$\max_{t \geq 0} u(t) = \frac{1}{1 - (\kappa_2/\kappa_1)} \left( \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{1/((\kappa_2/\kappa_1)-1)} - \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{1/(1-(\kappa_2/\kappa_1))} \right).$$

**4.13.** Se  $P(x)$  é uma primitiva de uma função  $p(x)$ , mostre que  $ye^{2P(x)}$  é um fator de integração para a equação (c.f. Exercício 4.19)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \frac{q(x)}{y}$$

**4.14.** A concentração  $S(t)$ , em cada instante  $t$ , de uma substância tóxica em uma certa baía é dada pela equação

$$\frac{dS}{dt} + \lambda(t)S = f(t),$$

onde  $\lambda(t)$  representa a taxa específica de vazão da substância e  $f(t)$ , a taxa relacionada ao despejo da substância na baía. Suponha que  $\lambda(t) = \lambda_0$ ,  $f(t) = f_0 + f_1 \cos(\omega t)$  e  $S(0) = S_0$ , com parâmetros positivos  $\lambda_0, f_0, f_1, \omega > 0$ , e uma concentração inicial também positiva  $S_0 > 0$ .

- Ache a concentração  $S(t)$  explicitamente em termos desses parâmetros e da concentração inicial (use integração por partes duas vezes para eliminar o sinal de integral do termo envolvendo o cosseno);
- Dado um valor limite tolerável  $S^+ > 0$  para a concentração da substância tóxica, ache uma relação entre  $\lambda_0, f_0, f_1$  e  $S^+$  para que a concentração  $S(t)$  se mantenha, eventualmente, em valores abaixo do tolerável, ou seja, tal que  $S(t) < S^+$  para  $t$  suficientemente grande (verifique e use que o máximo de uma função na forma  $h(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$  é  $h(t^*) = 2ab/(a^2 + b^2)$ , em  $t^* = (1/\omega) \arctan(a/b)$ ).

(c) Se no instante  $t = 0$ , devido a um vazamento ocorrido, a concentração chegou a um valor  $S(0) = S_0$  muito maior do que o tolerável,  $S^+$ , e assumindo que a relação para  $S^+$  obtida no item anterior seja válida, estime o tempo necessário  $T$  para que a concentração volte a limites toleráveis, isto é, ache  $T$  tal que  $S(t) \leq S^+$ , para todo  $t \geq T$ .

**4.15.** A concentração de coliformes fecais em uma praia é medida em quantidade de coliformes por cada 100ml de água, em média. Uma modelagem para a variação de coliformes é dada como no exemplo anterior:

$$\frac{dS}{dt} + \lambda(t)S = f(t),$$

onde  $S(t)$  representa a concentração de coliformes,  $\lambda(t)$ , a taxa específica de vazão dos coliformes e  $f(t)$ , a taxa relacionada ao despejo de coliformes na praia. Considere a unidade de tempo como sendo de um dia e assumamos que  $\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos(\omega_1 t)$  e  $f(t) = f_0 + f_1 \cos(\mu_1 t)$ . Suponha que  $\lambda_0 = 0.3$ ,  $\lambda_1 = 0.3$ ,  $\omega_1 = 2\pi$ ,  $f_0 = 120$ ,  $f_1 = 60$  e  $\mu_1 = 2\pi$  (a unidade física de  $f_0$  e  $f_1$  é de concentração por dia, e a de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\omega_1$  e  $\mu_1$  é de  $\text{dia}^{-1}$ ). Suponha que em um certo instante, há um acidente e a concentração de coliformes chega a 5 mil por 100ml, no momento em que o acidente é controlado. A partir desse momento, que podemos considerar como  $t_0 = 0$ , temos a condição  $S(t_0) = 5.000$  e o sistema passa a ser regido de acordo com os parâmetros determinados acima. Com a ajuda de uma ferramenta computacional, como Scilab, determine quantos dias levam para que a concentração volte a ficar abaixo do nível tolerado de 800 coliformes por cada 100ml.

**4.16.** Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = g(x)y + h(x)y^2,$$

conhecida como equação de Riccati homogênea. Mostre que a mudança de variável dependente  $z(x) = 1/y(x)$  transforma essa equação em uma equação linear

$$\frac{dz}{dx} + g(x)z = -h(x).$$

**4.17.** Considere a equação logística

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2,$$

que é um caso particular de equação de Riccati. Resolva essa equação usando o método de resolução descrito acima.

**4.18.** Considere uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)y^\theta,$$

chamada de equação de Bernoulli, onde  $\theta \in \mathbb{R}$ , com  $\theta \neq 0, 1$ . Mostre que a mudança de variável dependente  $z = y^{1-\theta}$  transforma essa equação na equação de primeira

ordem

$$\frac{dz}{dx} + (1 - \theta)g(x)z = (1 - \theta)h(x).$$

- 4.19. Mostre que a mudança de variável dependente  $z = y^2$  transforma uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} = ay + \frac{b}{y},$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ , em uma equação linear de primeira ordem (que é, também, separável). Ache, ainda, a solução particular do problema com  $a = b = 1/2$  e condição inicial  $y(0) = y_0 > 0$ , indicando o intervalo de existência da solução.

- 4.20. Ache a solução geral da seguinte equação de Bernoulli usando o método descrito acima, onde  $\alpha, \beta \neq 0$ .

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x^{2/3} - \beta x.$$

- 4.21. O ar é composto em grande parte por nitrogênio (cerca de 79%), que é um gás inerte (última camada de elétrons completa) e não interage quimicamente com o corpo humano. No entanto, ele pode causar sérios problemas a mergulhadores autônomos, através da formação de bolhas nos tecidos e articulações, causada por um excesso de nitrogênio absorvido durante o mergulho. Para evitar este problema, conhecido como doença descompressiva, tabelas de descompressão ou computadores portáteis devem ser utilizados.

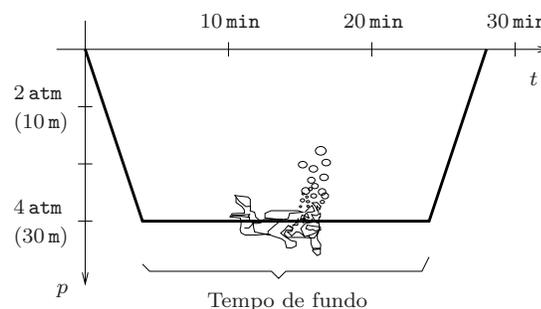


FIGURA 4.1. Mergulhadores e um perfil de mergulho.

Um gás é composto de vários elementos e a pressão parcial de cada elemento é uma fração da pressão total do gás, de acordo com a fração deste elemento na composição total do mesmo. Por exemplo, ao nível do mar, o ar tem uma pressão de uma atmosfera. Como o nitrogênio compõe 79% do ar, a pressão parcial do nitrogênio ao nível do mar é de 0,79 atmosferas.

Durante um mergulho, a pressão ambiente  $p_a$  aumenta a uma razão de uma atmosfera a cada 10 metros. A pressão parcial do nitrogênio no ar respirado (a partir de um cilindro com ar comprimido e trazido à pressão ambiente por um aparelho chamado regulador) é, portanto,  $0,79p_a$ . Mas a pressão parcial do nitrogênio no corpo não se torna imediatamente igual a esse valor. Ele aumenta a uma taxa

proporcional à diferença entre essa pressão e a pressão parcial do gás respirado, ou seja

$$\frac{dp_n}{dt} = \lambda(\theta p_a - p_n),$$

onde  $\theta = 0.79$  e  $\lambda$  é um parâmetro determinado empiricamente. O parâmetro  $\lambda$  é normalmente dado implicitamente pelo “tempo-médio” de absorção  $\tau = \ln 2/\lambda$ , similar ao conceito de meia-vida de um elemento radioativo.

Durante um mergulho, a pressão ambiente é uma determinada função do tempo, dada de acordo com a profundidade em que o mergulhador se encontra. Conhecendo essa função  $p_a(t)$ , podemos resolver a equação diferencial acima e encontrar a pressão parcial  $p_n(t)$  do nitrogênio nos tecidos, em cada instante de tempo. A condição inicial é  $p_n(0) = 0,79 \text{ atm}$ , assumindo um mergulho a partir do nível do mar (mergulhos em lagos e cavernas em altitudes devem compensar a diferença de pressão).

A fisiologia completa envolvida na doença descompressiva não é completamente entendida, existindo vários modelos para tentar determinar um perfil de descompressão seguro. Muitos desses modelos são baseados essencialmente no modelo de Bühlmann-Haldane-Workman-Schreiner, no qual a doença descompressiva pode ser evitada (ou seus sintomas reduzidos) se a pressão parcial do nitrogênio no corpo,  $p_n$ , for mantida menor do que uma certa quantidade máxima tolerada  $p_M$ , dependente da pressão ambiente  $p_a$ , que varia com a profundidade do mergulho. Essa condição tem a forma

$$p_n \leq p_M \stackrel{\text{def}}{=} M p_a + a,$$

onde  $M$  e  $a$  são parâmetros determinados empiricamente. Se essa condição for violada, pode existir uma quantidade significativa de microbolhas de nitrogênio de um certo diâmetro crítico que vão crescer e se agregar, formando bolhas de tamanho suficiente para causar desde um certo desconforto até dores insuportáveis e morte.

Mais precisamente, o corpo humano é formado por vias aéreas, fluidos e diversos tipos de tecido e cada parte absorve nitrogênio a uma certa razão. Por isso, é necessário considerar vários conjuntos de parâmetros  $\lambda$ ,  $M$  e  $a$ , correspondendo a diferentes “compartimentos” do corpo, sendo o pior caso o limitador para a doença descompressiva. O conjunto de valores mais utilizado é o dado pela tabela ZH-L<sub>16</sub> de Bühlmann, que considera 16 compartimentos. Além disso, um certo fator de segurança é acrescentado, diminuindo o valor de  $M$  em cada caso. Sem contar correções devidas a variações na pressão parcial do nitrogênio causada pela umidade existente nas vias aéreas, pelo fato de que nem todo o ar dos alvéolos é substituído em cada respiração, e outros fatores. Mas para simplificar, vamos considerar apenas os valores no compartimento dois do modelo em questão, que são  $\tau = 8 \text{ min}$ , correspondendo a  $\lambda = 0,087 \text{ min}^{-1}$ , além de  $M = 1,5$  e  $a = 1 \text{ atm}$ .

Com a ajuda de uma calculadora ou de um computador, resolva as seguintes questões.

- (a) Um mergulhador desce a uma velocidade constante durante três minutos, até alcançar 30 metros de profundidade, correspondendo a uma pressão ambiente de quatro atmosferas. Em seguida, o mergulhador permanece a 30 metros durante 25 minutos, para em seguida subir até a superfície em 3 minutos, a uma velocidade constante. O perfil desse mergulho está ilustrado na figura 4.1. A pressão ambiente (em atmosferas) como função do tempo (em minutos) para esse perfil pode ser escrita na forma

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 + t, & 0 \leq t \leq 3, \\ 4, & 3 \leq t \leq 28, \\ 32 - t, & 28 \leq t \leq 31 \end{cases}$$

Encontre a pressão parcial do nitrogênio ao final do mergulho,  $p_n(31)$ .

- (b) Verifique se  $p_n(31)$  é maior ou menor que o valor máximo  $p_M(31) = Mp_a(31) + a = M + a$  ao final do mergulho, para identificar a possibilidade de doença descompressiva.
- (c) Calcule o tempo máximo de permanência a 30 metros de profundidade que evite a doença descompressiva. Para isso, você deve escrever uma nova função  $p_a(t)$  com um tempo indeterminado  $T$  aos 30 metros, depois encontrar a pressão parcial  $p_n(T + 6)$  ao final de mergulho, como função do tempo de fundo  $T$ , em seguida estimar o valor máximo de  $T$  para que a condição que evita a doença descompressiva não seja violada.

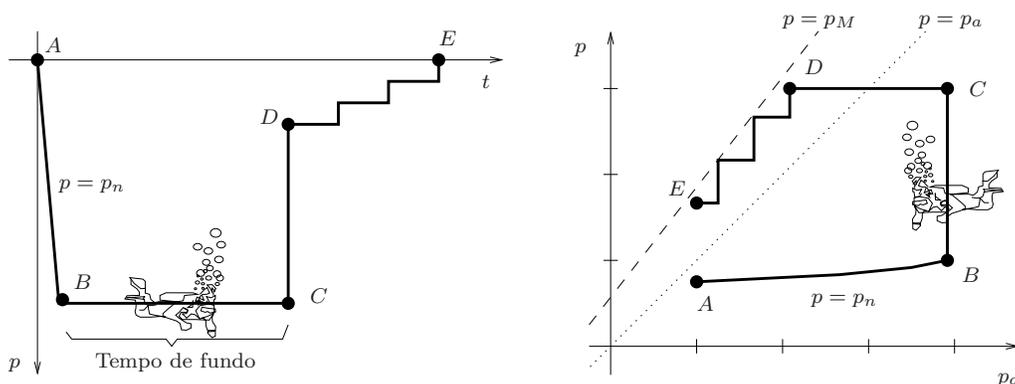


FIGURA 4.2. Perfis de descompressão: (a)  $p_a(t)$  em função do tempo  $t$  (linha sólida) e (b)  $p_n(t)$  em função de  $p_a(t)$  (linha sólida). O ponto A indica o início do mergulho, B, o início do tempo de fundo, C, o final do tempo de fundo, D, a primeira parada de descompressão, e E, o retorno à superfície. Em (b), a linha pontilhada indica o valor da pressão ambiente e a linha tracejada indica o limite máximo  $p = p_M$ , como função de  $p_a$ , para evitar a doença descompressiva. As paradas de descompressão são em múltiplos de três metros, no caso, três paradas a nove, seis e três metros, respectivamente. Após o final do mergulho, a pressão parcial do mergulho voltará à pressão usual de 0,79 atmosferas.

- (d) Uma vez ultrapassado o limite de tempo de fundo para a doença descompressiva, um plano de descompressão para evitá-la, baseado no modelo acima, determina que o mergulhador deve ascender até uma profundidade que seja um múltiplo de três metros e que seja a menor possível para evitar a doença; permanecer nessa profundidade (eliminando nitrogênio) por tempo suficiente para que a próxima profundidade mínima seja três metros acima; ascender até essa nova profundidade mínima; e repetir esse processo até que a superfície seja alcançada. Para simplificar, assume-se neste processo que a mudança de profundidade é instantânea, seguindo um perfil conforme ilustrado na figura 4.2. Supondo que o tempo de fundo do mergulho do item (c) tenha sido o dobro do tempo máximo  $T$ , calcule o plano de descompressão conforme acabamos de descrever.

Para diminuir os tempos de descompressão, é comum alterar a composição do gás respirado, diminuindo a concentração do nitrogênio, em misturas *nitrox* e, para mergulhos mais profundos, incluindo hélio, em misturas *trimix*, e até mesmo trabalhar com diferentes misturas em diferentes momentos de um mesmo mergulho.

## Equações de Segunda Ordem - Soluções Explícitas

Neste capítulo, vamos considerar certas equações de segunda ordem da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Primeiramente, vamos considerar casos particulares que podem ser reduzidos a equações de primeira ordem. A ideia principal é que se o lado direito não depende explicitamente da variável  $x$ , apenas de  $t$  e  $dx/dt$ , então consideramos  $v = dx/dt$  como uma nova variável dependente e buscamos uma equação diferencial em  $dv/dt = f(t, v)$ . Outra situação é quando o lado direito não depende explicitamente da variável  $t$ , apenas de  $x$  e  $v = dx/dt$ . Nesse caso, buscamos uma equação em  $dv/dx = (dv/dt)(dt/dx) = f(x, v)/v$ .

Em seguida, veremos como resolver equações de segunda ordem lineares com coeficientes constantes, mesmo que o lado direito dependa de  $t, x$  e  $dx/dt$ .

### 1. Redução de ordem e aplicações

Algumas equações de segunda ordem, como a de um corpo em queda livre com amortecimento e a da corda suspensa em repouso, podem ser reduzidas a equações de primeira ordem, através da introdução de novas variáveis dependentes e independentes.

#### 1.1. Redução de ordem - corpo em queda livre com amortecimento linear.

Levando em consideração uma resistência do ar proporcional à velocidade, temos, para a altitude  $h = h(t)$  de um objeto em queda livre, a equação

$$m \frac{d^2h}{dt^2} = -mg - \alpha \frac{dh}{dt}.$$

Introduzindo a variável

$$v = \frac{dh}{dt},$$

obtemos a equação de primeira ordem

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \alpha v,$$

que é separável. Fazendo  $k = \alpha/m$ , temos

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv.$$

Separando as variáveis, temos

$$\frac{dv}{g + kv} = -dt.$$

Integrando, obtemos

$$\frac{1}{k} \ln |g + kv| = C - t.$$

Logo,

$$|g + kv| = e^{kC} e^{-kt}.$$

Omitindo o módulo,

$$g + kv = \pm e^{kC} e^{-kt}.$$

Resolvendo para  $v$  e usando que  $k = \alpha/m$ ,

$$v(t) = -\frac{g}{k} \pm \frac{e^{kC}}{k} e^{-kt}.$$

Substituindo  $\pm e^{kC}/k$  por uma nova constante  $C_2$  diferente de zero e lembrando que  $k = \alpha/m$ , obtemos

$$v(t) = -\frac{gm}{\alpha} + C_2 e^{-\alpha t/m}.$$

A solução estacionária  $v = -gm/\alpha$  pode ser incluída permitindo  $C_2$  igual a zero.

Uma outra maneira, mais fácil, de resolver a equação de primeira ordem para  $v$  é observando que ela é uma equação linear não-homogênea. De fato, fazendo novamente  $k = \alpha/m$ , temos

$$\frac{dv}{dt} + kv = -g.$$

Multiplicando essa equação pelo fator de integração  $e^{kt}$ , temos

$$\frac{d}{dt} (ve^{kt}) = \left( \frac{dv}{dt} + kv \right) e^{kt} = -ge^{kt}.$$

Integrando, obtemos

$$v(t)e^{kt} = C_2 - \frac{g}{k} e^{kt}.$$

Logo,

$$v(t) = C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Como  $v = dh/dt$ , podemos escrever

$$\frac{dh}{dt} = C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Para obtermos  $h = h(t)$ , basta integrarmos mais uma vez, obtendo a solução geral da equação do corpo em queda livre com resistência linear:

$$h(t) = C_1 - \frac{C_2}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k} t,$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes reais arbitrárias. Isso nos dá a família de todas as soluções possíveis.

**1.2. Corda suspensa em repouso - modelo levando em conta variações verticais no cálculo do peso.** Neste modelo, a posição da corda é dada pelo gráfico de uma função  $y = y(x)$ , satisfazendo a equação

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Introduzindo a variável

$$p = \frac{dy}{dx},$$

temos

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

de modo que a equação da corda suspensa pode escrita na forma

$$\frac{dp}{dx} = \lambda \sqrt{1 + p^2},$$

que é uma equação separável.

Por separação de variáveis, temos que resolver a equação

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \lambda dx.$$

O lado esquerdo pode ser integrado via a substituição trigonométrica  $p = \sinh \theta$ . Temos

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\cosh \theta d\theta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \theta}} = \frac{\cosh \theta d\theta}{\cosh \theta} = d\theta$$

Assim, temos que resolver a equação

$$d\theta = \lambda dx,$$

cuja solução é

$$\theta = \lambda x + C_1.$$

Voltando para a variável  $p = \sinh \theta$ , temos

$$p(x) = \sinh(\lambda x + C_1).$$

Como  $p = dy/dx$ , temos

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} \cosh(\lambda x + C_1) + C_2,$$

para reais arbitrários  $C_1$  e  $C_2$ .

No caso em que os extremos da corda estão na mesma altura, temos a condição de contorno

$$y(-\ell/2) = y(\ell/2),$$

onde  $\ell$  é o comprimento da corda. Nesse caso, devemos ter

$$\frac{1}{\lambda} \cosh\left(\frac{\lambda\ell}{2} + C_1\right) + C_2 = \frac{1}{\lambda} \cosh\left(-\frac{\lambda\ell}{2} + C_1\right) + C_2.$$

Eliminando  $C_2$  e  $\lambda$ , obtemos a condição

$$\cosh\left(\frac{\lambda\ell}{2} + C_1\right) = \cosh\left(-\frac{\lambda\ell}{2} + C_1\right).$$

Como o gráfico de  $\cosh x$  é parecido com o de uma parábola, ou seja, é simétrico em relação à origem, é decrescente no eixo negativo e crescente no eixo positivo, só podemos ter duas soluções para a condição acima:

$$\frac{\lambda\ell}{2} + C_1 = -\frac{\lambda\ell}{2} + C_1 \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda\ell}{2} + C_1 = \frac{\lambda\ell}{2} - C_1.$$

No primeiro caso, obtemos  $\lambda\ell = 0$ , o que não é possível, pois estamos assumindo  $\lambda, \ell > 0$ . Então resta a segunda opção, que nos dá  $C_1 = 0$ . Assim, a solução com a condição de contorno  $y(-\ell/2) = y(\ell/2)$  é

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} \cosh(\lambda x) + C_2.$$

Observe que só consideramos uma condição de contorno, em uma equação de segunda ordem, o que nos deixou uma constante arbitrária  $C_2$ . Essa condição reflete uma translação vertical da corda. Se fixarmos uma altura para os extremos da corda, teremos um valor específico de  $C_2$ . Independente disso, a solução tem o formato de uma *catenária*, que é dada pelo gráfico de  $\cosh(\lambda x)$ .

**1.3. Redução de ordem - caso geral de mudança de variável dependente.** Sempre que a equação for da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, \frac{dx}{dt}\right),$$

podemos considerar uma nova incógnita definida por

$$v = \frac{dx}{dt}$$

e obter a seguinte equação de primeira ordem em  $v$ :

$$\frac{dv}{dt} = f(t, v).$$

Se  $f = f(t, v)$  for separável, poderemos resolver para  $v = v(t)$  e, em seguida, integrar em relação a  $t$  para acharmos  $x = x(t)$ .

Observe que neste processo fazemos uma mudança na variável dependente, de  $x$  para  $v$ .

**1.4. Redução de ordem com mudança de variável independente.** Considere uma equação de segunda ordem da forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right),$$

que não depende explicitamente da variável independente  $x$ . Introduzindo a incógnita

$$p = \frac{dy}{dx},$$

podemos escrever

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p),$$

que não é uma equação diferencial ordinária em  $p$ , pois temos uma dependência em  $y$  no lado direito. Isso pode ser resolvido considerando  $y$  como a variável independente e usando que

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{p} f(y, p).$$

Assim, temos a equação de primeira ordem

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} f(y, p).$$

Se, além disso, a função  $f$  for separável, i.e. da forma

$$f(y, p) = g(y)h(p),$$

então obtemos uma equação separável

$$\frac{dp}{dy} = g(y) \frac{h(p)}{p},$$

que pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis.

Observe que neste processo mudamos tanto a variável dependente, de  $y$  para  $p$ , como a variável independente, de  $x$  para  $y$ . Assim, procuramos obter uma solução da forma  $p = p(y)$ . Isso não nos dá a solução explícita, na forma  $y = y(x)$ , mas pode conter informações úteis, como no exemplo a seguir. Além disso, uma vez conhecida a solução  $p = p(y)$  e em casos em que a expressão para  $p = p(y)$  seja razoavelmente simples, podemos obter a solução explícita  $y = y(x)$  através da equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = p(y),$$

Observe que, nesse momento,  $p$  não é mais uma incógnita, é uma função explícita de  $y$ , obtida na resolução da equação anterior. Assim, a equação acima é, de fato, uma equação de primeira ordem, com variável independente  $x$  e variável dependente  $y$ .

**1.5. Exemplo: modelo para o lançamento de um projétil.** A magnitude da força de atração gravitacional entre dois corpos é

$$F = G \frac{mM}{r^2},$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $m$  e  $M$  são as massas dos dois corpos e  $r$  é a distância entre os seus centros de massa.

Desprezando a atração que o projétil exerce sobre a terra e considerando  $h = h(t)$  a altitude do projétil em relação à superfície da terra, temos, pela lei de Newton,

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -G \frac{mM}{(R + h)^2},$$

onde  $R$  é o raio da terra. Usando que para  $r = R$  temos  $F = mg$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade na superfície da Terra, temos  $g = GM/R^2$ , logo, podemos escrever

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(R+h)^2}.$$

Reduzindo a ordem, tomando  $v = dh/dt$ , obtemos

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{(R+h)^2}.$$

Considerando  $v$  em função de  $h$ , temos

$$\frac{dv}{dh} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dh} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{v(R+h)^2},$$

que é separável. Logo,

$$v \, dv = -\frac{gR^2 \, dh}{(R+h)^2},$$

que nos dá  $v = v(h)$  implicitamente em função de  $h$ :

$$v^2 = \frac{2gR^2}{R+h} + C.$$

Observe que ao multiplicarmos essa equação por  $m/2$  obtemos a equação de conservação de energia total:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mgR^2}{R+h} = C.$$

A constante  $C$  é independente de  $t$ , mas depende de cada solução. Assumindo que o projétil seja lançado com velocidade  $v_0$  a partir do solo, temos que  $v = v_0$  quando  $h = 0$ , logo, para a solução correspondente,

$$C = v_0^2 - 2gR.$$

Temos, assim, a solução particular da equação para  $v$  em função de  $h$ :

$$v^2 = \frac{2gR^2}{R+h} + v_0^2 - 2gR.$$

Esse projétil não cairá de volta para a Terra se a sua velocidade vertical for sempre positiva. Como o primeiro termo acima é sempre positivo, apesar de ser pequeno caso  $h$  seja grande, podemos garantir a positividade de  $v$  tomando

$$v_0 \geq \sqrt{2gR}.$$

Como  $g$  é da ordem de  $9,8\text{m/s}^2$  e  $R$  é da ordem de  $6.378\text{km}$ , temos aproximadamente a velocidade de escape

$$v_0 \gtrsim 11,19\text{km/s}.$$

Na prática, porém, a resistência do ar, a rotação da Terra, a inclinação do foguete no momento do lançamento, a longitude do ponto de lançamento e outros fatores mais sutis devem ser levados em consideração. O projétil também não é lançado com velocidade inicial

positiva. Ele parte com velocidade inicial nula e é impulsionado (acelerado), através de um foguete, perdendo combustível (massa) no caminho.

### Exercícios

- 1.1. Resolva, via mudança de variável dependente, a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t} \frac{dx}{dt}.$$

- 1.2. Ache, via mudança de variáveis dependente e independente, a solução particular da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x \frac{dx}{dt}.$$

com as condições iniciais  $x(0) = 2$  e  $x'(0) = 4$ .

- 1.3. Considere a seguinte equação para a posição  $x(t)$  de um objeto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} = t,$$

onde  $k > 0$ . Ache a solução geral da equação e a solução particular com  $x(0) = x_0$  e  $dx(0)/dt = v_0$ .

- 1.4. Considerando o problema do lançamento de um projétil descrito acima, suponha que o projétil alcance uma velocidade  $v_0$  a uma altitude  $h_0$ . Obtenha uma condição para  $v_0$  em função de  $h_0$  (além de  $g$  e  $R$ ) para que o projétil não retorne à Terra (ou seja, ache a velocidade de escape).

- 1.5. Da relação implícita

$$v^2 = \frac{2gR^2}{R+h} + v_0^2 - 2gR,$$

ache a altura máxima alcançada pelo objeto caso a condição de escape não seja satisfeita.

- 1.6. Ache a solução particular da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{x} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

satisfazendo as condições iniciais  $x(0) = 2$  e  $x'(0) = 6$ .

## 2. Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Uma outra classe de equações de segunda ordem que podem ser resolvidas explicitamente é a de equações lineares com coeficientes constantes. Vamos por parte. Uma equação de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f \left( t, x, \frac{dx}{dt} \right).$$

é dita uma *equação linear* quando o termo  $f(t, x, x')$  é linear nas variáveis  $x$  e  $x'$ :

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = g(t) - c(t)x - b(t)\frac{dx}{dt}.$$

Observe que as coeficientes  $c(t)$  e  $b(t)$  podem depender de  $t$ ; a linearidade é em relação a  $x$ . Os sinais de menos aparecem apenas por convenção. Temos, assim, uma *equação linear de segunda ordem não-homogênea*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x = g(t).$$

Caso  $g(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos uma *equação linear de segunda ordem homogênea*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x = 0.$$

Mesmo essas equações não possuem soluções dadas por uma fórmula geral. Mas um caso particular, de bastante interesse, que pode ser resolvido de maneira geral, é o de coeficientes constantes  $b(t) = b$  e  $c(t) = c$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = g(t).$$

Observe que neste caso não pedimos que o termo não-homogêneo  $g(t)$  seja constante. Temos, assim, uma *equação linear de segunda ordem não-homogênea com coeficientes constantes*.

Finalmente, caso  $g(t) = 0$ , temos uma *equação linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0.$$

São esses dois últimos casos que iremos tratar a seguir. Vale a pena notar que a última equação pode, também, ser reduzida a uma equação de primeira ordem homogênea, via mudança de variáveis dependente e independente. De fato, introduzindo  $p = dx/dt$ , temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p, \\ \frac{dp}{dt} = -cx - bp. \end{cases}$$

e, com isso,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{-cx - bp}{p},$$

que é uma equação de primeira ordem homogênea. Mas a resolução dessa equação não é tão imediata. Veremos, a seguir, uma maneira bem mais fácil e explícita de resolver esse problema.

**2.1. Preliminares.** Vamos considerar uma equação linear de segunda ordem homogênea da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0.$$

A resolução dessa equação passa pela resolução da equação de segundo grau

$$r^2 + br + c = 0,$$

chamada de *equação característica* associada a essa equação linear de segunda ordem. O polinômio em questão é chamado *polinômio característico*. A razão da relevância dessa equação é simples. Digamos que essa equação tenha raízes  $r_1$  e  $r_2$ , de forma que ela pode ser fatorada como

$$r^2 + br + c = (r - r_1)(r - r_2),$$

onde, necessariamente,  $b = -r_1 - r_2$  e  $c = r_1r_2$ . Assim, a equação diferencial pode ser reescrita na forma:

$$x'' + bx' + cx = x'' - (r_1 + r_2)x' + r_1r_2x = x'' - r_1x' - r_2x' - r_2r_1x.$$

Agora podemos prosseguir de duas maneiras. Na primeira, colocamos  $r_2$  em evidência, escrevendo

$$x'' + bx' + cx = (x' - r_1x)' - r_2(x' - r_1x).$$

Na segunda, colocamos  $r_1$  em evidência:

$$x'' + bx' + cx = (x' - r_2x)' - r_1(x' - r_2x).$$

Desta forma, vemos que, se  $x' - r_1x = 0$  ou  $x' - r_2x = 0$ , então  $x$  satisfaz a equação original de segunda ordem. O que fizemos foi, essencialmente, reduzir (ou fatorar) a equação de segunda ordem para duas de primeira ordem. A solução de  $x' - r_1x = 0$  é  $x(t) = C_1e^{r_1t}$ , enquanto que a de  $x' - r_2x = 0$  é  $x(t) = C_2e^{r_2t}$ . Encontramos, assim, duas famílias de soluções da equação de segunda ordem. A solução geral é dada pela combinação linear dessas duas soluções:

$$x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t},$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias. Está é uma família de soluções a dois parâmetros, como era de se esperar para uma equação de segunda ordem.

O fato de que a soma de duas soluções da equação homogênea também é solução da equação homogênea é uma propriedade particular de equações lineares homogêneas. Verifique! Esta propriedade é conhecida como o *princípio da superposição*.

Um outro fato importante é o de que a combinação linear dessas duas soluções é a solução geral, ou seja, elas expressam todas as soluções possíveis, não havendo nenhuma solução de outra forma. Isso será visto em breve. Antes, devemos tomar um certo cuidado em relação às raízes  $r_1$  e  $r_2$ , pois nem sempre elas existem ou são distintas. Nesses casos, as duas soluções fundamentais acima terão outra forma. Vejamos, então, os possíveis casos.

**2.2. Autovalores reais distintos.** Caso a equação característica associada

$$r^2 + br + c = 0$$

possua duas raízes reais distintas  $r_1$  e  $r_2$ , então de fato podemos prosseguir como acima e obter a solução geral

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias.

**2.3. Autovalores reais iguais.** Nesse caso, temos  $r_1 = r_2$  e apenas uma solução da forma exponencial,  $C_1 e^{r_1 t}$ . Mas a equação em questão é de segunda ordem e esperamos uma solução geral com dois parâmetros. Precisamos achar uma solução de outra forma. Para isso, voltemos para a equação característica associada, que nesse caso é

$$r^2 + br + c = (r - r_1)^2 = r^2 - 2r_1 r + r_1^2.$$

Assim,  $b = -2r_1$ ,  $c = r_1^2$  e podemos reescrever a equação diferencial como

$$x'' + bx' + cx = x'' - 2r_1 x' + r_1^2 x = (x' - r_1 x)' - r_1(x' - r_1 x) = 0$$

Seja  $g(t) = x'(t) - r_1 x(t)$ , de maneira que

$$x'' + bx' + cx = 0 \iff g' - r_1 g = 0.$$

A solução é  $g(t) = C_2 e^{r_1 t}$ . Da definição de  $g$ ,

$$x'(t) - r_1 x(t) = C_2 e^{r_1 t}.$$

Essa é uma equação linear de primeira ordem para  $x$ . O que fizemos foi reduzir a equação de segunda ordem para uma família de equações de primeira ordem. Podemos resolver essa equação de primeira ordem multiplicando pelo fator de integração  $e^{-r_1 t}$ :

$$\frac{d}{dt}(x(t)e^{-r_1 t}) = (x' - r_1 x)e^{-r_1 t} = C.$$

Logo,

$$x(t)e^{-r_1 t} = C_1 + C_2 t.$$

Portanto, temos a solução geral

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_1 t},$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são reais arbitrários. Observe que essa expressão já engloba a solução obtida anteriormente, correspondente ao caso  $C_2 = 0$ .

**2.4. Autovalores complexos conjugados.** Caso a equação característica possua duas raízes complexas, elas necessariamente serão conjugadas e, portanto, da forma  $\alpha \pm i\beta$ , onde  $i = \sqrt{-1}$ . É possível trabalhar com equações e soluções complexas, dando uma solução geral da forma

$$x(t) = \gamma_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + \gamma_2 e^{(\alpha-i\beta)t},$$

para todo  $t$  real, onde agora  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são constantes arbitrárias complexas. Mas só estamos interessados em soluções reais. Observe que, sendo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  complexos, temos uma família de soluções a dois parâmetros complexos, o que dá, na verdade, uma família de soluções com quatro parâmetros reais (as partes reais e complexas de cada parâmetro complexo). Na linguagem de Álgebra Linear, isso dá um espaço vetorial real de dimensão quatro. A idéia é procurar um subespaço de dimensão dois formado apenas por soluções reais.

Uma maneira de fazer isso é usando a *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Essa fórmula pode ser obtida por séries:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n \text{ par}} \frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{n \text{ impar}} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m+1}}{(2m+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned}$$

Desta forma, podemos escrever

$$x(t) = \gamma_1 e^{\alpha t} (\cos \theta + i \sin \theta) + \gamma_2 e^{\alpha t} (\cos \theta - i \sin \theta) = (\gamma_1 + \gamma_2) e^{\alpha t} \cos \theta + i(\gamma_1 - \gamma_2) e^{\alpha t} \sin \theta.$$

Como procuramos soluções reais, podemos escolher  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  de forma que  $\gamma_1 + \gamma_2$  seja real e  $\gamma_1 - \gamma_2$  seja imaginário. Para isso, devemos ter  $\text{Im}(\gamma_2) = -\text{Im}(\gamma_1)$  e  $\text{Re}(\gamma_2) = \text{Re}(\gamma_1)$ , ou seja,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são complexos conjugados. Assim, usando que  $\theta = \beta t$ , chegamos à expressão

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são reais arbitrários. Esta é a solução geral da equação em questão no caso de autovalores complexos.

Uma combinação linear de seno e cosseno com a mesma frequência pode ser vista como um único cosseno (ou um único seno) com uma mudança de fase. Veja Exercício 2.7.

**2.5. \*Forma de operadores.** Uma outra forma de ver o papel da equação característica na resolução da equação de segundo grau

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

é considerando o “operador diferencial”

$$D = \frac{d}{dx},$$

o seu “quadrado”

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2},$$

e re-escrevendo a equação na forma

$$(D^2 + bD + cI)x = 0,$$

onde  $I$  é o operador identidade (leva a função  $x = x(t)$  nela mesma). Considerando o polinômio

$$p(r) = r^2 + br + c$$

e substituindo  $r$  por  $D$ , temos o operador

$$p(D) = D^2 + bD + cI.$$

A equação diferencial pode então ser escrita como

$$p(D)x = 0.$$

Agora, se o polinômio admite a fatoração

$$p(r) = (r - r_1)(r - r_2),$$

então o operador  $p(D)$  pode ser escrito como

$$p(D) = (D - r_1I)(D - r_2I).$$

Assim, para resolvermos

$$p(D)x = (D - r_1I)(D - r_2I)x = 0,$$

podemos resolver

$$(D - r_2I)x = y,$$

e

$$(D - r_1I)y = 0.$$

Isso nos leva aos mesmos resultados anteriores, de forma mais elegante, porém mais abstrata.

Para completar, como  $L = p(D) = D^2 + bD + cI$  é um operador linear em  $x$ , vemos que resolver a equação

$$L(x) = 0$$

significa encontrar o núcleo do operador  $L$ . Para sermos mais precisos, devemos definir em que espaço o operador  $L$  age. No problema em questão, podemos considerar  $L$  agindo no espaço  $\mathcal{W} = C^\infty(\mathbb{R})$  das funções reais continuamente diferenciáveis infinitas vezes. É claro que as derivadas de uma função em  $\mathcal{W}$  também pertencem a  $\mathcal{W}$ , de modo que  $L : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ . O conjunto  $\mathcal{N}(L) = \{x \in \mathcal{W}; L(x) = 0\}$  é o núcleo de  $L$ . Por construção, esse núcleo é um subespaço vetorial de  $\mathcal{W}$ . Como vimos em todos os casos acima (raízes reais distintas, iguais ou complexas), esse subespaço é de dimensão dois, ou seja, é combinação linear de duas funções que são linearmente independentes em  $\mathcal{W}$ .

**2.6. Equação do sistema massa-mola amortecido.** Nesse sistema mecânico, um objeto de massa  $m$  é preso a uma extremidade de uma mola, que tem a sua outra extremidade fixa, como mostra a figura 2.1. O sistema é descrito por uma variável  $x$  que indica a distância do objeto à sua posição de repouso. Uma modelagem para a força que atua no objeto é dada pela *lei de Hooke*, que diz que a *força de restauração* no objeto é diretamente proporcional ao deslocamento  $x$  em relação à posição de repouso. Assim,  $F = -kx$ , para um coeficiente de restauração  $k > 0$ , onde o sinal indica que a força é contrária ao deslocamento. Pela lei de Newton, obtemos a equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

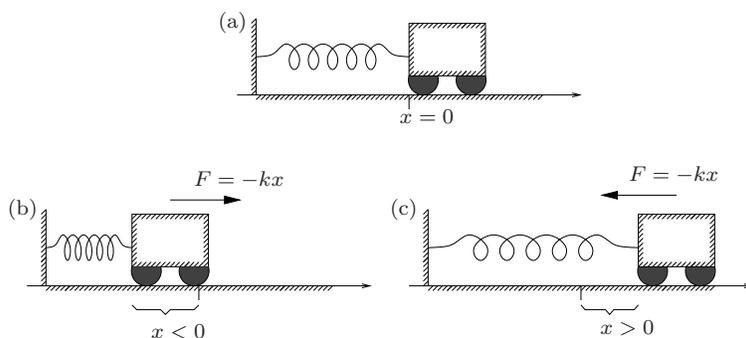


FIGURA 2.1. Sistema massa-mola: (a) na posição de equilíbrio, (b) com a mola contraída e (c) com a mola estendida.

No caso de considerarmos a resistência do ar, a força deve ser adicionada de um termo dependente da velocidade  $dx/dt$ , por exemplo  $-\alpha dx/dt$ , para um coeficiente de resistência  $\alpha > 0$ . Nesse caso, obtemos a equação do *sistema massa-mola amortecido*:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt}.$$

Esta é uma equação do segundo grau linear homogênea com coeficientes constantes. A equação característica associada é

$$mr^2 + \alpha r + k = 0,$$

cujas raízes são

$$r_{\pm} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4mk}}{2m}.$$

Observe que o tipo de raiz depende dos parâmetros, podendo ser reais distintas, se  $\alpha^2 > 4mk$ , reais iguais, se  $\alpha^2 = 4mk$  e complexas, se  $\alpha^2 < 4mk$ . Vejamos cada caso a seguir, incluindo ainda o caso sem amortecimento, quando  $\alpha = 0$ .

Caso superamortecido ( $\alpha^2 > 4mk$ ): Nesse caso, temos duas raízes reais distintas  $r_{\pm}$ . Observe que  $0 < \alpha^2 - 4mk < \alpha^2$ , logo  $\sqrt{\alpha^2 - 4mk} < \alpha$  e ambas as raízes são negativas,

$r_- < r_+ < 0$ . A solução geral tem a forma

$$x(t) = C_1 e^{r_- t} + C_2 e^{r_+ t}.$$

Como  $r_{\pm} < 0$ , as soluções decrescem exponencialmente para a posição de equilíbrio, como era de se esperar. Dependendo das constantes  $C_1$  e  $C_2$ , a função  $x(t)$  pode não trocar de sinal, decrescendo diretamente para a posição de equilíbrio, ou trocar de sinal apenas uma vez, tendo um único ponto crítico. Nesse caso o sistema não oscila, porque o coeficiente de amortecimento é relativamente muito forte, ou, por outra, o coeficiente de restauração é relativamente muito fraco.

Caso criticamente amortecido ( $\alpha^2 = 4mk$ ): Nesse caso, temos duas raízes iguais  $r_{\pm} = -\alpha/2m$ . A solução geral é

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-(\alpha/2m)t}.$$

Estudando essa função, vemos que, caso  $C_2 = 0$ , a solução decresce exponencialmente para a posição de equilíbrio  $x = 0$ , sem oscilar, ou seja, sem  $x(t)$  trocar de sinal. Caso,  $C_2 \neq 0$ , a função  $x(t)$  se anula em  $t = -C_1/C_2$  e tem um único ponto crítico  $t = (\alpha C_1 - C_2)/C_2$ . Nesse caso, a variável  $x(t)$  troca de sinal apenas uma vez. Isso significa que, dependendo das constantes  $C_1$  e  $C_2$  (ou seja, dependendo das condições iniciais), o sistema pode oscilar ou não, mas ele pode oscilar no máximo uma vez. Como no caso anterior, o amortecimento ainda é relativamente forte, não permitindo várias oscilações da mola.

Caso subamortecido ( $0 < \alpha^2 < 4mk$ ): Nesse caso, as raízes são complexas,  $r_{\pm} = -\alpha/2m \pm i\beta$ , onde  $\beta = \sqrt{4mk - \alpha^2}$ . A solução geral é

$$x(t) = e^{-(\alpha/2m)t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

Nesse caso, o sistema oscila indefinidamente, mas com amplitude decrescendo exponencialmente.

Caso não-amortecido ( $0 = \alpha^2 < 4mk$ ): Por último, vamos analisar o caso sem amortecimento. As raízes são complexos puros:  $\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{k/m}$ . A solução geral é

$$x(t) = C_1 \cos \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) + C_2 \sin \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right).$$

As soluções oscilam indefinidamente, sem diminuir a amplitude, como era de se esperar sem a presença de amortecimento.

**2.7. Circuitos RLC.** Um outro exemplo clássico gerando equações lineares de segunda ordem é o de circuitos RLC. São circuitos elétricos envolvendo resistências, indutores e capacitores, além de baterias e geradores. Circuitos elétricos são caminhos fechados pelos quais cargas elétricas fluem de acordo com diferenças de potenciais elétricos. O fluxo dessas cargas gera uma *corrente* elétrica, denotada por  $j$ , que mede a quantidade de carga elétrica que atravessa uma seção transversal do circuito por unidade de tempo. A convenção é de que o sentido positivo da corrente indica o fluxo de cargas positivas, de maneira que os elétrons se deslocam no sentido oposto ao da corrente.

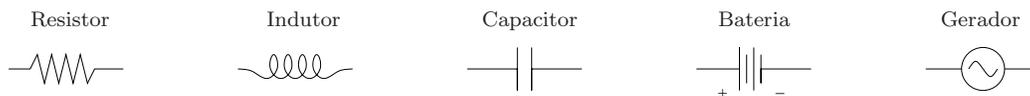


FIGURA 2.2. Representação típica de alguns dispositivos usados em circuitos elétricos.

Em um circuito elétrico, a carga de elétrons pode encontrar/atravessar vários dispositivos, como resistências, indutores e capacitores. Cada dispositivo altera a corrente de uma certa forma, de modo que os dispositivos podem ser arranjados de acordo com certos propósitos. Além desses dispositivos, temos baterias e geradores, que são fontes de diferenças de potenciais elétricos, medidos em volts, e também chamados de potenciais de voltagem. Baterias geram correntes contínuas e são determinadas pela sua diferença de potencial de voltagem  $V = -E_0$ . O sinal de menos é devido à convenção adotada no sentido da corrente, que é medida em ampéres. Geradores geram correntes alternadas, podendo gerar, por exemplo, uma diferença de potencial  $V = -E(t) = -E_0 \cos(\omega t - \alpha)$ . A figura 2.2 ilustra a representação típica desses dispositivos em um circuito elétrico. Cada dispositivo possui duas extremidades, por onde as cargas fluem de ou para outras partes do circuito. Os circuitos elétricos também podem ter várias bifurcações, formando, na verdade, uma rede de caminhos. A figura 2.3 apresenta alguns exemplos de circuitos.

Em uma resistência, a diferença de potencial  $V$  entre as suas extremidades é dada pela *Lei de Ohm*:

$$V = jR,$$

onde  $j$  é a corrente através da resistência (assumida uniforme) e  $R$  é um coeficiente positivo chamado de *resistência*). A resistência depende do material empregado e a sua unidade de medida é o ohm.

Em um indutor, a diferença de potencial  $V$  entre as suas extremidades é dada pela *lei de Henry*:

$$V = L \frac{dj}{dt}.$$

onde  $L$  é um coeficiente positivo chamado de *indutância*. A indutância é medida em henrys.

Em um capacitor, a voltagem varia com a quantidade de carga acumulada de tal forma que diferença de potencial  $V$  entre as suas extremidade é dada pela relação

$$C \frac{dV}{dt} = j,$$

onde  $C$  é uma constante positiva chamada de *capacitância*. A capacitância é medida em farads.

Em cada trecho do circuito, temos uma corrente e uma diferença de potencial elétrico. As correntes e os potenciais elétricos em diferentes trechos satisfazem certas leis. A *lei de voltagem de Kirchhoff* diz que em um caminho fechado do circuito a soma das diferenças de potencial ao longo do caminho é zero. Enquanto que a *lei de correntes de Kirchhoff* diz que a soma das correntes chegando em um ponto do circuito é igual à soma das correntes saindo desse ponto.

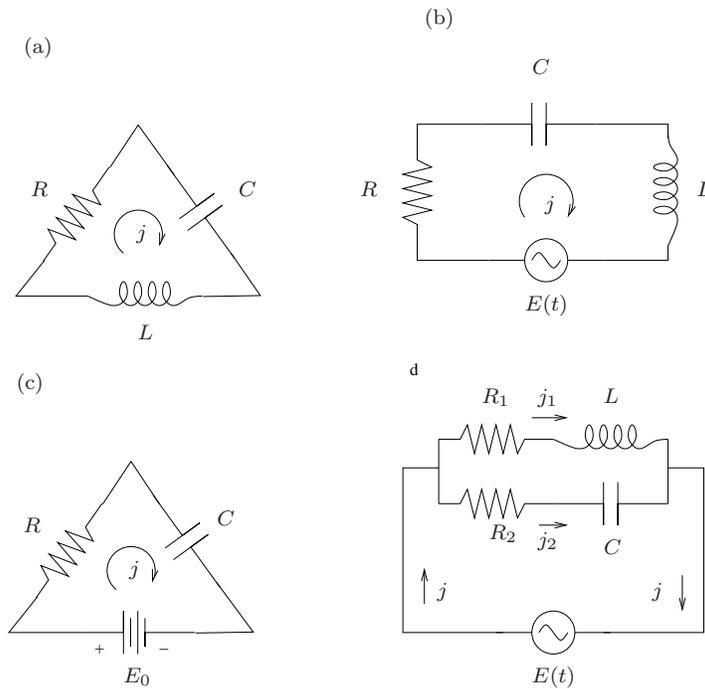


FIGURA 2.3. Alguns exemplos de circuitos elétricos: (a) circuito RLC puro, (b) circuito RLC com uma fonte de corrente alternada, (c) circuito RC com uma fonte de corrente contínua, e (d) circuito RLC com indutor e capacitor em paralelo e com uma fonte de corrente alternada.

Considere, por exemplo, o circuito do exemplo da figura 2.3(a). Em cada dispositivo, passa uma corrente, mas como o circuito é simples (não é paralelo), segue pela lei de correntes de Kirchhoff que a corrente deve ser igual em todos os pontos. Denote ela por  $j$ . Por outro lado, se  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$  indicam as diferenças de potencial através de cada um dos dispositivos, então a lei de voltagem de Kirchhoff diz que a soma total delas deve ser zero:

$$V_R + V_L + V_C = 0.$$

As leis para cada dispositivo dão

$$V_R = jR, \quad V_L = L \frac{dj}{dt}, \quad C \frac{dV_C}{dt} = j.$$

Logo,

$$jR + L \frac{dj}{dt} + V_C = 0$$

Nessa equação temos duas incógnitas,  $j$  e  $V_C$ . Mas elas estão relacionadas por

$$C \frac{dV_C}{dt} = j.$$

Derivando essa relação, encontramos

$$C \frac{d^2 V_C}{dt^2} = \frac{dj}{dt}.$$

Substituindo os termos envolvendo a corrente na equação obtida com a lei das voltagens temos

$$RC \frac{dV_C}{dt} + LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + V_C = 0.$$

Fazendo  $V = V_C$ , chegamos à equação de segunda ordem

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V = 0.$$

Essa equação pode ser resolvida exatamente como a equação do sistema massa-mola amortecido.

É comum, também, escrever uma equação de segunda ordem para a corrente  $j$ . Isso pode ser feito derivando-se a equação obtida com a lei de voltagens. A equação obtida é praticamente a mesma, apenas com  $V$  substituído por  $j$ .

No caso do circuito da figura 2.3(b), continuamos com apenas uma corrente  $j$ , mas agora temos que incluir a voltagem  $V_E = -E(t) = -E_0 \cos(\omega t - \alpha)$  do gerador, que modifica a lei de voltagens para

$$V_R + V_L + V_C = E.$$

Refazendo a derivação acima, vemos que a única modificação é a inclusão da fonte no lado direito da equação:

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V = E(t).$$

Esta é uma equação não-homogênea.

No circuito da figura 2.3(c), sem a presença do indutor, a equação obtida é na verdade de primeira ordem. Verifique.

No circuito da figura 2.3(d), temos agora três correntes, relacionadas pela lei de Kirchhoff para correntes através de

$$j_1 + j_2 = j.$$

A lei de voltagens se aplicada em cada caminho fechado, ou seja, temos as duas leis

$$V_{R_1} + V_L = E(t), \quad V_{R_2} + V_C = E(t).$$

Nos dispositivo, temos

$$V_{R_1} = j_1 R_1, \quad V_{R_2} = j_2 R_2, \quad V_L = L \frac{dj_1}{dt}, \quad C \frac{dV_C}{dt} = j_2.$$

Esse problema pode ser reduzido a duas equações de primeira ordem, uma para  $V_C$  outra para  $j_1$ . De fato, da primeira relação entre as voltagens,

$$E(t) = V_{R_1} + V_L = j_1 R_1 + L \frac{dj_1}{dt}.$$

que é uma equação de primeira ordem em  $j_1$ . Da segunda relação entre as voltagens,

$$E(t) = V_{R_2} + V_C = j_2 R_2 + V_C = C R_2 \frac{dV_C}{dt} + V_C,$$

que é uma equação de primeira ordem em  $V_C$ . As duas equações são desacopladas e podem ser resolvidas separadamente.

Outros circuitos em paralelo podem resultar em sistemas envolvendo equações de segunda ou primeira ordem, dependendo de cada caminho apresentar tanto indutores como capacitores ou apenas um deles. Caminhos apresentando apenas resistências geram apenas equações algébricas. O número de equações depende do número de circuitos em paralelo.

### Exercícios

- 2.1.** Verifique o princípio da superposição: suponha que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sejam soluções da equação linear de segunda ordem homogênea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x = 0$$

e mostre que  $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$  também é solução dessa equação, para quaisquer constantes  $C_1, C_2$  reais.

- 2.2.** Ache a solução geral das seguintes equações lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes:

(a)  $x'' - 7x' + 12x = 0$ ; (b)  $x'' - 2x' + 10x = 0$ ; (c)  $x'' + 2x' + x = 0$ ;  
 (d)  $x'' - 4x' + 29x = 0$ ; (e)  $x'' - 4x' + 4x = 0$ ; (f)  $x'' - x' - 2x = 0$ ;  
 (g)  $x'' + 16x = 0$ ; (h)  $x'' - 4x = 0$ ; (i)  $x'' + x = 0$ .

- 2.3.** Ache as soluções particulares das equações seguintes correspondentes às condições iniciais ou de contorno dadas.

(a)  $x'' - 7x' + 12x = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 6$ ;  
 (b)  $x'' + 4x = 0$ ,  $x(0) = 2$ ,  $x'(0) = 6$ ;  
 (c)  $x'' - 2x + x = 0$ ,  $x(0) = 2$ ,  $x'(0) = 1$ ;  
 (d)  $x'' + 4x = 0$ ,  $x(0) = 2$ ,  $x(\pi/4) = 6$ .

- 2.4.** Considere a equação homogênea

$$x'' + 3x' + 2x = 0.$$

Sabendo que  $x(t)$  é solução dessa equação com condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = x_1 > 0$ , ache o instante  $t_{\max}$  em que o máximo de  $x(t)$  é alcançado. Esse ponto de máximo depende de  $x_1$ ? E com  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ , tente achar o máximo em função de  $x_0$  e  $x_1$ , exibindo condições para que esse máximo exista e condições extras para que ele seja positivo.

**2.5.** Considere a equação homogênea

$$x'' + 2x' + 2x = 0.$$

Sabendo que  $x(t)$  é solução dessa equação com condições iniciais  $x(0) = 1$  e  $x'(0) = \alpha \geq 0$ , ache o instante  $t = t(\alpha)$  em que o máximo de  $x(t)$  em  $t \geq 0$  é alcançado.

**2.6.** Ache a solução geral da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 8x = 0,$$

a solução particular satisfazendo  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 8$  e o valor máximo alcançado por essa solução particular em  $t \geq 0$ .

**2.7.** Dados  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  com as propriedades  $-1 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$  e  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$ , mostre que existe  $\phi \in [0, 2\pi)$  tal que  $\cos \phi = \gamma_1$  e  $\sin \phi = -\gamma_2$ . Em seguida, mostre que, se  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  com  $C_1^2 + C_2^2 > 0$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ , então existe  $\phi \in [0, 2\pi)$  tal que

$$C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\phi + \beta t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, deduza que a solução geral de uma equação de segunda ordem com autovalores complexos conjugados  $\alpha \pm i\beta$  pode ser escrita na forma

$$x(t) = Ce^{\alpha t} \cos(\phi + \beta t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  e  $\phi \in [0, 2\pi)$  são arbitrários. O termo  $\phi$  é chamado de *fase* do sinal  $x(t)$ .

**2.8.** Considere a equação  $mx'' = -kx - \alpha x'$  do sistema massa-mola amortecido no caso em que  $\alpha^2 > 4mk$ , onde  $m$  é a massa do objeto,  $k$  é o coeficiente de restauração e  $\alpha$  é o coeficiente de amortecimento. Mostre que se o objeto for “largado” em uma posição inicial diferente da de equilíbrio (ou seja, posição inicial  $x(0) \neq 0$  e velocidade inicial  $x'(0) = 0$ ), então o sistema não oscila, ou seja  $x(t)$  não troca de sinal.

**2.9.** Em um sistema massa-mola amortecido, quanto maior o amortecimento mais rápido o sistema se aproxima do equilíbrio, certo? Errado! Isso é verdade enquanto o sistema está no regime subamortecido, mas quando o sistema entra no regime superamortecido, o que necessariamente acontece ao se aumentar demais o atrito, então quanto maior o atrito, mais devagar o sistema se aproxima do equilíbrio. Analise as soluções do sistema massa-mola amortecido e justifique essas afirmativas.

**2.10.** O método de resolução via equação característica associada se aplica a equações lineares homogêneas com coeficientes constantes de qualquer ordem. A solução geral da equação de ordem  $n$

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0,$$

por exemplo, passa por achar as raízes da equação característica associada

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Baseado nisso, ache a solução geral da equação do quarto grau

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 4\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0.$$

### 3. Equações lineares não-homogêneas com coeficientes constantes

Vimos, acima, como resolver uma certa classe de equações de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes. Vamos considerar, agora, o caso não-homogêneo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = g(t).$$

O termo  $g(t)$  pode representar alguma influência externa sazonal no sistema, como a radiação solar, que varia conforme o dia e a hora, ou um campo magnético, ou alguma ação mecânica. Veremos, primeiro, como resolver algumas situações abstratas. Em seguida, aplicaremos as idéias desenvolvidas para estudar um exemplo clássico de ressonância em sistemas mecânicos.

**3.1. Solução particular e superposição de soluções.** A idéia da resolução da equação não-homogênea passa pelo princípio de superposição para equações homogêneas. Considere a equação não-homogênea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = g(t)$$

e suponha que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sejam duas soluções dessa equação. Defina  $x_h(t) = x_2(t) - x_1(t)$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_h}{dt^2} + b\frac{dx_h}{dt} + cx_h &= \frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} + b\frac{d(x_2 - x_1)}{dt} + c(x_2 - x_1) \\ &= \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{dx_2}{dt} - b\frac{dx_1}{dt} + cx_2 - cx_1 = g(t) - g(t) = 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que a diferença  $y(t)$  entre duas soluções da equação não-homogênea satisfaz a equação homogênea

$$\frac{d^2x_h}{dt^2} + b\frac{dx_h}{dt} + cx_h = 0.$$

Agora, podemos reescrever a relação  $x_h(t) = x_2(t) - x_1(t)$  na forma

$$x_2(t) = x_h(t) + x_1(t).$$

Já vimos como achar a solução geral da equação homogênea. A relação acima nos diz, então, que para acharmos todas as soluções da equação não-homogênea basta acharmos apenas uma solução, digamos  $x_1(t)$ , e somar a ela a solução geral da equação homogênea, dando todas as possíveis soluções da não-homogênea.

Uma notação tradicional é chamar de  $x_p(t)$  uma solução particular da equação não-homogênea, de forma que a solução geral da equação não-homogênea pode ser escrita como

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

onde  $x_h(t)$  é a solução geral da equação homogênea associada.

Mas isso não resolve de todo o problema, pois ainda não sabemos como achar a solução particular. A idéia acima diz que basta acharmos uma para termos todas, mas ainda precisamos de um método para acharmos pelo menos uma.

A idéia para acharmos uma solução particular é procurar a solução de uma forma apropriada, dependendo do tipo do termo não-homogêneo. Por exemplo, se o termo não-homogêneo for uma exponencial, vamos procurar uma solução particular da forma exponencial. Se ele for uma combinação de senos e cossenos, vamos procurar uma solução particular também como combinação de senos e cossenos. Se ele for um polinômio, procuramos um outro polinômio como solução particular. E assim por diante. Mas isso não é tão arbitrário assim. Por exemplo, se o termo não-homogêneo for apenas um seno, não teríamos sucesso garantido procurando uma solução da forma de seno. A razão por trás disso é que o “espaço de senos” não é invariante por derivação, a derivada de um seno é um cosseno. O mais garantido é procurar uma solução como combinação de senos e cossenos, que é invariante por derivação. Da mesma forma, o espaço de polinômios e o espaço de exponenciais também são invariantes por derivação. Vamos resolver essas situações caso a caso.

**3.2. Termo não-homogêneo exponencial.** Vamos considerar o problema

$$x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}.$$

Como  $g(t) = 2e^{3t}$  é do tipo exponencial, vamos procurar uma solução também da forma exponencial:

$$x_p(t) = Ae^{3t}.$$

Nesta busca, mantivemos o coeficiente 3 na potência, pois esta potência não será alterada ao derivarmos essa função. Já o termo  $A$  será determinado pela equação. A idéia é determinar  $A$  para o qual  $x_p(t)$  é solução da equação não-homogênea. Para isso, vamos substituir  $x$  por  $x_p$  no lado direito da equação, o que nos dá

$$x_p'' - 3x_p' + 2x_p = 9Ae^{3t} - 9Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = 2Ae^{3t}.$$

Observe que o resultado é uma exponencial, apenas com um coeficiente multiplicativo diferente. Agora igualamos esse resultado ao lado direito da equação:

$$x_p'' - 3x_p' + 2x_p = 2Ae^{3t} = 2e^{3t}.$$

Desta forma, vemos que  $x_p$  é solução da equação não-homogênea no caso em que  $A = 1$ . Portanto,

$$x_p(t) = e^{3t}$$

é solução particular da equação não-homogênea.

Para escrevermos a solução geral, devemos resolver o problema homogêneo. A equação característica é  $r^2 - 3r + 2$ , que tem como raízes  $r_1 = 1$  e  $r_2 = 2$ . Logo, a solução geral da equação homogênea é

$$x_h(t) = C_1e^t + C_2e^{2t}.$$

Então a solução geral da equação não-homogênea é

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + e^{3t},$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são parâmetros reais arbitrários.

Vejamos, agora, o exemplo

$$x'' - 3x' + 2x = 2e^{2t}.$$

A diferença em relação ao exemplo anterior está no termo não-homogêneo  $g(t) = 2e^{2t}$ . Mas observe que teremos agora um problema ao procurarmos a solução particular da forma  $x_1(t) = Ae^{2t}$ . Isto porque esta função já é solução da equação homogênea, de modo que, para qualquer valor de  $A$ ,

$$x_1'' - 3x_1' + 2x_1 = 0,$$

e não teríamos como achar  $A$  cuja o lado direito da equação fosse igual a  $g(t) = 2e^{2t}$ . A solução para isso é semelhante à solução dada no caso de raízes duplas: procurar uma solução particular da forma

$$x_p(t) = Ate^{2t}.$$

Substituindo essa expressão no lado esquerdo da equação obtemos

$$x_p'' - 3x_p' + 2x_p = (4A(1+t) - 3A(1+2t) + 2At)e^{2t} = Ae^{2t}.$$

Tomando  $A = 2$ , temos que

$$x_p(t) = 2te^{2t}$$

é solução particular da equação não-homogênea. A solução geral é

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2te^{2t}.$$

Finalmente, caso a equação homogênea tenha duas raízes iguais para o seu polinômio característico e o termo  $g(t)$  coincida com a solução da equação homogênea então será necessário aumentar o grau do polinômio na solução particular. Mais precisamente, se a equação for, por exemplo

$$x'' - 4x' + 4x = 2e^{2t},$$

cuja equação característica tem raiz dupla  $r_1 = r_2 = 2$ , então tanto  $Ae^{2t}$  como  $Ate^{2t}$  são soluções da equação homogênea e não poderão ser soluções da equação não-homogênea. Assim, procuramos uma solução particular da forma

$$x_p(t) = At^2 e^{2t}.$$

Substituindo isso no lado esquerdo da equação, obtemos

$$x_p'' - 4x_p' + 4x_p = ((2A + 8At + 4At^2) - 4(2At + 2At^2) + 4(At^2))e^{2t} = 2Ae^{2t}.$$

Escolhendo  $A = 1$ , achamos a solução particular

$$x_p(t) = t^2 e^{2t}.$$

A solução geral é

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + t^2 e^{2t}.$$

Vale ressaltar que a escolha da potência de  $t$  na solução particular não é arbitrária como parece. Se procurássemos uma solução da forma  $At^2 e^{2t}$  para uma equação que não possui raiz

dupla teríamos problemas pois ao calcularmos o lado esquerdo da equação em  $x_p$  os termos envolvendo  $t^2$  não iriam se cancelar. Da mesma forma, não iríamos encontrar uma solução da forma  $Ate^{2t}$  para uma equação cujo termo  $e^{2t}$  não fosse solução da equação homogênea.

Podemos resumir o método da seguinte forma. Suponha que a equação não-homogênea seja

$$x'' + bx' + cx = Ae^{\lambda t}.$$

Se  $\lambda$  não for solução da equação característica  $r^2 + br + c = 0$ , então podemos procurar uma solução particular da forma

$$x_p(t) = Ae^{\lambda t}.$$

A constante  $A$  será dada em função dos parâmetros dados  $b, c, A, \lambda$ . A solução geral será dada somando-se à solução particular a solução geral da equação homogênea, que pode envolver raízes reais distintas, reais iguais ou complexas.

Se  $\lambda$  for solução da equação característica e a equação característica possuir duas soluções reais distintas, então podemos procurar uma solução particular da forma

$$x_p(t) = Ate^{\lambda t}.$$

Finalmente, se  $\lambda$  for uma raiz dupla da equação característica, então a solução particular será buscada da forma

$$x_p(t) = At^2e^{\lambda t}.$$

**3.3. Termo não-homogêneo polinomial.** No caso da equação com termo não-homogêneo polinomial, ou seja,

$$x'' + bx' + cx = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0,$$

vamos buscar uma solução particular também na forma polinomial:

$$x_p(t) = A_m t^m + \dots + A_1 t + A_0.$$

Caso  $c \neq 0$ , então podemos tomar  $m = n$ , pois  $x_p'' + bx_p' + cx_p$  será também um polinômio de grau  $n$ , de modo que chegaremos a um sistema de equações lineares para os coeficientes  $A_0, A_1, \dots, A_n$ .

Caso  $c = 0$  e  $b = 0$ , então a solução será obtida via integração direta.

Caso  $c = 0$  e  $b \neq 0$ , a equação poderá ser reduzida a uma equação de primeira ordem. Uma outra maneira é tomar  $m = n + 1$  para  $x_p$ , pois  $x_p'' + bx_p'$  será um polinômio de grau  $n$  e poderemos resolver o sistema para  $A_0, A_1, \dots, A_{n+1}$ .

Vamos ver dois exemplos. Primeiro, considere a equação

$$x'' - 3x' + 2x = 7 - 6t + 4t^2.$$

Nesse caso, procuramos uma solução particular da forma

$$x_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0.$$

Substituindo no lado esquerdo da equação, obtemos

$$x_p'' - 3x_p' + 2x_p = 2A_2 - 3(2A_2 t + A_1) + 2(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = 2A_2 t^2 + (2A_1 - 6A_2)t + 2A_2 - 3A_1 + 2A_0.$$

Igualando, coeficiente a coeficiente, ao termo não-homogêneo  $7 - 6t + 4t^2$ , obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2A_0 - 3A_1 + 2A_2 = 7, \\ 2A_1 - 6A_2 = -6, \\ 2A_2 = 4. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, achamos  $A_0 = 6$ ,  $A_1 = 3$  e  $A_2 = 2$ . Logo, a solução particular é

$$x_p(t) = 2t^2 + 3t + 6.$$

A solução geral é

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2t^2 + 3t + 6.$$

Agora, considere a equação

$$x'' - 3x' = -18t.$$

Como não há termo de ordem zero no lado esquerdo da equação, vamos buscar uma solução da forma

$$x_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0.$$

Temos

$$x_p'' - 3x_p' = 2A_2 - 3(2A_2 t + A_1) = -6A_2 t + 2A_2 - 3A_1.$$

Igualando a  $-18t$ , obtemos  $A_2 = 3$ ,  $A_1 = 2$ . O valor de  $A_0$  é arbitrário pois esta é, na verdade, uma função constante, solução da equação homogênea (raízes  $r_1 = 0$  e  $r_2 = 3$  da equação característica). Assim, a solução geral tem a forma

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{3t} + 3t^2 + 2t.$$

### 3.4. Termo não-homogêneo solenoidal. Caso a equação seja da forma

$$x'' + bx' + cx = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t,$$

vamos procurar uma solução particular de uma das duas formas

$$x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \text{e} \quad x_p(t) = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t.$$

A escolha depende das raízes do polinômio característico. Caso as raízes sejam exatamente  $r_{\pm} = \pm i\omega$ , então  $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$  já são soluções da equação homogênea e, nesse caso, procuramos uma solução particular da forma

$$x_p(t) = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t.$$

Caso  $\pm i\omega$  não sejam raízes do polinômio característico, então podemos procurar uma solução particular da forma

$$x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Vejamos o caso

$$x'' - 8x' + 20x = 32 \cos 2t.$$

A equação característica tem raízes  $r_{\pm} = 4 \pm 2i$ . Logo, o lado direito não é solução da equação homogênea e podemos procurar uma solução particular da forma

$$x_p(t) = A \cos 2t + B \sin 2t.$$

Substituindo no lado esquerdo da equação, obtemos

$$\begin{aligned} x_p'' - 8x_p' + 20x_p &= (-4A \cos 2t - 4B \sin 2t) - 8(-2A \sin 2t + 2B \cos 2t) + 20(A \cos 2t + B \sin 2t) \\ &= (16A - 16B) \cos 2t + (16A + 16B) \sin 2t. \end{aligned}$$

Igualando ao lado direito, obtemos  $A = 1$ ,  $B = -1$ , logo a solução particular é

$$x_p(t) = \cos 2t - \sin 2t.$$

Observe que o termo não-homogêneo contém apenas o cosseno, mas a solução particular exige também o seno.

A solução geral é

$$x(t) = e^{4t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + \cos 2t - \sin 2t.$$

Vamos, agora, considerar a equação

$$x'' + 4x = 32 \cos 2t.$$

A equação característica tem raízes complexas  $r_{\pm} = \pm 2i$ , logo  $g(t) = 32 \cos 2t$  já é solução da equação homogênea. Nesse caso, devemos buscar uma solução particular da forma

$$x_p(t) = At \cos 2t + Bt \sin 2t.$$

Para essa função,

$$\begin{aligned} x_p'' + 4x_p &= -4A \sin 2t - 4At \cos 2t + 4B \cos 2t - 4Bt \sin 2t + 4(At \cos 2t + Bt \sin 2t) \\ &= -4A \sin 2t + 4B \cos 2t. \end{aligned}$$

Igualando essa expressão ao termo não-homogêneo  $g(t) = 32 \cos 2t$ , obtemos  $A = 0$  e  $B = 8$ . Logo, a solução particular é

$$x_p(t) = 8t \sin 2t.$$

A solução geral toma a forma

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 8t \sin 2t.$$

**3.5. Combinação dos termos não-homogêneos anteriores.** A mesma idéia pode ser aplicada a combinações dos termos não-homogêneos anteriores. As combinações podem ser tanto lineares como multiplicativas, ou seja, somas ou produtos dos termos anteriores. Isso porque tanto combinações lineares como multiplicativas desses termos são invariantes por derivação. Assim, na equação não-homogênea

$$x'' + bx' + cx = g(t),$$

o termo  $g(t)$  pode ser um produto

$$g(t) = h_1(t)h_2(t)h_3(t),$$

onde  $h_1(t)$  é um polinômio de grau  $n$ ,  $h_2(t)$  é uma exponencial e  $h_3(t)$  é uma combinação linear de seno e cosseno, ou seja

$$h_1(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0, \quad h_2(t) = de^{\lambda t}, \quad h_3(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Nesse caso, a solução particular será buscada da mesma forma, ou seja

$$x_p(t) = y_1(t)y_2(t)y_3(t),$$

onde  $y_1(t)$  é um polinômio de grau  $m$ ,  $y_2(t)$  é uma exponencial com o mesmo expoente que  $h_2(t)$  e  $y_3(t)$  é uma combinação linear de seno e cosseno com a mesma frequência que  $h_3(t)$ . Aqui, novamente, o grau  $m$  do polinômio  $y_1(t)$  depende da solução da equação homogênea. Mais precisamente, se  $\lambda \pm \omega i$  for raiz da equação característica, então  $m = n + 1$ , caso contrário,  $m = n$ .

No caso de uma combinação linear

$$g(t) = g_1(t) + \cdots + g_l(t),$$

onde cada  $g_i$  é da forma acima, basta procurar uma solução da forma

$$x(t) = x_1(t) + \cdots + x_l(t),$$

com cada  $x_i(t)$  da forma correspondente associada a  $g_i(t)$ . Por exemplo,

$$x_1(t) = 3te^t \cos(2t)$$

é solução da equação

$$x'' - x' + x = (3 - 9t)e^t \cos 2t - (12 + 6t)e^t \sin 2t,$$

enquanto que

$$x_2(t) = t^2$$

é solução da equação

$$x'' - x' + x = 2 - 2t + t^2.$$

Assim, a soma

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3te^t \cos(2t) + t^2$$

é solução da equação

$$x'' - x' + x = (3 - 9t)e^t \cos 2t - (12 + 6t)e^t \sin 2t + t^2.$$

**3.6. \*Forma de operadores.** Uma outra forma de enxergar a ideia do método usado acima para encontrar soluções particulares da equação homogênea é através da forma de operadores diferenciais. Considerando o operador diferencial

$$D = \frac{d}{dx},$$

agindo no espaço vetorial  $\mathcal{W} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , podemos escrever

$$p(D) = a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx,$$

onde  $p(r) = ar^2 + br + c$  é o polinômio característico da equação.

A equação não-homogênea

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = g(t)$$

pode, então, ser escrita como

$$p(D)x = g$$

As funções  $g$  consideradas acima têm a propriedade de pertencerem a um subespaço  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{W}$  de baixa dimensão e que é invariante por  $D$ . Por exemplo, o espaço de senos e cossenos com um determinada frequência dada  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \neq 0$ ,

$$\mathcal{S}_\omega = \{A \cos \omega t + B \sin \omega t; A, B \in \mathbb{R}\},$$

é invariante por derivações e tem dimensão 2. O espaço de exponenciais

$$\mathcal{E}_\lambda = \{Ae^{\lambda t}; A \in \mathbb{R}\},$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$  dado, é invariante e tem dimensão 1. O espaço de polinômios de grau até  $n$ ,

$$\mathcal{P}_n = \{A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots, A_1 t + A_0; A_0, \dots, A_n \in \mathbb{R}\},$$

é invariante e tem dimensão  $n+1$ . Assim, a ideia é buscar uma solução particular no mesmo espaço  $\mathcal{V}$  do termo não-homogêneo  $g$ .

Na verdade, isso funciona quando  $p(D)\mathcal{V} = \mathcal{V}$ . Isso só é verdade quando a interseção entre  $\mathcal{V}$  e o núcleo de  $L$  é apenas a função nula, i.e.  $\mathcal{N}(L) \cap \mathcal{V} = \{0\}$ . Na prática, nos exemplos acima, isso só acontece quando  $g \notin \mathcal{N}(L)$ , i.e. quando  $g$  não é solução da equação homogênea.

Quando  $g \neq 0$  é solução da equação homogênea, então,  $L\mathcal{V}$  é um subespaço próprio de  $\mathcal{V}$  e, em geral,  $g \notin L\mathcal{V}$  e não é possível achar uma solução particular da mesma forma que  $g$ . Nesses casos, procuramos ampliar a busca para um subespaço  $\tilde{\mathcal{V}}$  com  $L\tilde{\mathcal{V}} \supset \mathcal{V}$ . Isso é feito considerando  $\tilde{\mathcal{V}} = t\mathcal{V}$  (caso complexo ou de raízes distintas) ou  $\tilde{\mathcal{V}} = t^2\mathcal{V}$  (caso de raiz dupla).

Não precisamos considerar  $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} + t\mathcal{V}$  porque  $L\mathcal{V} = \{0\}$  e, nesse caso,  $L\tilde{\mathcal{V}} = L\mathcal{V} + L(t\mathcal{V}) = L(t\mathcal{V})$ . Então só temos mais trabalho incluindo constantes que não serão necessárias. O sistema correspondente terá essas constantes indeterminadas.

Além disso, ao escolhermos  $x_p = ty \in t\mathcal{V}$ , com  $y \in \mathcal{V}$  e calcularmos  $L(x_p) = L(ty)$ , os termos que aparecem multiplicando  $t$  vão sempre se anular, como aconteceu nos exemplos tratados acima. Isso pode ser visto no Exercício 3.3

**3.7. Aplicação: ressonância no sistema massa-mola.** Vamos considerar o sistema massa-mola no caso sem amortecimento, mas assumindo agora que o extremo esquerdo da mola não está mais fixo. Vamos supor que temos a liberdade de variar a posição do extremo esquerdo da mola, de acordo com alguma função dada  $h(t)$ , por exemplo,  $h(t) = h_0 \sin(\omega t)$ . Dessa forma, a origem do eixo  $x = 0$  não está no extremo direito da mola, onde a mola prende o bloco de massa  $m$ , mas sim em algum ponto mais à esquerda, tomado como referência. O extremo direito da mola está a uma distância  $x$  desse ponto de referência, de modo que o comprimento da mola é  $x - h$  (veja figura 3.1).

Denotando o comprimento de equilíbrio da mola por  $l$ , temos que o deslocamento da mola em relação à posição de equilíbrio é  $d = x - h - l$ . Portanto a força de restauração tem a forma  $F = -kd = -k(x - h - l)$ . Como a aceleração do objeto é  $d^2x/dt^2$ , temos pela Lei

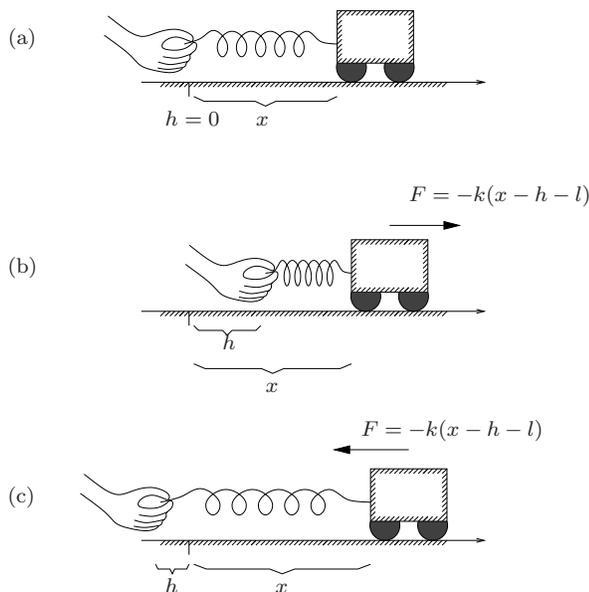


FIGURA 3.1. Sistema massa-mola com extremo variável: (a) na posição de equilíbrio ( $x - h = l$ ), (b) com a mola contraída ( $x - h < l$ ), e (c) com a mola estendida ( $x - h > l$ ), onde  $l$  é o comprimento de equilíbrio da mola.

de Newton que o sistema satisfaz a equação diferencial

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - h - l).$$

Este sistema é da forma linear

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = g(t),$$

onde  $g(t) = k(h(t) + l)$ . No caso em que  $h(t) = h_0 \sin(\omega t)$ , temos a equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = kh_0 \sin(\omega t) + lk.$$

O polinômio característico da parte homogênea tem raízes  $r_{\pm} = \pm i\sqrt{k/m}$  e a solução geral da equação homogênea associada é

$$x_h(t) = C_1 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + C_2 \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

O termo não-homogêneo é composto de duas partes, a parte constante  $-lk$  e a parte seoidal  $kh_0 \sin(\omega t)$ . É fácil verificar que

$$x_1(t) = l$$

é solução da equação correspondente com a parte constante:

$$mx_1'' + kx_1 = lk.$$

Este termo representa simplesmente a translação do ponto de referência do ponto de equilíbrio para o extremo esquerdo da mola (quando  $h(t) = 0$ ).

Para resolver a equação com a parte solenoidal,

$$mx_2'' + kx_2 = kh_0 \sin \omega t,$$

devemos tomar cuidado com a possibilidade da frequência de oscilação forçada  $\omega$  coincidir com a frequência natural de oscilação do sistema massa-mola, que é  $\sqrt{k/m}$ . Este caso é o que gera ressonância, no qual a amplitude de oscilação cresce indefinidamente (pelo menos teoricamente, pois na prática a mola pode se quebrar ou uma modelagem mais precisa passa a ser necessária, pois a mola não pode ter comprimento negativo).

Caso não-ressonante:  $\omega^2 \neq k/m$ . Neste caso, procuramos uma solução particular da forma solenoidal

$$x_2(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Temos

$$mx_2'' + kx_2 = (k - m\omega^2)A \cos \omega t + (k - m\omega^2)B \sin \omega t.$$

Para que o lado direito seja igual a  $kh_0 \sin \omega t$ , devemos ter

$$A = 0, \quad B = \frac{kh_0}{k - m\omega^2}.$$

Logo, uma solução particular dessa parte é

$$x_2(t) = \frac{kh_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t.$$

Dessa forma, a solução geral do problema é

$$x(t) = x_h(t) + x_1(t) + x_2(t) = C_1 \cos \left( t\sqrt{\frac{k}{m}} \right) + C_2 \sin \left( t\sqrt{\frac{k}{m}} \right) + l + \frac{kh_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t.$$

A solução é uma superposição de duas frequências.

A solução é limitada. Porém, a oscilação pode ter uma amplitude bastante alta, caso o sistema se aproxime da situação ressonante, ou seja, caso  $\omega^2 \approx k/m$ , pois nesse caso o termo  $B$  achado acima será relativamente grande. A figura 3.2 mostra o gráfico da solução em quatro casos distintos, ilustrando a superposição das duas frequências e a aproximação da situação de ressonância.

Caso ressonante:  $\omega^2 = k/m$ . Nesse caso, observe que não podemos prosseguir como feito acima. Vimos isso em outros exemplos, e nesse caso teríamos o denominador do termo  $B$  se anulando.

Uma solução particular da equação com termo não-homogêneo solenoidal pode ser buscada da forma

$$x_2(t) = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t.$$

Temos,

$$mx_2'' + kx_2 = -(Am\omega^2 t - 2Bm\omega - Akt) \cos \omega t - (Bm\omega^2 t + 2Am\omega - Bkt) \sin \omega t.$$

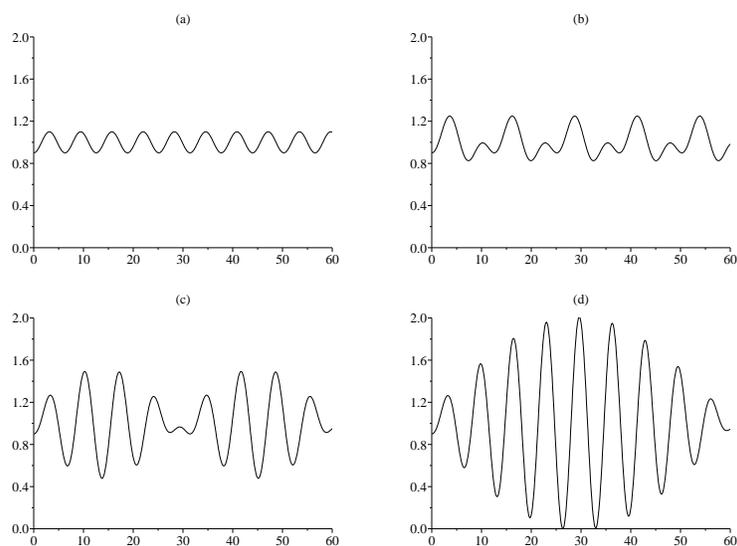


FIGURA 3.2. Gráfico da solução  $x = x(t)$  do sistema massa-mola forçado, com  $k = 1\text{kg} \times \text{s}^{-2}$ ,  $l = 1\text{m}$ ,  $m = 1\text{Kg}$ ,  $h_0 = 0.1\text{m}$ ,  $x(0) = 0.9\text{m}$ ,  $x'(0) = 0\text{m} \times \text{s}^{-1}$  e quatro valores diferentes de  $\omega$ , se aproximando da situação de ressonância: (a)  $\omega = 0\text{s}^{-1}$  (sem força externa), (b)  $\omega = 0.5\text{s}^{-1}$ , (c)  $\omega = 0.8\text{s}^{-1}$  e (d)  $\omega = 0.9\text{s}^{-1}$ .

Como agora  $m\omega^2 = k$ , então

$$mx_2'' + kx_2 = 2Bm\omega \cos \omega t - 2Am\omega \sin \omega t.$$

Igualando o lado direito a  $kh_0 \sin \omega t$ , vemos que

$$A = -\frac{kh_0}{2m\omega}, \quad B = 0.$$

Logo, uma solução particular da equação com o termo solenoidal é

$$x_2(t) = -\frac{kh_0 t}{2m\omega} \cos \omega t.$$

Portanto, a solução geral do sistema massa-mola forçado no caso ressonante pode ser escrita como

$$x(t) = x_h(t) + x_1(t) + x_2(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + l - \frac{kh_0 t}{2m\omega} \cos \omega t.$$

Observe que, nesse caso, a solução oscila, mas com amplitude crescendo linearmente, sendo ilimitada.

## Exercícios

**3.1.** Ache a solução geral das seguintes equações lineares não-homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes:

- (a)  $x'' - 7x' + 12x = 8 \cos 2t + 14 \sin 2t$ , (b)  $x'' - 2x' + 10x = 9e^t$ ,  
 (c)  $x'' + 2x' + x = (6 + 9t)e^{2t}$ , (d)  $x'' - 4x' + 29x = -10e^{2t} \sin 5t$ ,  
 (e)  $x'' - 4x' + 4x = 4t^2 - 8t - 6$ , (f)  $x'' - x' - 2x = -6e^{-t}$ ,  
 (g)  $x'' + 16x = 12 \sin 2t - 16 \sin 4t$ , (h)  $x'' - 4x = 4t - 8 \cos 2t$ ,  
 (i)  $x'' + x = 2 \sin t + 10e^{3t}$ , (j)  $x'' + 2x' + x = 6e^{-t}$ ,  
 (k)  $x'' - 4x = 4t + 8e^{2t}$ , (l)  $x'' + 5x' + 6x = e^{-2t}$ .

**3.2.** Ache as soluções particulares das equações seguintes correspondendo às condições iniciais ou de contorno dadas.

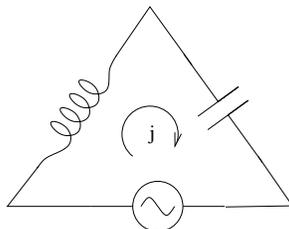
- (a)  $x'' + 2x' + x = (6 + 9t)e^{2t}$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ ,  
 (b)  $x'' - 2x + 10x = 9e^t$ ,  $x(0) = 3$ ,  $x'(0) = 0$ ,  
 (c)  $x'' + 16x = 12 \sin 2t - 16 \sin 4t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(\pi/8) = 0$ ,

**3.3.** Considere uma equação não-homogênea  $ax'' + bx' + cx = g$ , onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $g = g(t)$  é dada. Seja  $p(r) = ar^2 + br + c$  o polinômio característico da equação e  $p'(r) = 2ar + b$  a sua derivada. Se  $p(D)$  é o operador linear associado a essa equação, mostre que

$$p(D)(ty) = p'(D)y + tp(D)y.$$

Deduzo que se  $g$  já é solução da equação homogênea e  $\mathcal{V} = \mathcal{N}(p(D))$ , então  $p(D)(ty) = p'(D)y$ , para todo  $y \in \mathcal{V}$ . Nesse caso, então, a solução particular é da forma  $x_p = ty$ , onde  $p'(D)y = g$ .

- 3.4.** No sistema massa-mola forçado  $mx'' + kx = kh_0 \sin(\omega t) + lk$ , relacione as constantes  $C_1$  e  $C_2$  da solução geral com as condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $x'(0) = v_0$ , em ambos os casos  $\omega^2 \neq k/m$  e  $\omega^2 = k/m$ .
- 3.5.** O fenômeno de ressonância também pode ser obtido em circuitos elétricos. Por exemplo, considere um sistema  $LC$  da forma



com uma fonte de diferença de potencial  $E(t) = E_0 \cos \omega t$ . A equação para a voltagem  $V = V_C$  através do capacitor é

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + V = E_0 \cos(\omega t).$$

Dada a frequência  $\omega$ , ache valores de  $L$  e  $C$  para que haja ressonância no sistema.

#### 4. \*Sistema completo de soluções, Wronskiano e o método de variação de constantes

**4.1. Sistema completo de soluções e o Wronskiano.** No caso de equações homogêneas, vimos como achar a solução geral

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t),$$

onde  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são duas soluções particulares dependendo das raízes do polinômio característico associado. Afirmamos, então, que a solução geral é a combinação linear dessas duas soluções. Mas como podemos garantir isso? Como podemos garantir que qualquer solução é combinação linear dessas duas soluções e o que caracteriza essas duas soluções?

A idéia é a mesma que a de base de espaços vetoriais, em Álgebra Linear. O conjunto de soluções é o núcleo de um certo operador linear em um certo espaço de funções; esse núcleo tem dimensão dois e basta tomar duas funções (dois “vetores”) linearmente independentes para podermos representar todas as soluções como combinação linear dessas duas.

Mais precisamente, podemos considerar o espaço  $V$  das funções  $x = x(t)$  definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$  e infinitamente diferenciáveis. Desta forma, as derivadas  $x'$  e  $x''$  também pertencem ao espaço  $V$ , assim como qualquer combinação linear dessas funções. Logo, podemos definir uma função  $L$  de  $V$  em  $V$  dada por

$$L : V \rightarrow V, \quad L(x) \stackrel{\text{def}}{=} x'' + bx' + cx.$$

Mais explicitamente, dada uma função  $x = x(t)$  infinitamente diferenciável em  $t \in \mathbb{R}$ , definimos a função  $L(x)$  que a cada valor de  $t \in \mathbb{R}$  associa o valor real  $L(x)(t)$  dado por  $L(x)(t) = x''(t) + bx'(t) + cx(t)$ . A função  $L(x)(t)$  obtida também é infinitamente diferenciável em  $t$ , logo,  $L(x)$  pertence a  $V$  e, portanto,  $L$  é uma função de  $V$  em  $V$ , ou seja,  $L : V \rightarrow V$ . É fácil verificar que esta função  $L : V \rightarrow V$  é um operador linear, ou seja  $L(x_1 + \lambda x_2) = L(x_1) + \lambda L(x_2)$ , para quaisquer funções  $x_1, x_2 \in V$  e qualquer número  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Neste contexto, o conjunto de soluções da equação homogênea nada mais é do que o núcleo do operador  $L$ . Neste caso, o núcleo tem dimensão dois. Mas isso não é tão imediato. Uma demonstração de que o núcleo tem dimensão dois passa por escolher duas funções linearmente independentes nesse núcleo e mostrar que elas geram o núcleo, ou seja, qualquer outra função no núcleo é combinação linear dessas duas. Dessa forma, essas duas funções linearmente independentes formam uma base para o núcleo.

A idéia acima se aplica não apenas ao caso de coeficientes constantes, mas também ao caso dos coeficientes serem funções infinitamente diferenciáveis, ou seja

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t) = 0,$$

com  $a(t)$ ,  $b(t)$  e  $c(t)$  infinitamente diferenciáveis. Nesse caso, continuamos tendo  $L(x) = a(t)x'' + b(t)x' + c(t)$  como definindo um operador linear de  $V$  em  $V$ . Podemos, também, substituir  $V$  pelo espaço das funções analíticas ou por outros espaços de funções apropriados e permitir diferentes tipos de coeficientes  $a(t)$ ,  $b(t)$  e  $c(t)$ . A classe de funções analíticas é bastante explorada, com as soluções sendo buscadas na forma de séries  $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ .

Substituindo essa expressão para  $x(t)$  na equação, achamos um sistema algébrico infinito para os termos  $a_n$  da série. Mas questões de convergência dessa série são delicadas.

Vamos voltar à demonstração de que duas soluções linearmente independentes geram todas as soluções da equação não-homogênea. E vamos fazer isso no caso de coeficientes variáveis, tomando apenas  $a(t) = 1$  para simplificar. Dessa forma, temos a equação

$$x'' + b(t)x' + c(t)x = 0.$$

Suponha, então, que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sejam duas soluções linearmente independentes. Isso significa que se  $A_1x_1 + A_2x_2 = 0$ , então  $A_1 = A_2 = 0$ . Mas vamos com calma. Essa noção de dependência linear é no espaço de funções, de maneira que o elemento nulo à direita da expressão  $A_1x_1 + A_2x_2 = 0$  é a função identicamente nula. Portanto, a condição de independência linear pode ser expressa mais explicitamente como

$$A_1x_1(t) + A_2x_2(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \iff \quad A_1 = A_2 = 0.$$

Derivando a equação à esquerda, temos

$$A_1x_1'(t) + A_2x_2'(t) = 0.$$

Então, podemos escrever a condição de independência linear na forma

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \iff \quad A_1 = A_2 = 0.$$

Agora, caso  $x_1$  e  $x_2$  sejam linearmente dependentes, então existem  $A_1, A_2$ , não ambos nulos, tais que

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, o determinante da matriz acima tem que ser identicamente nulo. Esse determinante leva o nome de *Wronskiano* e é denotado por

$$W(x_1, x_2)(t) = \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} = x_1x_2' - x_2x_1'.$$

Se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  forem linearmente dependentes, então  $W(x_1, x_2)(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Vamos, agora, estabelecer a recíproca dessa afirmação. Observe, primeiro, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(x_1, x_2)(t) &= (x_1x_2' - x_2x_1')' = x_1'x_2' + x_1x_2'' - x_2'x_1' - x_2x_1'' = x_1x_2'' - x_2x_1'' \\ &= x_1(-b(t)x_2' - c(t)x_2) - x_2(-b(t)x_1' - c(t)x_1) = -b(t)(x_1x_2' - x_2x_1') \\ &= -b(t)W(x_1, x_2)(t). \end{aligned}$$

Em outras palavras, o Wronskiano satisfaz a equação linear de primeira ordem homogênea  $W' = -b(t)W$ , cuja solução é

$$W(x_1, x_2)(t) = e^{-\int_0^t b(s) ds} W(x_1, x_2)(0).$$

Esta é a chamada *Fórmula de Liouville*. Com ela, vemos que o Wronskiano ou é identicamente nulo ou não se anula nunca; ele não pode se anular em apenas alguns instantes.

Se  $W(x_1, x_2)$  for identicamente nulo, então podemos achar soluções não triviais  $A_1, A_2$  para

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mas em princípio, essas soluções não triviais poderiam depender do tempo, o que não implicaria na dependência linear de  $x_1$  e  $x_2$ . Mas da primeira equação vemos que a relação entre  $A_1$  e  $A_2$ , no caso em que  $x_1(t) \neq 0$  em um certo intervalo de tempo, é dada por

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

(Pense no que fazer quando  $x_1(t) = 0$ !) Derivando essa relação no tempo vemos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{A_1}{A_2} \right) = \frac{x_2'x_1 - x_2x_1'}{x_1^2} = \frac{W(x_1, x_2)}{x_1^2} = 0,$$

logo  $A_1/A_2$  é independente de  $t$ , ou seja, o núcleo da matriz em questão independe de  $t$ . Em outras palavras, se  $W(x_1, x_2)$  for identicamente nulo, podemos escolher  $A_1$  e  $A_2$  não ambos nulos e independentes de  $t$  satisfazendo a relação de dependência linear entre  $x_1$  e  $x_2$ . Isso mostra que  $x_1$  e  $x_2$  são linearmente dependentes se e somente se o Wronskiano  $W(x_1, x_2)$  é identicamente nulo.

Suponha, agora, que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sejam soluções linearmente independentes da equação homogênea em questão e que  $x(t)$  seja uma outra solução qualquer. Como podemos mostrar que  $x(t)$  tem que ser combinação linear de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ ? A idéia é resolver um sistema linear para  $C_1$  e  $C_2$  em que

$$C_1x_1(t) + C_2x_2(t) = x(t).$$

Mas tal como está, temos apenas uma equação para duas incógnitas. Uma segunda equação pode ser obtida derivando-se essa expressão:

$$C_1x_1'(t) + C_2x_2'(t) = x'(t).$$

Podemos escrever isso matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

Sendo  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  linearmente independentes, o Wronskiano deles nunca se anula e podemos inverter a matriz para todo  $t$ . Em princípio, no entanto, as soluções poderiam depender de  $t$ , o que faria de  $C_1$  e  $C_2$  não mais constantes. Mas esse não é o caso. De fato, invertendo o sistema temos que

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x_1, x_2)(t)} \begin{pmatrix} W(x, x_2)(t) \\ W(x_1, x)(t) \end{pmatrix}.$$

Agora, usando a Fórmula de Liouville, vemos que o lado direito independente de  $t$ :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x_1, x_2)(0)} \begin{pmatrix} W(x, x_2)(0) \\ W(x_1, x)(0) \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, as constantes  $C_1$  e  $C_2$  existem e são de fato independentes de  $t$ . Essas constantes podem ser achadas mais diretamente pelas condições iniciais:

$$\begin{cases} C_1x_1(0) + C_2x_2(0) = x(0), \\ C_1x_1'(0) + C_2x_2'(0) = x'(0). \end{cases}$$

Isso completa a demonstração de que o núcleo de  $L$  tem dimensão dois e de que duas soluções linearmente independentes do problema não-homogêneo geram (por combinações lineares) todas as soluções. Fizemos isso no caso de coeficientes variáveis com  $a(t) = 1$ . O mesmo vale se  $a(t)$  não se anular, mas é mais delicado caso esse coeficiente se anula.

**4.2. Equação não-homogênea e o método de variação de constantes.** No problema não-homogêneo com termo  $g \in V$ , a tradução para Algebra Linear ainda procede. Nesse caso, as soluções formam a pré-imagem de  $g$  por  $L$ , ou seja, são as funções  $x \in V$  tais que  $L(x) = g$ . O conjunto-solução é uma translação do núcleo. A translação pode ser representada por uma solução particular qualquer. A figura 4.1 ilustra esse conceito. A solução geral é a soma de uma solução particular com a solução geral da equação homogênea, que pertence ao núcleo do operador  $L$ . Ou seja, a solução particular  $x_p$  satisfaz

$$L(x_p) = g,$$

enquanto que a solução geral  $x_h$  da equação homogênea satisfaz

$$L(x_h) = 0,$$

de maneira que a solução geral  $x = x_h + x_p$  satisfaz

$$L(x) = L(x_h + x_p) = L(x_h) + L(x_p) = 0 + g = g.$$

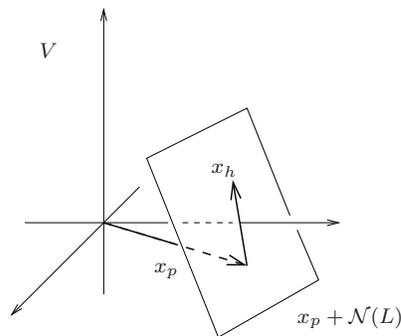


FIGURA 4.1. Representação do conjunto-solução da equação não-homogênea como translação do núcleo  $\mathcal{N}()$  do operador  $L$  por uma solução particular  $x_p$ . As soluções da equação não-homogênea são somas da solução particular  $x_p$  com as soluções  $x_h$  do problema homogêneo.

Equações não-homogêneas com termos  $g$  distintos dos tratados acima também podem, em princípio, ser resolvidos. A idéia é semelhante ao método usado em equações lineares de

primeira ordem e também leva o nome de método de variação de constantes, também conhecido como método de variação de parâmetros ou método de Lagrange. Uma vez conhecidas soluções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  da equação homogênea, digamos

$$x_i'' + b(t)x_i' + c(t)x_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

procuramos uma solução particular da equação não-homogênea

$$x'' + b(t)x' + c(t)x = g(t),$$

da forma

$$x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t).$$

As incógnitas, agora, são as funções  $u_1$  e  $u_2$ , que esperamos ser soluções de um problema mais simples. Substituindo essa expressão na equação não-homogênea e usando que  $x_1$  e  $x_2$  satisfazem a equação homogênea chegamos a

$$x_p'' + b(t)x_p' + c(t)x_p = u_1''x_1 + 2u_1x_1' + u_2''x_2 + 2u_2x_2' + b(u_1'x_1 + u_2'x_2).$$

Igualando o lado direito a  $g(t)$ , temos a condição

$$u_1''x_1 + 2u_1'x_1' + u_2''x_2 + 2u_2'x_2' + b(u_1'x_1 + u_2'x_2) = g.$$

Temos, assim, uma equação para duas incógnitas  $u_1$  e  $u_2$ . O fato é que temos uma certa liberdade em escolher  $u_1$  e  $u_2$ . Para simplificar, podemos impôr a condição

$$u_1'x_1 + u_2'x_2 = 0.$$

Derivando essa relação, temos

$$u_1''x_1 + u_1'x_1' + u_2''x_2 + u_2'x_2' = 0.$$

Subtraindo essa relação da primeira condição chegamos ao sistema

$$\begin{cases} u_1'x_1 + u_2'x_2 = 0, \\ u_1x_1' + u_2x_2' + b(u_1'x_1 + u_2'x_2) = g, \end{cases}$$

que pode ser simplificado para

$$\begin{cases} u_1'x_1 + u_2'x_2 = 0, \\ u_1x_1' + u_2x_2' = g. \end{cases}$$

A escolha da condição extra foi no sentido de reduzirmos a equação de segunda ordem a um sistema de equações de primeira ordem. Em termos matriciais, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é o Wronskiano entre  $x_1$  e  $x_2$ , logo o sistema pode ser resolvido, dando equações de primeira ordem para  $u_1$  e  $u_2$ :

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x_1, x_2)(t)} \begin{pmatrix} -g(t)x_2(t) \\ g(t)x_1(t) \end{pmatrix}.$$

Uma vez resolvidas essas equações, achamos a solução particular  $x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$ . A solução geral pode ser escrita como

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) - x_1(t) \int_0^t \frac{g(s)x_2(s)}{W(x_1, x_2)(s)} ds + x_2(t) \int_0^t \frac{g(s)x_1(s)}{W(x_1, x_2)(s)} ds.$$

Esta é a chamada fórmula de variação de constantes ou fórmula de variação de parâmetros. Essa fórmula se aplicada para qualquer tipo de função  $g(t)$ , mas dependendo da  $g(t)$ , nem sempre é possível achar expressões fechadas para as integrais acima.

Ressaltamos, ainda, que essa fórmula aparece de forma muito mais natural ao escrevermos a equação de segunda ordem como um sistema de equações de primeira ordem e utilizarmos a idéia de fator de integração. Isso será feito no próximo capítulo.



## CAPÍTULO 6

### Sistemas Bidimensionais Lineares

#### 1. Introdução

Um *sistema bidimensional de equações diferenciais de primeira ordem* é um sistema de equações da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y). \end{cases}$$

Nesse sistema,  $t$  é a variável independente,  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  são as funções procuradas (incógnitas), e  $f = f(t, x, y)$  e  $g = g(t, x, y)$  são funções dadas de três variáveis assumindo valores reais.

Vários modelos aparecem nessa forma. Por exemplo,  $x$  e  $y$  podem indicar a população de duas espécies que interagem entre si, com  $f$  e  $g$  indicando a influência dessa interação na taxa de crescimento de cada população. As espécies podem estar em competição por um mesmo alimento, em simbiose, ou uma é a presa e a outra, o caçador. Em cada caso, teremos uma forma particular para  $f$  e  $g$ . Outros modelos dessa forma aparecem em reações químicas e bioquímicas, onde as variáveis  $x$  e  $y$  representam a concentração de cada substância. O sistema de equações modela como os elementos químicos reagem entre si. Modelos mais complexos podem envolver mais de duas incógnitas, mas esses não serão vistos nesta seção.

Outros exemplos aparecem a partir de equações com apenas uma incógnita mas de ordem maior do que um. Uma equação dessa forma pode ser transformada em um sistema de equações de primeira ordem. De fato, considere uma equação de ordem dois:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Podemos introduzir a variável

$$y = \frac{dx}{dt}$$

e obter a equação

$$\frac{dy}{dt} = f(t, x, y).$$

Já vimos que nos casos particulares  $f = f(t, y)$  e  $f = f(x, y)$ , podemos reduzir a equação a uma única equação de primeira ordem. Mas no caso geral, não temos como reduzir o

problem e devemos considerar o sistema completo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = f(t, x, y). \end{cases}$$

Mesmo no caso  $f = f(x, y)$ , a solução via redução à primeira ordem pode não ser satisfatória e o sistema acima pode esclarecer melhor o comportamento do sistema. Um exemplo específico é o de um sistema massa-mola

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt}.$$

Introduzindo a variável  $y = dx/dt$ , obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}y. \end{cases}$$

**1.1. Sistemas lineares autônomos.** Vamos considerar, inicialmente, sistemas bidimensionais no caso particular de funções lineares em  $x$  e  $y$  com coeficientes constantes em relação a  $t$ . Mais precisamente, consideramos o caso em que  $f$  e  $g$  são funções lineares em  $x$  e  $y$ , ou seja, têm a forma

$$f(t, x, y) = a(t)x + b(t)y + e(t), \quad g(t, x, y) = c(t)x + d(t)y + h(t).$$

Assim, temos os chamados *sistemas lineares*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + e(t), \\ \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + h(t). \end{cases}$$

No caso em que  $e(t) = 0$  e  $h(t) = 0$ , temos os chamados *sistemas lineares homogêneos*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y, \\ \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y. \end{cases}$$

Se  $a(t) = a$ ,  $b(t) = b$ ,  $c(t) = c$  e  $d(t) = d$ , temos os chamados *sistemas lineares com coeficientes constantes*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + e(t), \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + h(t). \end{cases}$$

Caso os termos não-homogêneos  $e(t)$  e  $h(t)$  variem com  $t$ , o sistema é não-autônomo, nomenclatura já usada no estudo de equações de primeira ordem. No caso desses coeficientes não dependerem de  $t$ , temos os *sistemas lineares autônomos não-homogêneos*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + e, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + h. \end{cases}$$

Finalmente, temos os *sistemas lineares autônomos homogêneos*, também chamados *sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases}$$

Vamos tratar a seguir este último caso. Vamos ver, também, como reduzir o caso de sistemas lineares não-homogêneos autônomos ao caso homogêneo através de uma simples translação.

## 1.2. Órbitas e o conceito de diagrama de fase de sistemas bidimensionais.

A análise qualitativa/geométrica que fizemos para equações de primeira ordem pode ser estendida a sistemas de equações. Podemos, assim, construir um diagrama de fase, nesse caso um plano de fase, indicando o comportamento qualitativo das soluções. No caso de equações lineares, conceitos de Álgebra Linear como autovetores e autovalores serão fundamentais. Primeiro, observe que sistemas da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases}$$

podem ser escritos em forma vetorial

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u},$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Podemos, assim, fazer uma analogia com o caso escalar. No caso de uma equação escalar  $dx/dt = ax$ , a solução geral é  $x(t) = C \exp(at)$ . No caso vetorial, somos tentados a escrever

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA}\mathbf{C},$$

onde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

é um vetor de “constantes de integração”. Veremos como fazer isso rigorosamente mais adiante. Primeiro, vamos resolver as equações de uma forma mais simples e estudar os diagramas de fase. Vamos começar com casos canônicos e em seguida ver como podemos relacionar os casos gerais com cada caso canônico, da mesma forma como a transformação de matrizes em suas formas canônicas é feita em Álgebra Linear, através de bases apropriadas.

O *diagrama de fase* de sistemas bidimensionais é, como no caso unidimensional, o conjunto de órbitas do sistema, com a indicação do sentido de cada órbita em relação ao sentido de crescimento da variável temporal  $t$ . As *órbitas* são os conjuntos  $\{(x(t), y(t))\}_{t \in \mathbb{R}}$  formados pelas soluções do sistema. Nesse caso, essas órbitas são curvas no plano  $xy$ . A forma dessas curvas indica o comportamento de cada solução. O diagrama de fase indica o comportamento de todas as soluções possíveis. No caso particular de duas dimensões, o diagrama de fase também leva o nome de *plano de fase*.

**1.3. Relação entre soluções e órbitas no sistema massa-mola.** Para ilustrar a representação de órbitas no diagrama de fase, considere o sistema massa-mola sem amortecimento

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = -kx,$$

onde  $x = x(t)$  representa a posição do objeto de massa  $m$  e  $k$ , o coeficiente de amortecimento. Vimos que a solução geral nesse caso tem a forma

$$x(t) = C_1 \cos \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) + C_2 \sin \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right).$$

Isso nos dá a posição do sistema massa-mola em relação à posição de equilíbrio, mostrando que o sistema oscila indefinidamente. Introduzindo a velocidade como uma nova variável, podemos rescrever essa equação como um sistema de equações de primeira ordem, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x. \end{cases}$$

Como  $y(t)$  é a derivada temporal de  $x(t)$ , podemos deduzir, da solução geral para  $x(t)$ , que

$$y(t) = -C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right).$$

Tanto  $x(t)$  como  $y(t)$  são funções periódicas. O espaço de fase natural para o sistema é o plano  $xy$ , pois, em um certo instante, o conhecimento de apenas uma das variáveis não determina a solução. Ou seja, não basta sabermos a posição do objeto em um certo instante para determinarmos o comportamento futuro do objeto, é necessário conhecermos, também, a velocidade instantânea do objeto naquele instante. Nesse plano  $xy$ , o comportamento do objeto é dado pela curva  $(x, y) = (x(t), y(t))$ . Esta curva está ilustrada na figura 1.1.

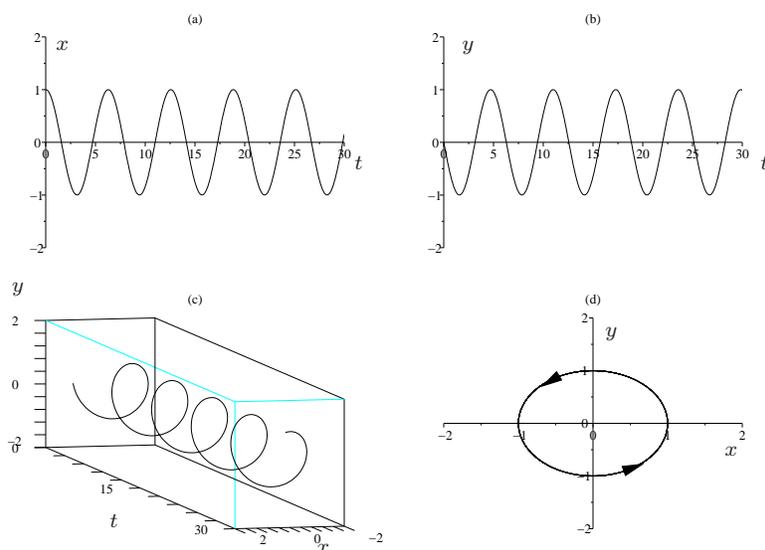


FIGURA 1.1. Sobre a solução da equação do sistema massa-mola com parâmetros  $k = 1$ ,  $m = 1$  e com a condição inicial  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$ : (a) gráfico da evolução da posição  $x = x(t)$  em função de  $t$ ; (b) gráfico da evolução da velocidade  $y = y(t)$  em função de  $t$ ; (c) gráfico da solução  $(x(t), y(t))$  em função de  $t$ ; e (d) gráfico da órbita  $\{(x(t), y(t))\}_{t \in \mathbb{R}}$  no plano  $xy$ .

No caso amortecido, temos

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt},$$

e o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}y. \end{cases}$$

Supondo condições de subamortecimento ( $0 < \alpha^2 < 4mk$ ), as soluções têm a forma

$$x(t) = e^{-(\alpha/2m)t} \left( C_1 \cos \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) + C_2 \sin \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \right).$$

O objeto oscila com a amplitude da oscilação diminuindo exponencialmente. A velocidade do objeto é dada pela derivada de  $x(t)$ , logo,

$$y(t) = -e^{-(\alpha/2m)t} \left( \left( \frac{\alpha}{2m} C_1 - C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \cos \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) + \left( \frac{\alpha}{2m} C_2 + C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \sin \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \right).$$

A velocidade também oscila com a amplitude diminuindo exponencialmente. A figura 1.2 ilustra esse comportamento de várias formas, incluindo a órbita no plano de fase.

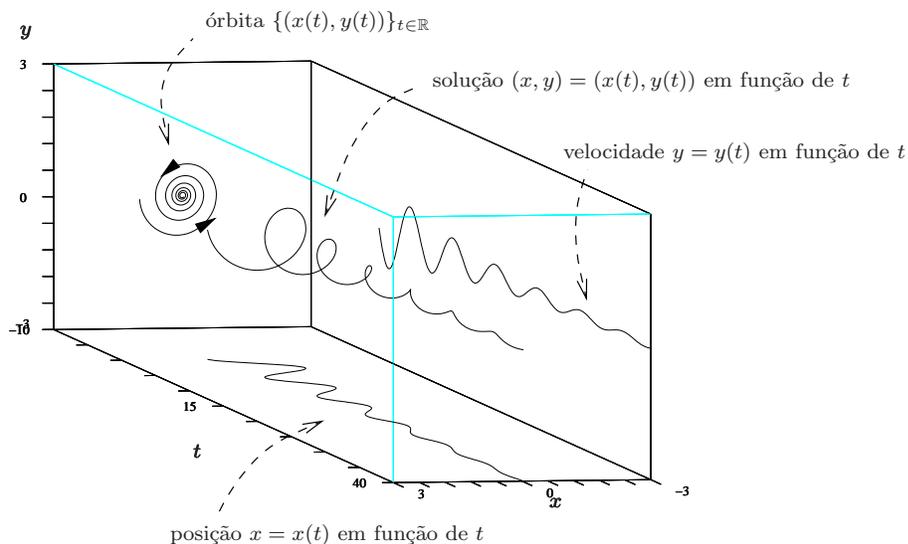


FIGURA 1.2. Sobre a solução da equação do sistema massa-mola amortecido com parâmetros  $k = 1, m = 1, \alpha = 0.15$  e com a condição inicial  $x(0) = 1, y(0) = 0$ : gráficos da solução  $(x(t), y(t))$  em função de  $t$ , das coordenadas  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  e da órbita  $\{(x(t), y(t))\}_{t \in \mathbb{R}}$ , “espiralando para a origem”, no plano  $xy$ .

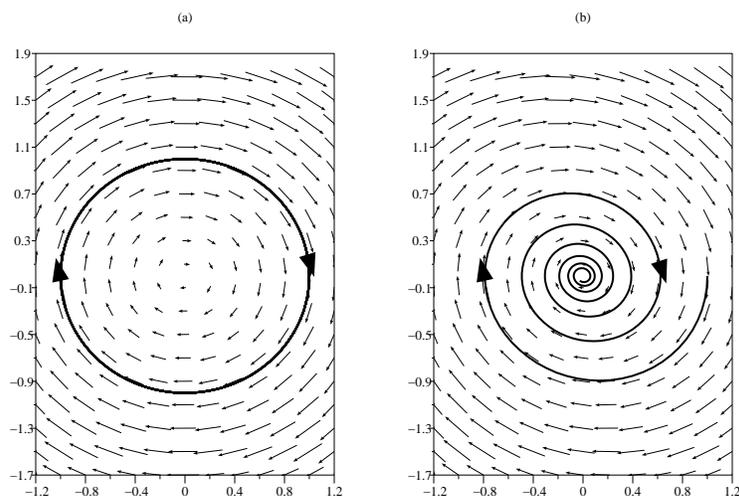


FIGURA 1.3. Campo de vetores e órbitas do sistema massa-mola com e sem amortecimento, com  $k = 1, m = 1$ , (a)  $\alpha = 0$  e (b)  $\alpha = 0.15$ . As órbitas estão associadas à condição inicial  $x(0) = 1, y(0) = 0$ .

Finalmente, representamos na figura 1.3 o campo de vetores do sistema massa-mola com e sem amortecimento, junto com a órbita associada à condição inicial  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$ . O campo de vetores é o lado direito de sistema de equações, que nesse caso é dado pelos vetores

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix},$$

onde

$$f(x, y) = y, \quad g(x, y) = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}y.$$

Observe que a órbita é tangente ao campo de vetores, pois o campo de vetores dá o vetor tangente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}.$$

Ao representarmos as soluções pelas suas órbitas, perdemos algumas informações. Nos casos acima, por exemplo, a órbita não dá nenhuma informação sobre o período das oscilações. Por outro lado, a representação das órbitas é mais “limpa”, pois é mais fácil visualizar curvas no plano do que no espaço. Isso se tornará ainda mais crítico quando for necessário visualizar várias curvas ao mesmo tempo. O diagrama de fase é uma simplificação bastante efetiva para descrever os comportamentos das várias soluções. Isso deverá ficar mais claro mais adiante. Vamos, agora, ver como podemos construir diagramas de fase de sistemas lineares em geral.

## Exercícios

**1.1.** Determine se cada um dos sistemas abaixo é autônomo ou não e linear ou não. Caso um sistema seja linear, determine se ele é homogêneo ou não e se tem coeficientes constantes ou não.

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\begin{cases} x' = x^2 - y, \\ y' = -x + y^2, \end{cases}$                   | (b) $\begin{cases} x' = tx + y, \\ y' = -x + \sin x, \end{cases}$     |
| (c) $\begin{cases} x' = -2x - y + 1, \\ y' = 2x - 3, \end{cases}$                 | (d) $\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = -x - 2y - \sin t, \end{cases}$ |
| (e) $\begin{cases} x' = \cos 5x - \sin y, \\ y' = \sin x + 6 \cos y, \end{cases}$ | (f) $\begin{cases} x' = -xy, \\ y' = yx, \end{cases}$                 |
| (g) $\begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = -4x + 2y, \end{cases}$                   | (h) $\begin{cases} x' = -tx - y, \\ y' = -2x - t^2y, \end{cases}$     |
| (i) $\begin{cases} x' = -5x + e^{2t}, \\ y' = 2x - 4y. \end{cases}$               | (j) $\begin{cases} x' = -5x + 3y, \\ y' = -2x + 6y. \end{cases}$      |

- 1.2.** Considere uma solução  $x(t)$  do sistema massa-mola sem amortecimento ( $mx'' + kx = 0$ ) e seja  $y(t) = x'(t)$ . Mostre que a curva parametrizada  $(x(t), y(t))$  é uma elipse no plano  $xy$ . (Sugestão: Calcule  $E(t) = (x(t))^2 + (y(t)/\sqrt{k/m})^2$ .)
- 1.3.** Equações de ordem  $n$ , da forma

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

também podem ser transformadas em sistemas de equações de primeira ordem, nesse caso em sistemas de  $n$  equações da forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Sabendo isso, escreva um sistema de 4 equações de primeira ordem correspondendo à equação de quarta ordem

$$\frac{d^4 x}{dt^4} - 2x \frac{d^2 x}{dt^2} + x^3 \frac{dx}{dt} = \sin t.$$

## 2. Diagrama de fase nos casos canônicos

### 2.1. Sistemas lineares diagonalizáveis com autovalores reais - caso canônico.

No caso de uma matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

a equação

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u},$$

esta desacoplada, ou seja, a equação para  $x$  não depende de  $y$ , e vice-versa:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y. \end{cases}$$

Nesse caso, as soluções são

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t},$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  podem ser diretamente relacionadas a condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $y(0) = y_0$ , de modo que  $C_1 = x_0$  e  $C_2 = y_0$ . Logo,

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t},$$

Dessa forma, podemos ver mais claramente o papel dessas constantes em cada solução.

O gráfico das órbitas  $\{(x(t), y(t))\}_{t \in \mathbb{R}}$  no plano  $xy$  depende dos valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Temos várias situações distintas:

Caso  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Nesse caso, as duas coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  decrescem exponencialmente para zero, em módulo, de maneira que a solução  $(x(t), y(t))$  converge para a origem  $(0, 0)$  do plano  $xy$ .

Observe que os dois eixos são invariantes, ou seja, se  $x(t_0) = 0$  para algum  $t_0$ , então  $x_0 = 0$  e  $x(t) = 0$  para todo  $t$ ; idem para  $y(t)$ , se  $y_0 = 0$ . Esses casos correspondem a tomar uma das constantes  $x_0, y_0$  como zero. Mais precisamente, temos, nesse caso, cinco órbitas particulares, correspondendo às condições i)  $x_0 = y_0 = 0$ ; ii)  $x_0 = 0, y_0 > 0$ ; iii)  $x_0 = 0, y_0 < 0$ ; iv)  $x_0 > 0, y_0 = 0$ ; v)  $x_0 < 0, y_0 = 0$ . Cada condição se refere a uma órbita: i) a origem  $(0, 0)$ ; ii) o eixo  $y$  positivo; iii) o eixo  $y$  negativo; iv) o eixo  $x$  positivo; v) o eixo  $x$  negativo.

Caso  $x_0$  e  $y_0$  sejam diferentes de zero, o formato da órbita vai depender dos valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Isso pode ser visto buscando uma representação cartesiana para a órbita. Podemos facilmente escrever  $y$  em função de  $x$  na forma:

$$y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} = y_0 (e^{\lambda_1 t})^{\lambda_2/\lambda_1} = y_0 \left( \frac{x(t)}{x_0} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Como ambos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são negativos, temos  $\lambda_2/\lambda_1$  positivo. Caso  $\lambda_1 = \lambda_2$ , as órbitas formam semiretas (observe que  $x(t)$  e  $y(t)$  não trocam de sinal, portanto as órbitas não podem formar retas completas, atravessando a origem). Caso  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , temos  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ , de maneira que as soluções se aproximam da origem tangentes ao eixo  $x$ . Caso  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , as soluções se aproximam da origem tangentes ao eixo  $y$ . Esses diversos subcasos estão representados na figura 2.1. Nos casos em que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , podemos indicar a direção de decrescimento mais rápido por uma seta dupla.

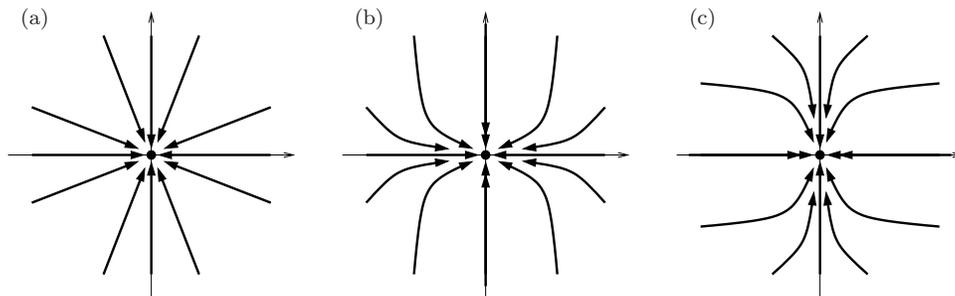


FIGURA 2.1. Diagrama de fase do sistema linear diagonalizável canônico nos casos em que (a)  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ , (b)  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , e (c)  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .

Caso  $0 < \lambda_1, \lambda_2$ . Esse caso é semelhante ao caso anterior, sendo o sentido das órbitas a única diferença. De fato, como  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , as coordenadas  $x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}$  e  $y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}$

crecem em módulo e, portanto, as soluções se afastam da origem. No entanto, a relação

$$y = y_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\lambda_2/\lambda_1} .$$

entre as coordenadas  $y = y(t)$  e  $x = x(t)$  de cada solução continua a mesma, pois  $\lambda_2/\lambda_1 > 0$ , também. Da mesma forma, temos três subcasos, dependendo dos valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Esses diversos subcasos estão representados na figura 2.2. Nos casos em que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , podemos indicar a direção de crescimento mais rápido por uma seta dupla.

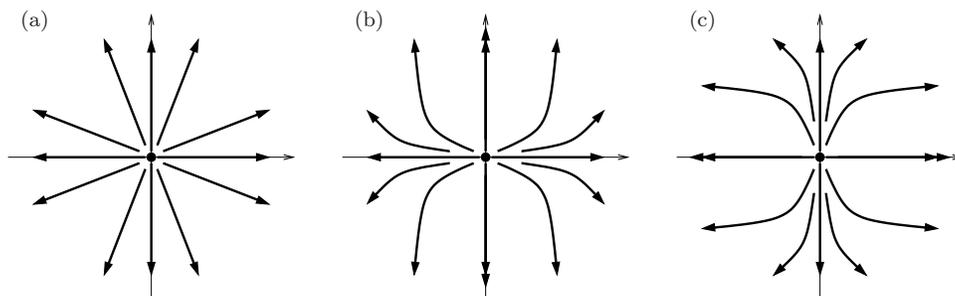


FIGURA 2.2. Diagrama de fase do sistema linear diagonalizável canônico nos casos em que (a)  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ , (b)  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , e (c)  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ .

Casos  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  ou  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ . Nesses dois casos, temos que uma das coordenadas decresce exponencialmente para zero, enquanto que a outra coordenada cresce exponencialmente, em módulo. Os eixos continuam invariantes, mas enquanto as órbitas em um eixo apontam para a origem, as órbitas no outro eixo apontam para longe da origem.

No caso em que  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , a coordenada  $x(t)$  decresce exponencialmente enquanto que a coordenada  $y(t)$  cresce exponencialmente. As órbitas no eixo  $x$  apontam em direção a origem, enquanto que as órbitas no eixo  $y$  apontam para longe da origem. No caso em que  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , os papéis de cada eixo são trocados.

Além do sentido das órbitas, a diferença geométrica maior está no comportamento das órbitas fora dos eixos. As curvas descritas não convergem mais para a origem, porque as coordenadas não têm mais os mesmos limites quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . A relação entre as coordenadas continua sendo

$$y = y_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\lambda_2/\lambda_1} ,$$

mas agora  $\lambda_2/\lambda_1$  é negativo. Quando  $|x| \rightarrow \infty$ , temos  $y \rightarrow 0$ , enquanto que se  $x \rightarrow 0$ , então  $y \rightarrow \pm\infty$ . (Mais concretamente, pense no caso  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_1 = 1$ , onde  $\lambda_2/\lambda_1 = -1$  e as órbitas fora dos eixos pertencem às hipérbolas  $y = c/x$ , com  $c = x_0 y_0$ .)

Os diagramas de fase dos dois casos  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  e  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$  estão representados na figura 2.3.

Casos  $\lambda_1 = 0$  e/ou  $\lambda_2 = 0$ . Esses são casos degenerados. Se  $\lambda_1 = 0$ , então  $x(t) = x_0$  é constante, enquanto que  $y(t)$  pode crescer ou decrescer exponencialmente, de acordo com

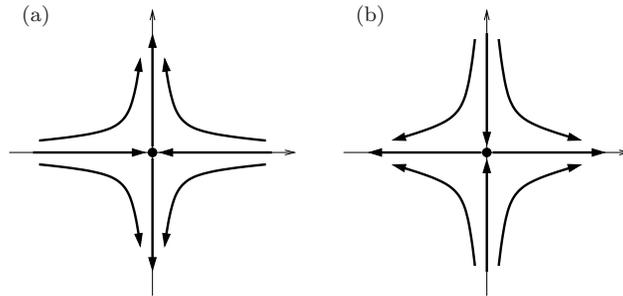


FIGURA 2.3. Diagrama de fase do sistema linear diagonalizável canônico nos casos em que (a)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  e (b)  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ .

o sinal de  $\lambda_2$ . Se  $\lambda_2 = 0$ , então  $y(t) = y_0$  é constante, enquanto que  $x(t)$  pode crescer ou decrescer exponencialmente, de acordo com o sinal de  $\lambda_1$ . No primeiro caso, todos os pontos no eixo  $x$  são pontos fixos (associados a soluções constantes), enquanto que no segundo caso, todos os pontos no eixo  $y$  são pontos fixos. A figura 2.4 ilustra essas duas situações.

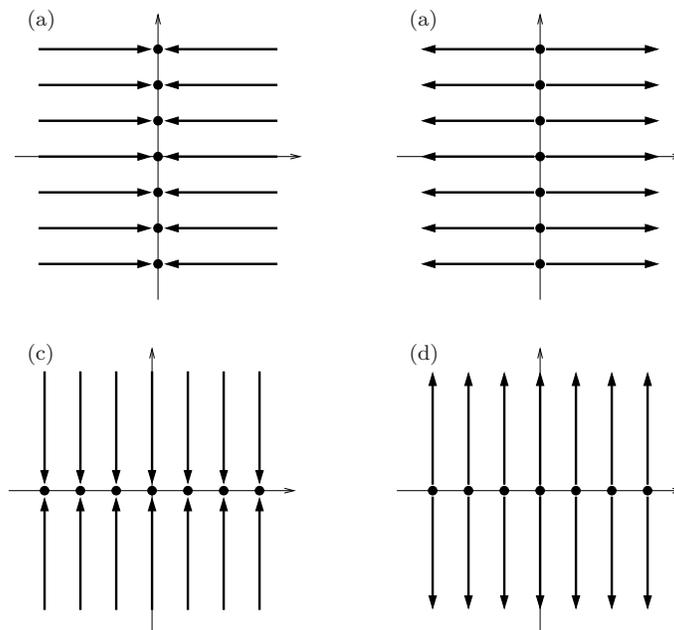


FIGURA 2.4. Diagrama de fase do sistema linear diagonalizável canônico nos casos em que (a)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$ ; (b)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ ; (c)  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ ; e (d)  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ .

Há ainda o caso em que ambos  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , no qual o sistema é completamente degenerado: Todas as soluções são constantes, com todos os pontos do plano sendo pontos fixos do sistema.

**2.2. Sistemas lineares não-diagonalizáveis com autovalores reais iguais - caso canônico.** No caso de uma matriz não-diagonalizável da forma

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

a equação

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u},$$

também pode ser resolvida explicitamente. Temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x + y, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y. \end{cases}$$

Podemos resolver primeiro para  $y$ , que não depende de  $x$ , logo

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}.$$

Em seguida, podemos utilizar essa solução na equação pra  $x$ :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + y_0 e^{\lambda t},$$

que é uma equação linear de primeira ordem. Com o método de resolução desse tipo de equação, conforme visto anteriormente, a sua solução geral pode ser escrita como

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + y_0 t e^{\lambda t}.$$

O gráfico das órbitas  $\{(x(t), y(t))\}_{t \in \mathbb{R}}$  no plano  $xy$  depende dos valores de  $\lambda$ . Primeiramente, se  $\lambda < 0$ , a função  $t e^{\lambda t}$  converge para zero, quando  $t \rightarrow \infty$ , logo as soluções convergem para a origem  $(0, 0)$  do plano  $xy$ . Se  $\lambda > 0$ , as duas coordenadas crescem em módulo e as soluções se afastam da origem. Mas como serão as órbitas?

Observe que agora o sistema não está mais desacoplado. De fato, a coordenada  $y$  aparece na equação para a coordenada  $x$ . Uma consequência disso é que o eixo  $y$  não é mais invariante. Mesmo que  $x(t)$  se anule em algum instante  $t$ , ele não necessariamente se anula em todos os instantes. Por exemplo, se  $x_0 = 0$  e  $y_0 \neq 0$ , então  $x(0) = 0$ , mas  $x(t) \neq 0$ , para todo  $t \neq 0$ . Mas isso só acontece com o eixo  $y$ . O eixo  $x$  continua invariante, ou seja, se  $y(t_0) = 0$  em algum instante  $t_0$ , então  $y_0 = 0$  e  $y(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Temos, então, duas classes de soluções: as pertencentes ao eixo  $x$ , que é invariante, e as outras. Quanto às soluções que pertencem ao eixo  $x$ , temos três órbitas: a origem, correspondendo a  $x_0 = y_0 = 0$ ; o eixo  $x$  positivo, correspondendo a  $x_0 > 0, y_0 = 0$ ; e o eixo  $x$  negativo, correspondendo a  $x_0 < 0, y_0 = 0$ . No primeiro subcaso, temos um ponto fixo, nos outros dois, o sentido das órbitas aponta em direção à origem, se  $\lambda < 0$ , e para longe da origem, se  $\lambda > 0$ .

Quanto às soluções que não pertencem ao eixo  $x$ , podemos observar os seguintes fatos em relação à coordenada  $y$ :  $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$  não troca de sinal e é monótona crescente ou decrescente, dependendo dos sinais de  $y_0$  e  $\lambda$ . Enquanto isso,  $x(t) = x_0 e^{\lambda t} + y_0 t e^{\lambda t}$  se anula apenas em

$t_0 = -x_0/y_0$  e tem um único ponto crítico, em  $t_1 = -(y_0 + \lambda x_0)/\lambda y_0 = -1/\lambda - x_0/y_0 = -1/\lambda + t_0$ .

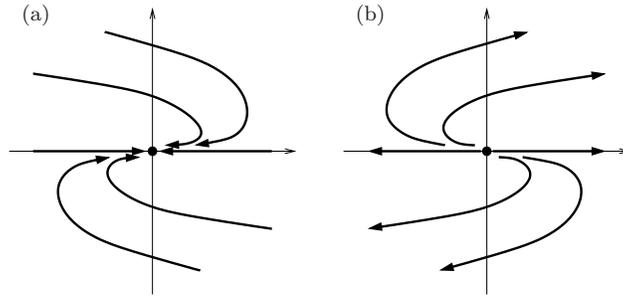


FIGURA 2.5. Diagrama de fase do sistema linear não-diagonalizável canônico com autovalores reais iguais nos casos em que (a)  $\lambda < 0$  e (b)  $\lambda > 0$ .

Caso  $\lambda < 0$ , temos  $x(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Quando  $t \rightarrow -\infty$ , temos  $x(t) \rightarrow \infty$ , se  $y_0 < 0$ , ou  $x(t) \rightarrow -\infty$ , se  $y_0 > 0$ . Note que  $y_0 < 0$  corresponde às soluções “abaixo” do eixo  $x$ , ou seja, com  $y$  negativo, enquanto que  $y_0 > 0$  corresponde às soluções “acima” do eixo  $x$ , ou seja, com  $y$  positivo. Assim, “acima” do eixo  $x$ , as soluções são tais que a coordenada  $y(t)$  decresce exponencialmente para zero, enquanto que a coordenada  $x(t)$  vem de  $-\infty$ , se anula no instante  $t_0 = -x_0/y_0$ , assume um máximo no instante  $t_1 = -1/\lambda + t_0 > t_0$  e, em seguida, decresce para zero. Enquanto isso, “abaixo” do eixo  $x$ , ou seja, com  $y$  negativo,  $y(t)$  decresce exponencialmente em módulo para zero, enquanto que a coordenada  $x(t)$  vem de  $+\infty$ , se anula no instante  $t_0 = -x_0/y_0$ , assume um mínimo no instante  $t_1 = -1/\lambda + t_0 > t_0$  e, em seguida, cresce para zero.

Ainda no caso  $\lambda < 0$ , temos que ambas as coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  convergem para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Mas as coordenadas decrescem com a mesma velocidade ou uma coordenada decresce mais rápido que a outra? Isso é crucial para a forma final do gráfico, conforme foi visto no caso anterior de autovalores reais distintos. Isso pode ser resolvido calculando-se o limite da inclinação da curva  $(x(t), y(t))$ . A inclinação dessa curva é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\lambda y}{\lambda x + y} = \frac{\lambda y_0 e^{\lambda t}}{\lambda(x_0 + y_0 t)e^{\lambda t} + y_0 e^{\lambda t}} = \frac{\lambda y_0}{\lambda x_0 + \lambda y_0 t + y_0}$$

Assim, o limite quando  $t \rightarrow \infty$  é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda y_0}{\lambda x_0 + \lambda y_0 t + y_0} = 0.$$

Isso mostra que as soluções convergem para a origem tangenciando o eixo  $x$ , pois a inclinação  $dy/dx$  das órbitas converge para zero.

Podemos aproveitar e analisar a inclinação das órbitas longe da origem, ou seja, no limite quando  $t \rightarrow -\infty$ . Nesse caso, temos, também,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\lambda y_0}{\lambda x_0 + \lambda y_0 t + y_0} = 0.$$

o que mostra que a inclinação também diminui longe da origem.

Uma outra maneira de observar isso é escrevendo a equação cartesiana de cada órbita. Podemos expressar  $x$  em função de  $y$ . De fato, sabemos que  $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ , logo

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y}{y_0}.$$

Observe que não precisamos nos preocupar com o módulo dentro do logaritmo, pois  $y(t)$  e  $y_0$  terão sempre os mesmos sinais. Lembre-se, ainda, que estamos interessados apenas no caso  $y_0 \neq 0$ . Assim, podemos escrever

$$x(t) = (x_0 + y_0 t) e^{\lambda t} = \left( x_0 + \frac{y_0}{\lambda} \ln \frac{y(t)}{y_0} \right) \frac{y(t)}{y_0}$$

Logo,

$$x = y \left( \frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y}{y_0} \right).$$

Assim, a análise das inclinações feita acima pode também ser feita a partir dessa expressão cartesiana.

Agora, podemos juntar essas informações e representar graficamente o diagrama de fase, no caso em que  $\lambda < 0$ , conforme ilustrado na figura 2.5(a).

A análise no caso  $\lambda > 0$  é similar. As órbitas tem o mesmo formato, exceto que agora as soluções se afastam da origem. O diagrama de fase nesse caso aparece esboçado na figura 2.5(b).

**2.3. Sistemas lineares com autovalores complexos - caso canônico.** No caso de uma matriz com autovalores complexos conjugados da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

que é a forma canônica, com autovalores  $\alpha \pm i\beta$ , a equação

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$$

pode ser resolvida em coordenadas polares. Nessas coordenadas  $r\theta$ , temos

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Derivando essas duas expressões em relação a  $t$ , obtemos

$$x' = r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta = \frac{r'}{r} x - \theta' y, \quad y' = r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta = \frac{r'}{r} y + \theta' x.$$

Por outro lado, da equação diferencial, temos

$$x' = \alpha x - \beta y, \quad y' = \beta x + \alpha y.$$

Logo,

$$\frac{r'}{r} = \alpha, \quad \theta' = \beta.$$

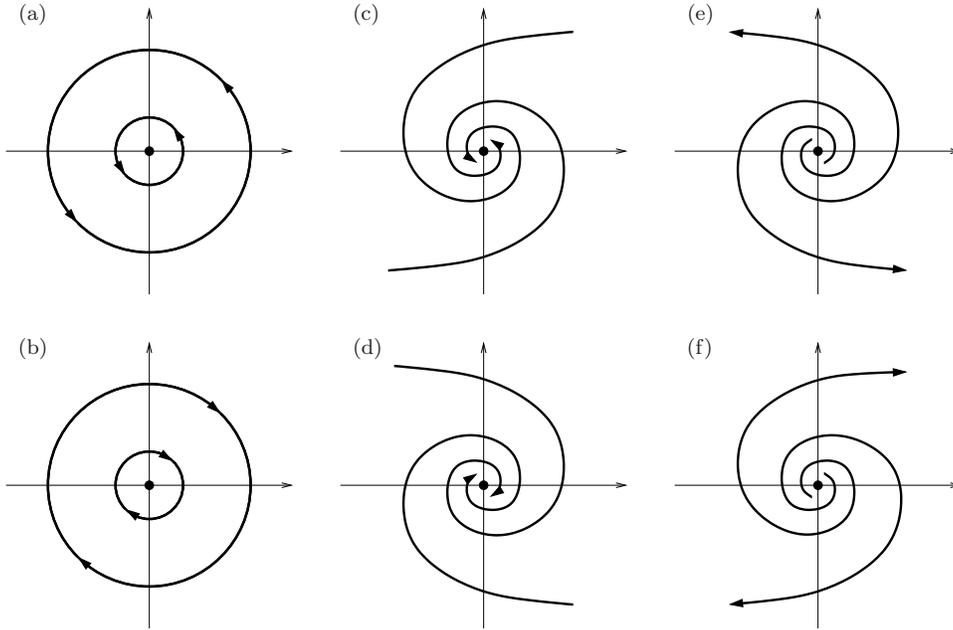


FIGURA 2.6. Diagrama de fase do sistema linear canônico com autovalores complexos nos casos em que (a)  $\alpha = 0$ ,  $\beta > 0$ ; (b)  $\alpha = 0$ ,  $\beta < 0$ ; (c)  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ; (d)  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$ ; (e)  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ; e (f)  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ .

Em resumo, em coordenadas polares, o sistema toma a forma

$$\begin{cases} r' = \alpha r, \\ \theta' = \beta. \end{cases}$$

Este sistema está, na verdade, desacoplado, com cada equação podendo ser resolvida independentemente da outra. As soluções são da forma

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \\ \theta(t) = \theta_0 + \beta t. \end{cases}$$

Voltando para as coordenadas cartesianas, temos

$$\begin{cases} x(t) = r_0 e^{\alpha t} \cos(\theta_0 + \beta t), \\ y(t) = r_0 e^{\alpha t} \sin(\theta_0 + \beta t). \end{cases}$$

As constantes  $r_0$  e  $\theta_0$  estão relacionadas às condições iniciais por  $r_0 \sin \theta_0 = x_0$  e  $r_0 \cos \theta_0 = y_0$ .

Observe que a parte real  $\alpha$  dos autovalores é responsável pelo crescimento/decrescimento da distância das soluções à origem, enquanto que a parte imaginária,  $\beta$ , dos autovalores é responsável pela rotação das soluções em torno da origem.

As órbitas nesse caso podem ser circunferências, caso  $\alpha = 0$ , ou espirais, caso  $\alpha \neq 0$ , sendo que as soluções podem “espiralar” em direção à origem, caso  $\alpha < 0$ , ou para longe da origem, caso  $\alpha > 0$ . O sinal de  $\beta$  indica o sentido da rotação em torno da origem, se horária, caso  $\beta < 0$ , ou anti-horária, caso  $\beta > 0$ . Observe que, nesse caso, necessariamente  $\beta \neq 0$ , caso contrário a matriz seria diagonalizável, com autovalores reais.

Os possíveis diagramas de fase nesse caso canônico de autovalores complexos estão ilustrados na figura 2.6.

Concluimos essa seção com uma outra maneira de se obter a equação para  $r$ : derivando a expressão

$$r^2 = x^2 + y^2$$

em relação a  $t$ , o que nos leva a

$$2rr' = 2xx' + 2yy' = 2rr' = 2x(\alpha x - \beta y) + 2y(\beta x + \alpha y) = 2\alpha(x^2 + y^2) = 2\alpha r^2.$$

Assim, temos

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r.$$

## Exercícios

2.1. Esboce o diagrama de fase dos seguintes sistemas lineares autônomos.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = 4x + y, \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x' = 2x, \\ y' = -3y, \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} x' = -2x, \\ y' = -3y, \end{cases} \\ \text{(d)} \begin{cases} x' = -2x, \\ y' = -2y, \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = -3y, \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} x' = -2x, \\ y' = -y, \end{cases} \\ \text{(g)} \begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \end{cases} & \text{(h)} \begin{cases} x' = 4x + y, \\ y' = 4y, \end{cases} & \text{(i)} \begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = -5x - y. \end{cases} \end{array}$$

## 3. Diagrama de fase no caso geral e classificação de sistemas

Vimos, acima, os casos canônicos, ou seja, em que a matriz  $A$  do sistema está em uma forma “padrão” mais simples. O caso geral pode ser resolvido com conceitos de Álgebra Linear, achando os autovalores da matriz  $A$  e mudando de base através de uma matriz  $P$  inversível tal que  $B = P^{-1}AP$  esteja em uma das formas canônicas acima. Teremos, assim, três casos distintos: i) sistema linear diagonalizável, com autovalores reais iguais ou não; ii) sistema linear com autovalores complexos conjugados; e iii) sistema linear com autovalores reais iguais não-diagonalizável. Cada caso tem os seus subcasos, como acima. Os diagramas de fase serão similares aos casos canônicos correspondentes, pois nada mais são do que deformações dos casos canônicos através de uma mudança de variáveis linear.

No caso diagonalizável, com autovalores reais distintos, os eixos do diagrama de fase da forma canônica serão levados em cada um dos autoespaços pela mudança de base. No caso diagonalizável com autovalores reais iguais, o diagrama de fase, na verdade, não terá nenhuma alteração. De fato, é possível mostrar que o único sistema que se enquadra nesse caso é o sistema já na forma canônica. No caso não-diagonalizável, com autovalores reais iguais, o eixo horizontal no diagrama de fase da forma canônica é levado no único autoespaço do sistema e todas as soluções se aproximam da origem tangentes a esse autoespaço. Finalmente, no caso complexo, a mudança de variáveis pode levar a uma certa excentricidade nas soluções, pois a mudança de variáveis pode levar circunferências em elipses.

Devemos ressaltar, no entanto, uma dificuldade extra na identificação do sentido de rotação das soluções de sistemas com autovalores complexos e o sentido de convergência para a origem dos sistemas não-diagonalizáveis. Na forma canônica do caso complexo, vimos que o sentido de rotação era dado pelo sinal do termo  $\beta$ , dado pela parte imaginária dos autovalores complexos. Mas como os autovalores são conjugados, da forma  $\alpha \pm i\beta$ , o sinal de  $\beta$  é apenas uma convenção, que costumamos tomar como positivo. O que vai determinar o sentido de rotação não é apenas o sinal escolhido para  $\beta$ , mas a mudança de base para a forma canônica. Essa mudança de base pode ou não incluir uma reflexão, que alteraria o sentido de rotação.

Uma maneira de determinar o sentido correto é analisando a mudança de base. Mas há uma forma mais fácil de determinar o sentido da rotação, que passa pelo sinal da expressão

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\perp,$$

onde  $\mathbf{u} = (x, y)$ ,  $\mathbf{u}^\perp = (-y, x)$  e  $\cdot$  denota o produto escalar. O vetor  $\mathbf{u}^\perp$  é o vetor perpendicular a  $\mathbf{u}$  no sentido anti-horário. Lembre-se que o sistema de equações diferenciais pode ser escrito em forma vetorial como

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}.$$

Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\perp = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}^\perp.$$

Se esse produto escalar for positivo, indica que a solução está avançando no sentido anti-horário, se for negativo, no sentido horário. Além disso, se o produto for nulo, teremos achado, na verdade, um autovetor. De fato, se  $\mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\perp = 0$ , então  $\mathbf{A}\mathbf{u}$  é perpendicular a  $\mathbf{u}^\perp$ , que por sua vez é perpendicular a  $\mathbf{u}$ . Isso quer dizer que  $\mathbf{A}\mathbf{u}$  é múltiplo de  $\mathbf{u}$ , digamos  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ . Portanto, achamos um autovalor  $\lambda$ , com autovetor  $\mathbf{u}$ .

O mais importante disso é observar que  $\mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\perp$  só se anula se  $\mathbf{u}$  for um autovetor, ou seja, ele não se anula em nenhuma outra direção. No caso complexo, como não há autovalor real, o produto escalar será sempre positivo ou sempre negativo. Isso significa que basta calcular o produto escalar para um vetor  $\mathbf{u}$ . Isso está feito abaixo em dois exemplos específicos. Da mesma forma, o sentido das órbitas no caso não-diagonalizável também pode ser descoberto através desse processo, como ilustrado em outro exemplo.

Exemplo 1: Considere o sistema linear autônomo

$$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$$

A matriz associada é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

Os autovalores são 2 e 4, com autoespaços correspondentes

$$V_2 = \{(x, y); y = -x\} = \{(s, -s); s \in \mathbb{R}\},$$

$$V_4 = \{(x, y); y = x\} = \{(s, s); s \in \mathbb{R}\}.$$

Este sistema corresponde à forma canônica associada à matriz diagonal

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A matriz mudança de base é formada por uma base de autovetores, por exemplo,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com essa matriz, temos  $P^{-1}AP = B$ . A matriz mudança de base leva os eixos da forma canônica nos autoespaços. Os autoespaços são invariantes pela equação original (isto é, se em algum instante  $t = t_0$  a solução pertence a um autoespaço, então a solução pertence ao autoespaço em todos os instantes  $t \in \mathbb{R}$ ). O autoespaço  $V_4$  corresponde ao autovalor com maior valor absoluto, logo as soluções fora dos autoespaços se afastam da origem tangentes ao autoespaço “mais lento”  $V_2$ . Assim, o diagrama de fase toma a forma da figura 3.1.

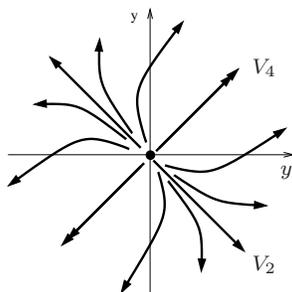


FIGURA 3.1. Diagrama de fase do sistema  $x' = 3x + y$ ,  $y' = x + 3y$ , com autovalores 2 e 4 e autoespaços  $y = -x$  e  $y = x$ , respectivamente.

Exemplo 2: Considere o sistema linear autônomo

$$\begin{cases} x' = 5x - 4y, \\ y' = 4x - 5y. \end{cases}$$

A matriz associada é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix},$$

Os autovalores são 3 e  $-3$ , com autoespaços correspondentes

$$V_3 = \{(x, y); y = x/2\} = \{(2s, s); s \in \mathbb{R}\},$$

$$V_{-3} = \{(x, y); y = 2x\} = \{(s, 2s); s \in \mathbb{R}\}.$$

Este sistema corresponde a uma forma canônica associada à matriz diagonal

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

O autoespaço  $V_3$  corresponde ao autovalor positivo, de maneira que as soluções nesse autoespaço se afastam da origem. O autoespaço  $V_{-3}$  corresponde ao autovalor negativo, de maneira que as soluções nesse autoespaço se aproximam da origem. Fora dos autoespaços, temos soluções que se assemelham a hipérbolas, como no caso canônico. Assim, o diagrama de fase toma a forma da figura 3.2.

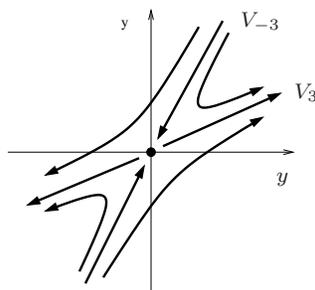


FIGURA 3.2. Diagrama de fase do sistema  $x' = 5x - 4y$ ,  $y' = 4x - 5y$ , com autovalores 3 e  $-3$  e autoespaços  $y = x/2$  e  $y = 2x$ , respectivamente.

Exemplo 3: Considere agora

$$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

A matriz associada é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Os autovalores são imaginários puros,  $\lambda_{\pm} = \pm i$ . Nesse caso, não há autoespaços reais. Uma forma canônica associada é dada pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz mudança de base pode ser obtida a partir dos autovetores complexos, mas não nos preocuparemos com isso. Basta termos em mente que o diagrama de fase será uma

deformação do diagrama da forma canônica. Como as soluções na forma canônica são circunferências, com a mudança de variáveis, as circunferências podem ser levadas em elipses. A informação mais delicada é quanto ao sentido de rotação ao longo dessas elipses. De fato, a mudança de base pode envolver reflexões, de maneira que o sentido das órbitas na forma original pode ser diferente do sentido na forma canônica. Isso é natural, pois ao escrevermos a forma canônica não fizemos nenhuma convenção em relação ao sinal da parte imaginária. Poderíamos muito bem ter considerado a forma canônica como sendo dada pela matriz

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essa forma canônica daria uma matriz mudança de base diferente, compensando a mudança no sentido das órbitas. Mas como não estamos calculando a matriz mudança de bases, devemos arrumar uma outra forma de descobrir o sentido das órbitas. Isso pode ser feito através do campo de vetores tangentes.

Vamos recordar a idéia do campo de vetores tangentes. Cada solução  $\{x(t), y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  descreve uma curva no plano  $xy$  que está naturalmente parametrizada por  $t \in \mathbb{R}$ . O vetor tangente a essa curva em cada ponto é dado pelas derivadas de cada coordenada, ou seja,  $(x'(t), y'(t))$ . Esse vetor tangente está relacionado com as coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  através da equação diferencial, que nesse caso nos dá  $x' = x - 2y$  e  $y' = x - y$ . Assim, em cada ponto  $(x, y)$ , passa uma curva-solução cujo vetor tangente é  $(x - 2y, x - y)$ . Esse conjunto de vetores tangentes, como função da posição, é o campo de vetores do sistema. Traçando esse campo de vetores, podemos identificar o sentido das órbitas. Na verdade, basta traçarmos um desses vetores para descobrirmos o sentido. Por exemplo, no ponto  $(x, y) = (1, 0)$ , o vetor tangente é  $(x', y') = (1, 1)$ . Como esse vetor tangente aponta para cima do eixo  $x$ , temos que a curva-solução que passa por esse ponto gira no sentido anti-horário (veja figura 3.3(a)). Observe ainda que a inclinação do vetor tangente nos dá uma dica da forma da elipse, mas não vamos nos preocupar em ser muito precisos com isso, agora (veja exercício 3.7). Baseado nisso, podemos fazer o esboço do diagrama de fase como na figura 3.3(b).

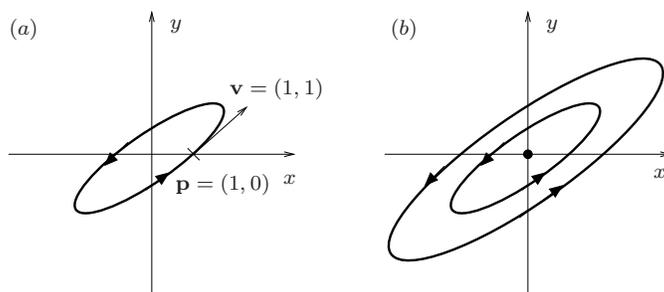


FIGURA 3.3. As figuras se referem ao sistema  $x' = x - 2y$ ,  $y' = x - y$ . A figura (a) mostra a órbita que passa pelo ponto  $\mathbf{p} = (1, 0)$ , e o vetor tangente  $\mathbf{v} = (1, 1)$ . A figura (b) mostra um esboço do diagrama de fase do sistema.

Exemplo 4: Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = 5x + 6y, \\ y' = -3x - y. \end{cases}$$

A matriz associada é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix},$$

Os autovalores são complexos,  $2 \pm 3i$ . Uma forma canônica associada é dada pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

A parte real dos autovalores é positiva, de modo que as soluções são espirais se afastando da origem. O sentido pode ser obtido através do campo de vetores, conforme feito no último exemplo. No ponto  $\mathbf{p} = (1, 0)$ , o vetor tangente é  $\mathbf{v} = (5, -3)$ , que aponta para baixo do eixo  $x$ , logo o sentido é horário. Assim, podemos esboçar o diagrama de fase conforme feito na figura 3.4.

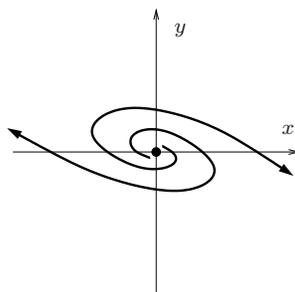


FIGURA 3.4. Esboço do diagrama de fase do sistema  $x' = 5x + 6y$ ,  $y' = -3x - y$ .

Exemplo 5: Como último exemplo, vamos considerar

$$\begin{cases} x' = -5x + 4y, \\ y' = -x - y. \end{cases}$$

A matriz associada é

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, há um autovalor duplo  $\lambda = -3$  com um autoespaço associado de dimensão um, de modo que a matriz associada não é diagonalizável. O autoespaço é

$$V_{-3} = \{(x, y); y = x/2\} = \{(2s, s); s \in \mathbb{R}\}.$$

Uma forma canônica desse sistema é dada pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

O autovalor é negativo, de modo que as soluções convergem para a origem. Todas as soluções convergem para a origem tangenciando o autoespaço  $V_{-3}$ . Mas essa tangência pode se dar de duas formas. De fato, observe que parte do autoespaço  $V_{-3}$  se encontra no primeiro quadrante, enquanto que a outra parte se encontra no terceiro quadrante. A primeira parte se refere a  $y = x/2$ , com  $x, y > 0$ , e a segunda a  $y = x/2$ , com  $x, y < 0$ . Dessa forma, as soluções podem se aproximar da origem, tangentes a  $V_{-3}$ , tanto pelo primeiro quadrante quanto pelo terceiro. Mais precisamente, o autoespaço divide o plano em dois semiplanos. Em um deles, as soluções se aproximam por um quadrante, enquanto que no outro, as soluções se aproximam pelo outro quadrante. Mais uma vez, podemos determinar a forma correta através do campo de vetores tangentes. Por exemplo, no ponto  $\mathbf{p} = (0, 1)$ , o vetor tangente é  $\mathbf{v} = (4, -1)$ , que aponta para dentro do primeiro quadrante (tomando como base do vetor o ponto  $\mathbf{p} = (0, 1)$ ). Assim, as soluções “acima” do autoespaço, ou seja, em  $y > x/2$ , se aproximam pelo primeiro quadrante, enquanto que as soluções “abaixo” do autoespaço, ou seja, em  $y < x/2$ , se aproximam pelo terceiro quadrante. Isso também poderia ser deduzido tomando outros pontos fora do autoespaço, como, por exemplo,  $\mathbf{p} = (0, -1)$ , para o qual  $\mathbf{v} = (-4, 1)$ , ou  $\mathbf{p} = (1, 0)$ , para o qual  $\mathbf{v} = (-5, -1)$ , e assim por diante. Assim, podemos esboçar o diagrama de fase conforme feito na figura 3.5.

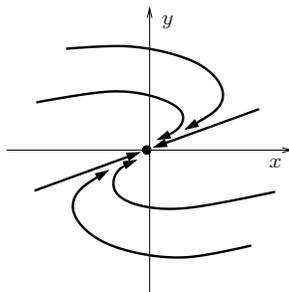


FIGURA 3.5. Esboço do diagrama de fase do sistema  $x' = -5x + 4y$ ,  $y' = -x - y$ .

Para completar, observamos que nos caso não-diagonalizável com autovalor real,  $\mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\perp$  não muda de sinal. Ele se anula na direção do autovetor, mas é sempre não-negativo ou sempre não-positivo.

**3.1. Classificação dos sistemas lineares autônomos.** Em um sistema linear autônomo homogêneo, a origem é sempre um ponto fixo, de forma que podemos classificar um tal sistema de acordo com o comportamento das soluções em relação ao ponto fixo. Isso é feito de forma similar à caracterização dos pontos fixos de sistemas unidimensionais.

Vamos dizer que o sistema é *atrator* ou que a origem é um ponto fixo *atrator* se os autovalores forem reais negativos, distintos ou não, ou se os autovalores forem complexos com parte real negativa. Nesse caso, todas as soluções convergem para a origem, justificando a classificação da origem como um ponto atrator.

Vamos dizer que o sistema é *repulsor* ou que a origem é um ponto fixo *repulsor* se os autovalores forem reais positivos, distintos ou não, ou se os autovalores forem complexos

com a parte real positiva. Nesse caso, todas as soluções se afastam da origem, justificando a classificação da origem como um ponto repulsor.

Vamos dizer que o sistema é *de sela* ou que a origem é um ponto fixo *de sela* se os autovalores forem reais distintos, com sinais opostos. Nesse caso, as soluções no autoespaço associado ao autovalor negativo convergem para a origem, as soluções no autoespaço associado ao autovalor positivo se afastam da origem e as outras soluções forma curvas similares a hipérboles, daí a classificação.

Vamos dizer que o sistema é um *centro* ou que a origem é um ponto fixo do tipo *centro* se os autovalores forem imaginários puros. Nesse caso, as órbitas são elipses em volta da origem. As soluções nem convergem nem divergem da origem.

Nos casos restantes, ou seja, quando algum autovalor é nulo, dizemos simplesmente que o sistema é *degenerado*.

Os repulsores e atratores podem ainda ter classificações mais específicas. Por exemplo, se o sistema for diagonalizável com autovalores reais distintos ou iguais, chamamos a origem de *nó*, que pode, então, ser um nó atrator, se os autovalores forem negativos, ou um nó repulsor, se os autovalores forem positivos. Se os autovalores forem iguais e o sistema não for diagonalizável, temos um *nó impróprio*, que pode ser atrator ou repulsor, dependendo do sinal do autovalor. Agora, se os autovalores forem complexos com parte real não-nula, então a origem é chamada de *foco*, que pode ser um foco atrator, se a parte real for negativa, ou um foco repulsor, se a parte real for positiva.

Casos típicos dessas várias classificações são ilustrados na figura 3.6. Exemplos de casos degenerados aparecem na figura 2.4.

**3.2. Diagrama de fase do sistema massa-mola amortecido.** Conforme visto anteriormente, o sistema massa-mola amortecido é descrito pela equação de segunda ordem

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt}.$$

Introduzindo a velocidade como uma nova variável, podemos rescrever essa equação como um sistema de equações de primeira ordem, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}y. \end{cases}$$

Este é um sistema linear, que pode ser analisado através dos autovalores da matriz associada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\alpha/m \end{bmatrix}.$$

Os autovalores são as raízes do polinômio

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\lambda + \frac{k}{m}.$$

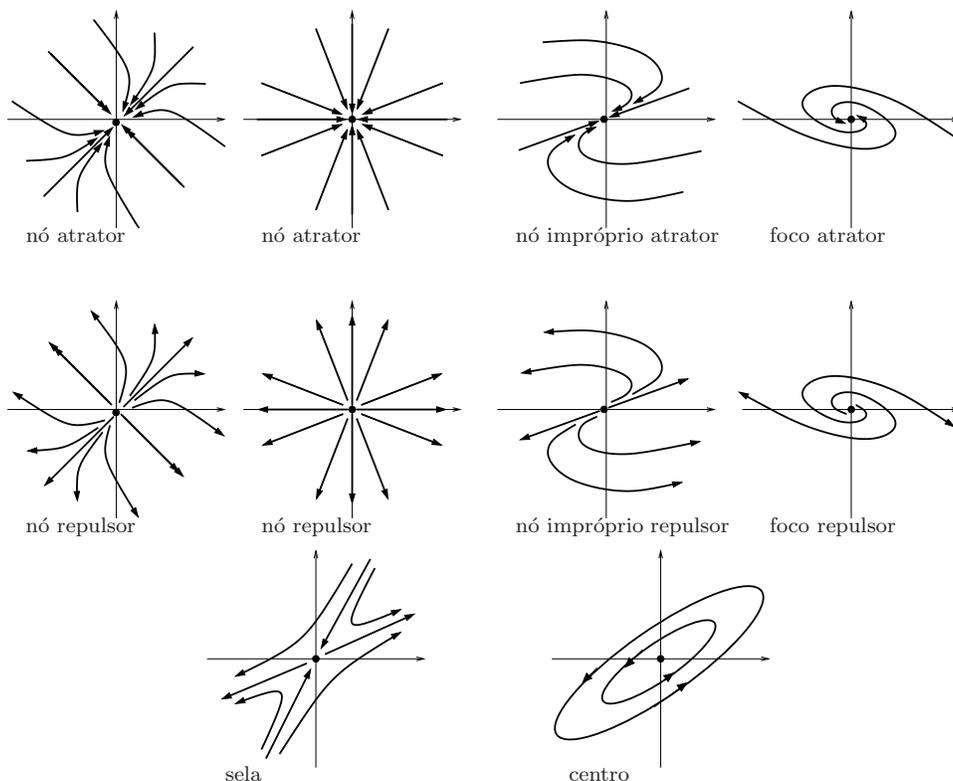


FIGURA 3.6. Classificação de sistemas lineares.

que coincide com as raízes do polinômio característico da equação de segunda ordem original. Como na análise feita diretamente da equação de segunda ordem, vemos que temos quatro situações distintas (incluindo o caso sem amortecimento). As situações são analisadas abaixo e os diagramas de fase correspondentes aparecem na figura 3.7.

Caso superamortecido ( $\alpha^2 > 4mk$ ): Nesse caso, temos dois autovalores reais distintos  $\lambda_{\pm}$ . Observe que  $0 < \alpha^2 - 4mk < \alpha^2$ , logo  $\sqrt{\alpha^2 - 4mk} < \alpha$  e ambas as raízes são negativas. Nesse caso, a origem é um nó atrator. Os autoespaços associados são

$$V_{\lambda_+} = \{(x, y); y = \lambda_+ x\},$$

$$V_{\lambda_-} = \{(x, y); y = \lambda_- x\}.$$

Observe que ambos tem inclinação negativa e as inclinações se aproximam de  $-\alpha/2m$ , quando  $\alpha^2$  se aproxima de  $4mk$ .

Caso criticamente amortecido ( $\alpha^2 = 4mk$ ): Nesse caso, temos um autovalor duplo  $\lambda = -\alpha/2m$  e a matriz não é diagonalizável, pois o autoespaço é unidimensional, dado por

$$V_{\lambda} = \{(x, y); y = -\alpha x/2m\}.$$

Nesse caso, a origem é um nó impróprio atrator.

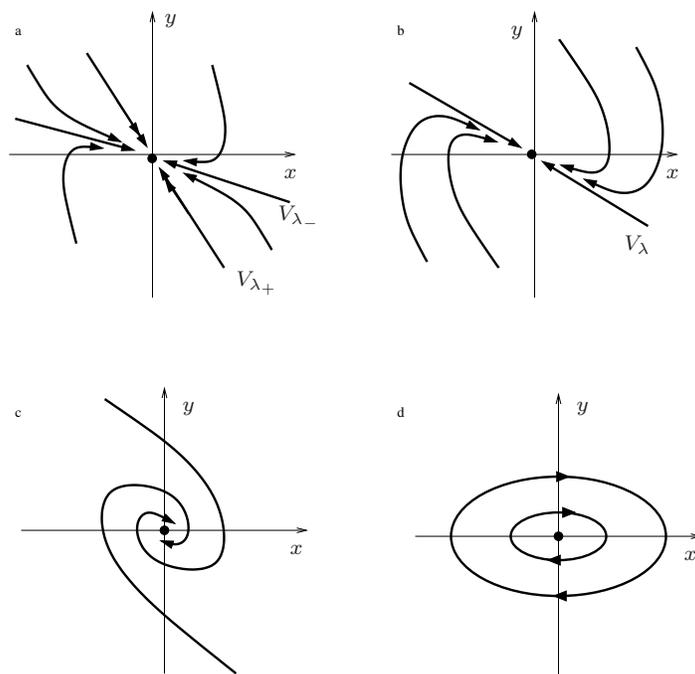


FIGURA 3.7. Esboço do diagrama de fase do sistema massa-mola nos casos (a) superamortecido (onde  $V_{\lambda_+}$  e  $V_{\lambda_-}$  são os autoespaços dos autovalores  $\lambda_p m < 0$ ), (b) criticamente amortecido (onde  $V_{\lambda}$  é o autoespaço unidimensional do único autovalor  $\lambda$ ), (c) subamortecido, e (d) não-amortecido.

Caso subamortecido ( $0 < \alpha^2 < 4mk$ ): Nesse caso, os autovalores são complexos com parte real negativa,  $\lambda_{\pm} = -\alpha/2m \pm i\beta$ , onde  $\beta = \sqrt{4mk - \alpha^2}$ . A origem é um foco atrator. Como no ponto  $\mathbf{p} = (1, 0)$  temos o vetor tangente  $\mathbf{v} = (0, -k/m)$ , vemos que as soluções giram no sentido horário.

Caso não-amortecido ( $0 = \alpha^2 < 4mk$ ): No caso sem amortecimento, os autovalores são imaginários, dados por  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{k/m}$ . As soluções giram no sentido horário. A origem é um centro.

**3.3. Sistemas lineares autônomos não-homogêneos.** Vamos considerar agora os sistemas autônomos não-homogêneos, que são da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + e, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + h. \end{cases}$$

Vimos que sistemas autônomos são tais que a origem é sempre um ponto fixo e que a dinâmica interessante está determinado pelo que acontece em torno da origem. No sistema acima, porém, a origem não é um ponto fixo, pois na origem  $(x, y) = 0$ , o campo de vetores

é tal que  $(x', y') = (e, h) \neq (0, 0)$ . Mas é fácil transformar esse sistema em um sistema autônomo homogêneo.

De fato, observe primeiro que os pontos fixos são dados pela solução do sistema linear

$$\begin{cases} ax + by = -e, \\ cx + dy = -h. \end{cases}$$

Vamos supor que essa solução seja única, dada por  $(x^*, y^*)$ . Então  $(x^*, y^*)$  é o ponto fixo do sistema. Vamos agora fazer uma mudança de variáveis, passando a origem para esse ponto fixo. Isso é feito através da translação

$$\begin{cases} X = x - x^*, \\ Y = y - y^*. \end{cases}$$

A origem  $(X, Y) = (0, 0)$  do eixo  $XY$  corresponde ao ponto  $(x, y) = (x^*, y^*)$  no eixo  $xy$ . Agora, a cada solução representada por  $(x(t), y(t))$  no eixo  $xy$ , temos a representação  $(X(t), Y(t))$  no eixo  $XY$  dada por

$$X(t) = x(t) - x^*, \quad Y(t) = y(t) - y^*.$$

Nessa relação, válida para cada solução,  $x^*$  e  $y^*$  são constantes em relação à variável  $t$ . Assim, ao derivarmos essas expressões em relação a  $t$ , temos

$$X'(t) = x'(t), \quad Y'(t) = y'(t).$$

Substituindo pelas expressões nas equações para  $x'$  e  $y'$ , e omitindo a dependência em  $t$  para simplificar a notação, temos

$$X' = x' = ax + by + e, \quad Y' = y' = cx + dy + h.$$

Utilizando, agora, a translação  $x = x^* + X$  e  $y = y^* + Y$ , chegamos a

$$\begin{aligned} X' &= aX + bY + ax^* + by^* + e, \\ Y' &= cX + dY + cx^* + dy^* + h. \end{aligned}$$

Como  $x^*$  e  $y^*$  satisfazem

$$\begin{cases} ax^* + by^* = -e, \\ cx^* + dy^* = -h. \end{cases}$$

obtemos, finalmente, o sistema

$$\begin{aligned} X' &= aX + bY, \\ Y' &= cX + dY. \end{aligned}$$

que é um sistema linear autônomo homogêneo.

Como exemplo, considere o sistema

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 3, \\ y' = x - y + 1. \end{cases}$$

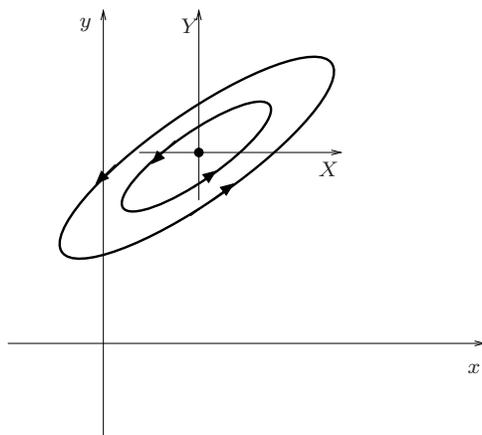


FIGURA 3.8. Órbitas do sistema  $x' = x - 2y$ ,  $y' = x - y$  no plano trasladado  $XY$ , dado por  $X = x - 1$ ,  $Y = y - 2$ , e no plano original  $xy$ .

O ponto fixo é dado por

$$\begin{cases} x - 2y = -3, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

cuja solução é  $(x^*, y^*) = (1, 2)$ . Considerando a translação

$$X = x - 1, \quad Y = y - 2,$$

o sistema se escreve, no eixo  $XY$ , na forma linear autônoma homogênea

$$\begin{cases} X' = X - 2Y, \\ Y' = X - Y. \end{cases}$$

Esse sistema foi estudado acima e tem autovalores  $\pm i$ , sendo um sistema do tipo centro, com rotação no sentido anti-horário. As órbitas desse sistema, tanto no eixo  $XY$  como no eixo  $xy$  estão ilustradas na figura 3.8. Observe o papel da translação, apenas deslocando o diagrama de fase para fora da origem.

### Exercícios

**3.1.** Esboce o diagrama de fase dos seguintes sistemas lineares autônomos.

(a) $\begin{cases} x' = 4x - 4y, \\ y' = -x + 4y, \end{cases}$	(b) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x + 3y, \end{cases}$	(c) $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = 2x, \end{cases}$
(d) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - 2y, \end{cases}$	(e) $\begin{cases} x' = -4x - 5y, \\ y' = 10x + 6y, \end{cases}$	(f) $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x, \end{cases}$
(g) $\begin{cases} x' = -2x + 2y, \\ y' = -4x + 2y, \end{cases}$	(h) $\begin{cases} x' = -4x - y, \\ y' = -2x - 5y, \end{cases}$	(i) $\begin{cases} x' = -5x + y, \\ y' = 2x - 4y. \end{cases}$

**3.2.** Classifique os sistemas do exercício anterior, indicando se eles são atratores, repulsores, de sela ou centro. E classifique os atratores e repulsores indicando se eles são nós, nós impróprios, ou focos.

**3.3.** Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x' = 3x + (3\alpha - \alpha^2)y, \\ y' = \alpha y, \end{cases}$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro real. Esboce o diagrama de fase do sistema nos casos em que i)  $\alpha < 0$ , ii)  $\alpha = 0$ , iii)  $0 < \alpha < 3$ , iv)  $\alpha = 3$ , e v)  $\alpha > 3$ .

**3.4.** Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x' = x + (\alpha - 1)^2 y, \\ y' = \alpha y, \end{cases}$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro real.

(a) Determine os valores de  $\alpha$  para os quais o sistema é i) hiperbólico atrator, ii) hiperbólico repulsor, iii) hiperbólico de sela, iv) não-hiperbólico.

(b) Esboce o diagrama de fase do sistema em cada um dos casos hiperbólicos.

**3.5.** Mostre que uma matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

tem  $\lambda$  como o único autovalor e cujo autoespaço associado é unidimensional sempre que  $\beta \neq 0$ . O autoespaço depende de  $\beta$ ? Agora supondo  $\lambda < 0$ , esboce o diagrama de fase do sistema linear

$$\begin{cases} x' = \lambda x + \beta y, \\ y' = \lambda y, \end{cases}$$

nos casos em que  $\beta > 0$  e  $\beta < 0$  e observe como o diagrama varia com  $\beta$ .

**3.6.** As coordenadas cartesianas  $(x(t), y(t))$  da trajetória de uma partícula de carga elétrica  $q \neq 0$  e massa  $m > 0$  em movimento não-relativístico em um campo magnético uniforme perpendicular ao movimento da partícula é dado pelo sistema

$$\begin{cases} mx'' - qBy' = 0, \\ my'' + qBx' = 0, \end{cases}$$

onde  $B \neq 0$  é a intensidade do campo magnético. Mostre que as soluções do sistema são periódicas, ache o período delas e determine se o período depende das condições iniciais ou não e, caso positivo, como é essa dependência.

**3.7.** Seja  $A$  uma matriz com autovalores imaginários puros. Nesse caso, sabemos que as órbitas formam elipses. Vimos como achar o sentido de rotação das órbitas através do vetor  $A\mathbf{u}$ , onde  $\mathbf{u} = (x, y)$ . Mais precisamente, o sentido de rotação é dado pelo sinal de  $A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\perp$ , onde  $\mathbf{u}^\perp = (-y, x)$ . E quanto à forma das elipses? Como podemos achar os eixos principais das elipses? Isso pode ser feito também a partir dos vetores

**Au.** De fato, observe que os eixos principais dessas elipses coincidem com os pontos onde os vetores  $A\mathbf{u}$  são perpendiculares a  $\mathbf{u}$ . Assim, basta analisarmos as soluções da equação  $A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ . As soluções serão duas retas perpendiculares, indicando os eixos principais.

(a) No exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

resolva a equação quadrática

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = x^2 - xy - y^2 = 0,$$

e mostre que os eixos principais têm inclinações  $(1 + \sqrt{5})/2$  e  $(1 - \sqrt{5})/2$ .

(b) Considere, agora, o sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + 2y, \\ y' = -4x + 2y, \end{cases}$$

com autovalores imaginários puros. Ache os eixos principais das órbitas desse sistema.

**3.8.** Faça um esboço do diagrama de fase do sistema linear

$$\begin{cases} x' = -x + 10y - 8, \\ y' = -4x - 5y + 13. \end{cases}$$

**3.9.** Tem sido observado que as populações dos torcedores do flamengo e do fluminense no Brasil todo satisfazem um sistema do tipo predador-presa linear dado por

$$\begin{cases} x' = \pi y - 2, 5\pi, \\ y' = -\pi x + 25\pi, \end{cases}$$

onde  $x$  é a população de torcedores do flamengo e  $y$ , a do fluminense. As populações estão medidas em milhões de indivíduos e a unidade de tempo é de um ano. Mostre que as soluções são periódicas, descubra o período das soluções e encontre o valor médio de torcedores dos dois clubes. Responda, ainda, qual das torcidas se comporta como predador e qual se comporta como presa.

**3.10.** Um cientista louco conseguiu materializar os astros do desenho animado Tom e Jerry e começou a cloná-los a uma razão de  $e$  clones de Tom por minuto e  $h$  clones de Jerry por minuto. É claro que os clones de um personagem fazem de tudo para aniquilar os clones do outro. Assim, a quantidade  $x$  de clones de Tom e a quantidade  $y$  de clones de Jerry satisfazem aproximadamente uma equação da forma

$$\begin{cases} x' = -by + e, \\ y' = -cx + h, \end{cases}$$

onde  $b$  e  $c$  são positivos.

- (a) Iguale o lado direito de cada equação acima para achar um ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  do sistema, ou seja, as populações de equilíbrio.  
 (b) Faça  $X = x - x^*$  e  $Y = y - y^*$  e obtenha o sistema linear

$$\begin{cases} X' = -bY, \\ Y' = -cX, \end{cases}$$

que rege a variação das populações em relação à população de equilíbrio.

- (c) Classifique esse tipo de sistema, esboce o diagrama de fase nas variáveis originais  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  e interprete o resultado em termos das populações de clones.

**3.11.** Em um certo meio-ambiente em equilíbrio, as populações de raposas e coelhos permanecem constantes em valores dados respectivamente por  $x^*$  e  $y^*$ . Pequenas variações da situação de equilíbrio podem ser representadas pelas variáveis  $X = x - x^*$  e  $Y = y - y^*$ , onde  $x$  e  $y$  são as populações de raposas e coelhos, respectivamente.

- (a) Suponha que essas pequenas variações satisfaçam o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} X' = bY, \\ Y' = -cX, \end{cases}$$

onde  $b$  e  $c$  são positivos e os sinais indicam que as raposas são os predadores e os coelhos, as presas. Classifique esse sistema, esboce o diagrama de fase nas variáveis originais  $x$  e  $y$  e interprete o resultado em termos das populações de raposas e coelhos.

- (b) Suponha, agora, que as pequenas variações da situação de equilíbrio satisfaçam o sistema

$$\begin{cases} X' = -aX + bY, \\ Y' = -cX - dY, \end{cases}$$

onde os novos termos, com  $a, d > 0$ , indicam que o meio ambiente tende a não suportar crescimentos além do ponto de equilíbrio de cada espécie. Classifique esse sistema, trace o seu diagrama de fase nas variáveis  $x$  e  $y$  e interprete o resultado em termos das populações de raposas e coelhos.

**3.12.** Em um modelo simples de ajuste de preços de uma mercadoria, temos que a variação  $p'$  do preço  $p$  em relação ao tempo é proporcional à diferença entre a quantidade disponível  $q$  de mercadoria e uma quantidade de referência  $q^*$ , de modo que

$$p' = -\alpha(q - q^*),$$

onde  $\alpha > 0$ . O sinal de menos indica que o preço deve cair caso haja excesso de estoque e aumentar caso contrário. Por outro lado, a quantidade de mercadoria  $q$  pode ser controlada de acordo com a valorização da mercadoria, ou seja, proporcionalmente à diferença do preço  $p$  da mercadoria e um preço de referência  $p^*$ , de modo que

$$q' = \beta(p - p^*),$$

onde  $\beta > 0$  Conforme feito nos exercícios anteriores, escreva uma equação linear homogênea para as diferenças de preço  $P = p - p^*$  e estoque  $Q = q - q^*$  em relação aos valores de equilíbrio e analise o sistema obtido.

- 3.13.** Implemente o programa Scilab abaixo usado para traçar numericamente o diagrama de fase esboçado na figura 3.5.

```
// Traça o campo de vetores e órbitas de um
// sistema linear u'=Au

deff("[ff]=f(t,u)", ["ff=A*u"]);
A=[-5, 4;-1,-1];
xmin=-1; xmax=1; dx=0.2;
ymin=-1; ymax=1; dy=0.2;
x=[xmin:dx:xmax];
y=[ymin:dy:ymax];

xset("thickness",1);
fchamp(f,0,x,y);

xset("thickness",3);
t0=0; tfinal=2;dt=0.1;
t=[t0:dt:tfinal];
u01=[1;-0.5];
u1=ode(u01,0,t,f);
u02=[-1;0.5];
u2=ode(u02,0,t,f);
u03=[1;0.5];
u3=ode(u03,0,t,f);
u04=[-1;-0.5];
u4=ode(u04,0,t,f);
u05=[1;-1];
u5=ode(u05,0,t,f);
u06=[-1;1];
u6=ode(u06,0,t,f);
plot2d(u1(1,:),u1(2,:),1,"000");
plot2d(u2(1,:),u2(2,:),1,"000");
plot2d(u3(1,:),u3(2,:),1,"000");
plot2d(u4(1,:),u4(2,:),1,"000");
plot2d(u5(1,:),u5(2,:),1,"000");
plot2d(u6(1,:),u6(2,:),1,"000");
xset("thickness",1);
```

**3.14.** Modifique o programa Scilab 3.13 para traçar o campo de vetores e algumas órbitas de cada um dos sistemas no exercício 3.1.

#### 4. \*Exponencial de matrizes e soluções de sistemas autônomos

Como vimos, podemos escrever sistemas da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases}$$

na forma vetorial

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u},$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Como mencionamos anteriormente, somos tentados a fazer uma analogia com o caso escalar  $dx/dt = ax$ , cuja solução geral é  $x(t) = C \exp(at)$ , e escrever, no caso vetorial,

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA}\mathbf{C},$$

onde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

é um vetor de “constantes de integração”. Essa analogia pode de fato ser feita. Para isso, há várias maneiras de se definir a exponencial de uma matriz quadrada, como  $tA$ . Essa exponencial  $\exp(tA)$  também é uma matriz quadrada.

No caso escalar, temos a expansão em séries de potências:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Como sabemos calcular potências de matrizes quadradas, podemos definir a exponencial de uma matriz quadrada  $B$  como sendo a matriz quadrada dada pela série

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}.$$

É possível mostrar que essa série converge absolutamente. Além disso, com essa definição, podemos derivar termo a termo e verificar que  $\mathbf{u}(t) = \exp(tA)\mathbf{C}$  é, de fato, solução da

equação diferencial vetorial:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{d}{dt} e^{tA} \mathbf{C} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) \mathbf{C} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1} A^n}{n!} \right) \mathbf{C} \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} \right) \mathbf{C} = A \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} \right) \mathbf{C} = A e^{tA} \mathbf{C} = A\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Da mesma forma como há outras expressões para a exponencial de um número real, há outras maneiras de se definir a exponencial de uma matriz.

Sistemas lineares diagonalizáveis com autovalores reais: No caso de uma matriz diagonal

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix},$$

temos

$$B^n = \begin{bmatrix} b_1^n & 0 \\ 0 & b_2^n \end{bmatrix},$$

logo

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} b_1^n & 0 \\ 0 & b_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_2^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{b_1} & 0 \\ 0 & e^{b_2} \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, as soluções podem ser escritas como

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} e^{ta} & 0 \\ 0 & e^{td} \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 e^{at} \\ C_2 e^{bt} \end{pmatrix}.$$

Sistemas lineares não-diagonalizáveis com autovalores reais iguais: No caso de uma matriz não-diagonalizável da forma

$$B = \begin{bmatrix} b & \beta \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

temos

$$B^n = \begin{bmatrix} b^n & n\beta b^{n-1} \\ 0 & b^n \end{bmatrix},$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^B &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} b^n & n\beta b^{n-1} \\ 0 & b^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\beta b^{n-1}}{n!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^b & \beta e^b \\ 0 & e^b \end{bmatrix} = e^b \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando essa fórmula a um sistema da forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u},$$

com

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

obtemos a solução

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \mathbf{C} = e^{at} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} e^{at}(C_1 + C_2 t) \\ C_2 e^{at} \end{pmatrix}.$$

Sistemas lineares com autovalores complexos: No caso de uma matriz com autovalores complexos conjugados, caímos em séries envolvendo as séries de senos e cossenos. Deixamos esse caso para o leitor.

**4.1. Sistemas lineares - soluções explícitas no caso geral.** Vimos, acima, os casos canônicos. O caso geral pode ser resolvido com conceitos de Álgebra Linear, achando os autovalores e autovetores da matriz  $A$  e mudando a base através de uma matriz  $P$  inversível tal que  $B = P^{-1}AP$  esteja em uma das formas canônicas acima. Dessa forma,

$$e^{tA} = e^{tPBP^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tPBP^{-1})^n}{n!}.$$

Como

$$(tPBP^{-1})^n = (tPBP^{-1})(tPBP^{-1}) \dots (tPBP^{-1}) = t^n P B^n P^{-1}.$$

Temos

$$e^{tA} = P \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!} \right) P^{-1} = P e^{tB} P^{-1}.$$

Assim, conhecendo a exponencial da matriz canônica  $tB$  e as matrizes de mudança de base  $P$  e  $P^{-1}$ , podemos achar a solução geral

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{C} = P e^{tB} P^{-1} \mathbf{C}.$$

Mas esse é um cálculo bem laborioso. Há uma forma mais simples. De fato, digamos que a matriz canônica seja da forma

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Então

$$e^{tB} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}.$$

Assim, as coordenadas da solução

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{C} = P e^{tB} P^{-1} \mathbf{C}.$$

serão combinações lineares das funções  $\exp(\lambda t)$  e  $\exp(\mu t)$ . Chegamos a

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t} \\ \gamma e^{\lambda t} + \delta e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

Mas nem toda função dessa forma é solução. Jogando essa expressão na equação, obtemos relações entre os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  que nos dão a solução geral. A solução geral é

uma família de soluções parametrizada por dois parâmetros, no caso de sistemas de duas equações.

Como exemplo, vamos considerar o sistema

$$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$$

Os autovalores são 2 e 4. Assim, procuramos soluções da forma

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} + \beta e^{4t} \\ \gamma e^{2t} + \delta e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Jogando essa expressão no sistema e juntando os coeficientes de cada função exponencial, obtemos as relações

$$\gamma = -\alpha, \quad \delta = \beta.$$

Assim, a solução geral do sistema acima é

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} + \beta e^{4t} \\ -\alpha e^{2t} + \beta e^{4t} \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Os vetores à direita são autovalores linearmente independentes da matriz associada ao sistema.

## 5. \*Sistemas lineares não-homogêneos não-autônomos

**5.1. Fórmula de variação de parâmetros.** Vamos considerar sistemas bidimensionais lineares não-homogêneos não-autônomos com coeficientes constantes, i.e. da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + f(t), \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t), \end{cases}$$

Tais sistemas podem ser escritos em forma vetorial:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} + \mathbf{F}(t),$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Podemos, também nesse caso, fazer uma analogia com o caso escalar. No caso de uma equação escalar  $dx/dt = ax + f(t)$ , a solução geral é dada via fator de integração:

$$\frac{d}{dt} (x(t)e^{-at}) = \left( \frac{dx(t)}{dt} - ax(t) \right) e^{-at} = f(t)e^{-at}$$

que pode ser resolvido explicitamente via integração direta:

$$x(t)e^{-at} = C + \int_0^t e^{-as} f(s) ds.$$

Logo,

$$x(t) = Ce^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-as} f(s) ds.$$

No caso vetorial, temos, de maneira análoga,

$$\frac{d}{dt} (e^{-tA} \mathbf{u}(t)) = \left( e^{-tA} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} - Ae^{-tA} \mathbf{u}(t) \right) = e^{-tA} \left( \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} - A\mathbf{u}(t) \right) = e^{-tA} \mathbf{F}(t).$$

que pode ser resolvido explicitamente via integração direta:

$$e^{-tA} \mathbf{u}(t) = \mathbf{C} + \int_0^t e^{-sA} \mathbf{F}(s) ds.$$

Logo, chegamos à *solução geral*

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{C} + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} \mathbf{F}(s) ds.$$

Esta é a chamada *fórmula de variação de parâmetros*, pois ela pode ser vista como tendo sido motivada pela solução do problema homogêneo

$$e^{tA} \mathbf{C}$$

quando se permite que o vetor  $\mathbf{C}$  de constantes de integração “varie” com o tempo, i.e.  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(t)$ . Assim, procurando uma solução da equação não-homogênea na forma

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{C}(t),$$

chegamos à fórmula acima.

### 5.2. Soluções gerais e particulares.

Da fórmula para a *solução geral*

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{C} + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} \mathbf{F}(s) ds,$$

vemos que o primeiro termo é solução da equação homogênea associada. Observe que se somarmos uma solução qualquer da equação homogênea a uma solução da equação não-homogênea, obtemos uma outra solução da equação não-homogênea. Isso nos leva a uma simplificação do problema: basta acharmos uma solução particular da equação não-homogênea que a solução geral será obtida somando a ela a solução geral da equação homogênea associada.

Em outras palavras, seja  $\mathbf{u}_p$  uma solução particular da equação não-homogênea,

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = A\mathbf{u}_p + \mathbf{F}(t),$$

e seja  $\mathbf{u}_h = \exp(tA)\mathbf{C}$  a solução geral da equação homogênea associada,

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} = A\mathbf{u}_h.$$

Então

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p$$

é a solução geral da equação não-homogênea:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p) = \frac{d\mathbf{u}_h}{dt} + \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = A\mathbf{u}_h + A\mathbf{u}_p + \mathbf{F}(t) = A(\mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p) + \mathbf{F}(t) = A\mathbf{u} + \mathbf{F}(t).$$



## CAPÍTULO 7

# Sistemas Bidimensionais Não-Lineares

### 1. Introdução

Nesse capítulo, estudaremos equações não-lineares bidimensionais autônomas, ou seja, da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases}$$

A dinâmica de equações não-lineares em duas dimensões é, em geral, bem mais rica que em dimensão um. E bem mais complicada, também. Como em dimensão um, sistemas não-lineares bidimensionais podem possuir diversos pontos fixos, como ilustrado na figura 1.1.

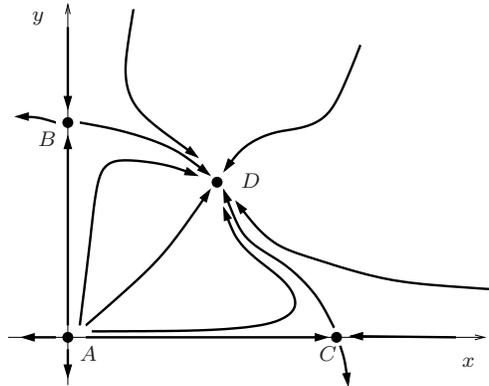


FIGURA 1.1. Esboço das órbitas de um sistema não-linear, com pontos fixos  $A, B, C$  e  $D$

Porém, o comportamento das órbitas entre os pontos fixos é mais complicado. Em dimensão um, o comportamento entre os pontos fixos pode ser determinado pelo comportamento próximo a cada ponto fixo. Entre dois pontos fixos, só pode existir uma órbita conectando os dois pontos fixos e o sentido dessa órbita pode ser deduzido a partir do comportamento próximo aos pontos fixos. Em dimensão maior, porém, várias situações podem ocorrer, como ilustra a figura 1.2. Observe que na figura 1.2(b), há uma conexão entre os dois pontos fixos, ou seja, uma órbita que “nasce” no ponto fixo à esquerda (limite de  $(x(t), y(t))$ )

quando  $t \rightarrow -\infty$ ) e “morre” no ponto fixo à direita (limite de  $(x(t), y(t))$  quando  $t \rightarrow +\infty$ ). Nos outros diagramas, não há essa conexão.

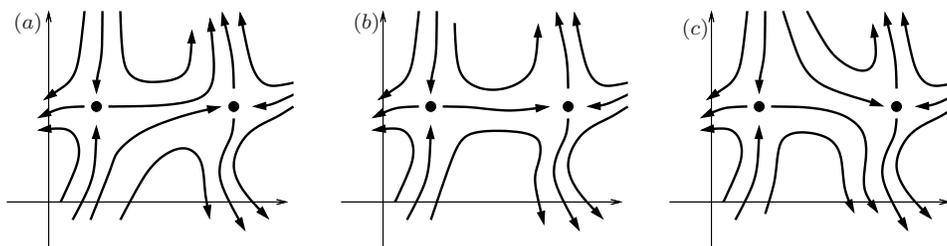


FIGURA 1.2. Três diagramas de fase qualitativamente diferentes com dois pontos fixos de sela.

O comportamento das órbitas entre os pontos fixos é chamado de “global”, em contraposição ao comportamento “local”, próximo a pontos fixos. O comportamento local pode ser aferido fazendo-se uma expansão em série de Taylor dos termos não lineares da equação em torno do ponto fixo. O comportamento global, porém, é muito mais delicado. Começaremos com o estudo local. Em seguida, passaremos ao estudo global de alguns sistemas não-lineares. Mas primeiramente, algumas observações sobre a existência e a unicidade de soluções.

**1.1. Existência e unicidade de soluções.** Assim, como no caso de uma única equação de primeira ordem, devemos nos preocupar com a existência e a unicidade de soluções de sistemas de equações. Os dois casos são semelhantes, com a regularidade dos termos  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  sendo crucial. As condições são análogas: a continuidade dessas duas funções garante a existência, enquanto que a diferenciabilidade, com derivadas parciais contínuas por partes, garante a unicidade de soluções com uma dada condição inicial.

Consideramos que essas questões foram suficientemente discutidas no caso de uma única equação. Vamos dar preferência, de agora em diante, ao estudo do comportamento das soluções quando a existência e unicidade são válidas. Portanto, no que se segue, assumimos que as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  são continuamente diferenciáveis em seus domínios de definição. Assim, para cada condição inicial  $(x_0, y_0)$  no interior do domínio de definição dessas funções, existe um intervalo de tempo  $]t_1, t_2[$ , com  $t_1 < 0 < t_2$ , e uma única solução  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in ]t_1, t_2[$  satisfazendo a equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases}$$

nesse intervalo de tempo, e satisfazendo a condição inicial

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

A solução  $(x(t), y(t))$  define uma curva que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$  no plano. Em outras palavras, por cada ponto do plano onde as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  estão definidas, passa uma única solução da equação diferencial.

Conforme discutido no caso de sistemas lineares, cada solução, que é uma função de  $t$  nas coordenadas  $(x(t), y(t))$ , está associada a uma órbita, que é o conjunto de valores assumidos por essa solução. A solução é uma função e a órbita é um conjunto de pontos. O conjunto de todas as órbitas, com a indicação do sentido de crescimento do parâmetro  $t$  de cada órbita, forma o diagrama de fase do sistema, também chamado plano de fase, no caso bidimensional.

O nosso objetivo, neste e nos próximos capítulos, é encontrar o diagrama de fase de vários sistemas e entender o comportamento das diversas soluções de cada sistema.

## 2. Pontos fixos e linearização

Parte do “quebra-cabeça” das órbitas que formam um plano de fase de um sistema não-linear depende dos pontos fixos e do comportamento das órbitas próximas a cada ponto fixo. Vejamos como achar os pontos fixos e analisar o comportamento local.

**2.1. Pontos fixos de sistemas não-lineares.** Analogamente ao caso unidimensional, os pontos fixos de um sistema não-linear da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

são dados pelos zeros do lado direito do sistema, ou seja, pelas soluções do sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Tomemos como exemplo o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (8 - 2x - y)x, \\ \frac{dy}{dt} = (9 - x - 3y)y. \end{cases}$$

Os pontos fixos são dados pelo sistema algébrico

$$\begin{cases} (8 - 2x - y)x = 0 \\ (9 - x - 3y)y = 0. \end{cases}$$

Esse sistema pode ser desmembrado em quatro sistemas lineares

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 9 - x - 3y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ 9 - x - 3y = 0. \end{cases}$$

Temos quatro soluções:

$$\begin{aligned} P_1 = (x_1, y_1) &= (0, 0), & P_2 = (x_2, y_2) &= (0, 3), \\ P_3 = (x_3, y_3) &= (4, 0), & P_4 = (x_4, y_4) &= (3, 2). \end{aligned}$$

Temos, portanto, quatro pontos fixos. Cada ponto fixo representa uma solução constante, ou estacionária,  $(x(t), y(t)) = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , para  $t \in \mathbb{R}$ . Este sistema é um sistema particular não-linear de competição entre espécies, ou seja,  $x(t)$  e  $y(t)$  representam as populações de duas espécies que competem entre si em um meio-ambiente. O ponto fixo  $P_1$  representa a inexistência das duas espécies, pois as duas coordenadas são nulas, ou seja  $x(t) = 0$  e  $y(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Os pontos fixos  $P_2$  e  $P_3$  representam a existência de apenas uma das espécies. O ponto fixo  $P_4$  indica as duas espécies com populações constantes,  $x(t) = 3$  e  $y(t) = 2$  (em unidades apropriadas, digamos, milhares de indivíduos).

**2.2. Linearização em torno de pontos fixos e pontos fixos hiperbólicos.** Da mesma forma que gráficos de funções podem ser estudados através das derivadas das funções, o comportamento das órbitas próximas a pontos fixos pode ser estudado a partir das derivadas dos termos não-lineares calculados nos pontos fixos. Considere um ponto fixo  $P^* = (x^*, y^*)$  de um sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases}$$

Nesse caso, temos

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0, \\ g(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

Fazendo a expansão em série de Taylor de  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  em torno de  $P^* = (x^*, y^*)$ , temos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) + \mathcal{O}(2), \\ g(x, y) &= g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{O}(2)$  representa termos de ordem quadrática, ou seja, proporcionais a  $(x - x^*)^2$ ,  $(x - x^*)(y - y^*)$  ou  $(y - y^*)^2$ . Para  $(x, y) \approx (x^*, y^*)$ , ou seja, próximo do ponto fixo, esses termos quadráticos são muito menores que os termos lineares. Por isso, desprezamos os termos quadráticos e escrevemos

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*), \\ g(x, y) &\approx g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*), \end{aligned}$$

com a aproximação sendo válida para  $(x, y) \approx (x^*, y^*)$ .

Agora, para analisarmos uma vizinhança do ponto fixo, vamos mudar de coordenadas, introduzindo apenas uma translação, de modo a colocar a origem no ponto fixo. Consideramos, então, o novo sistema de coordenadas  $XY$  dado por

$$X = x - x^*, \quad Y = y - y^*.$$

A origem  $(X, Y) = (0, 0)$  representa o ponto fixo  $(x, y) = (x^*, y^*)$ . Cada solução  $(x(t), y(t))$  pode ser representada nas novas coordenadas por  $X(t) = x(t) - x^*$ ,  $Y(t) = y(t) - y^*$ . Como

$x^*, y^*$  não dependem de  $t$ , temos

$$\begin{aligned} X'(t) = x'(t) = f(x, y) &\approx f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ &= f_x(x^*, y^*)X + f_y(x^*, y^*)Y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y'(t) = y'(t) = g(x, y) &\approx g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ &= g_x(x^*, y^*)X + g_y(x^*, y^*)Y. \end{aligned}$$

Assim, vemos que  $(X(t), Y(t))$  satisfaz aproximadamente o sistema linear

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, podemos estudar a vizinhança do ponto fixo  $P^*$  através do sistema linear em  $(X, Y)$ .

Mas há um ponto delicado. Ao desprezarmos os termos quadráticos assumimos que eles são muito menores que os termos lineares. Mas e se os termos lineares forem nulos? Isso seria um problema, que inviabilizaria a nossa aproximação. De fato, essa análise via linearização só é justificada quando a matriz de linearização

$$\begin{bmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{bmatrix}$$

não possui autovalores reais nulos nem autovalores complexos com parte real nula. Podemos fazer uma analogia com o gráfico de funções. Digamos que em um ponto a derivada de uma função continuamente diferenciável seja positiva. Então, independentemente do sinal das derivadas de ordem mais alta, a função será crescente. Por outro lado, se a derivada for nula, precisamos analisar as derivadas de ordem mais alta para descobrirmos se o ponto é de mínimo, máximo, ou de inflexão.

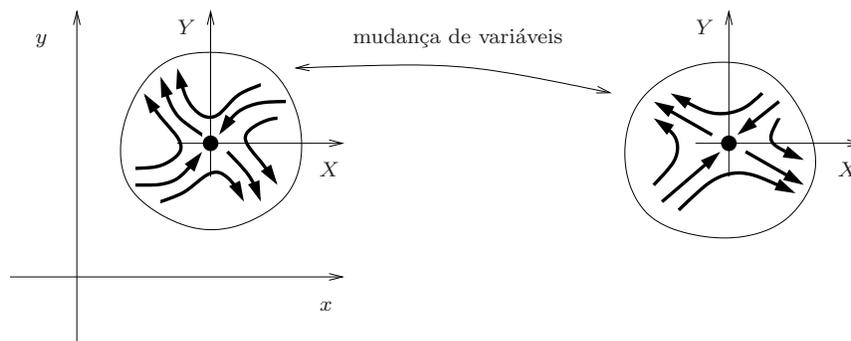


FIGURA 2.1. Mudança de variáveis não-linear levando órbitas na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico para órbitas de um sistema linear do tipo sela.

Um ponto fixo  $P^* = (x_*, y_*)$  tal que matriz de linearização não possui autovalor real nulo nem autovalor complexo com parte real nula é chamado de *ponto fixo hiperbólico*. No caso

de pontos fixos hiperbólicos, é possível mostrar que existe uma mudança de variáveis não-linear que leva as órbitas do sistema linearizado em uma vizinhança da origem nas órbitas do sistema não-linear em uma vizinhança do ponto fixo (Teorema de Hartman-Grobman). A figura 2.1 ilustra essa propriedade na vizinhança de um ponto fixo cuja linearização gera um ponto de sela. Observe que os auto-espacos do problema linear, que geram órbitas na forma de semi-retas, são levados em órbitas “curvas”, em geral, devido à mudança não-linear de coordenadas. É possível mostrar, ainda, que essas órbitas provenientes dos auto-espacos são tangentes aos auto-espacos correspondentes.

A importância da hipótese do ponto fixo ser hiperbólico pode ser vista através do sistema unidimensional

$$x' = \lambda x + \mu x^3.$$

Observe que se  $\lambda > 0$ , então o ponto fixo na origem é repulsor, independente do valor de  $\mu$ . Se  $\lambda < 0$ , o ponto fixo é atrator, independente do valor de  $\mu$ . Agora, se  $\lambda = 0$ , então é necessário analisar o sinal de  $\mu$ , que pode indicar um ponto fixo repulsor, se  $\mu > 0$ , ou atrator, se  $\mu < 0$ . O termo  $\lambda$  faz o papel do autovalor e esse exemplo ilustra a importância de se assumir que nenhum autovalor real seja nulo.

A hipótese de nenhum autovalor complexo ter parte real nula pode ser ilustrado por um sistema similar, escrito em coordenadas polares como

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \alpha r + \mu r^3, \\ \frac{d\theta}{dt} = \beta. \end{cases}$$

O sistema correspondente em coordenadas cartesianas tem uma linearização com autovalores  $\alpha \pm i\beta$ . Se a parte real  $\alpha$  for diferente de zero, a estabilidade do ponto fixo estará definida pelo sinal de  $\alpha$ , independente do valor de  $\mu$ . Por outro lado, se a parte real  $\alpha$  for nula, o sinal de  $\mu$  será crucial para determinar a estabilidade do ponto fixo.

Esses exemplos também ilustram o fato de que no caso de pontos fixos não-hiperbólicos, a análise das derivadas de ordem mais alta é necessária para o estudo das órbitas próximas ao ponto fixo. Mas esse estudo é, também, muito mais delicado e não será explorado aqui. Um outro detalhe é que, nesses exemplos, ainda é possível encontrar um comportamento qualitativamente equivalente ao de algum sistema linear. No entanto, a riqueza de comportamentos qualitativamente diferentes na vizinhança de pontos fixos não-hiperbólicos é muito maior do que a encontrada em sistemas lineares. A figura 2.2 ilustra apenas alguns exemplos que não possuem comportamentos equivalentes em sistemas lineares.

**2.3. Classificação dos pontos fixos hiperbólicos.** Como o comportamento das órbitas próximas a um ponto fixo hiperbólico é determinado essencialmente pelo sistema linearizado, podemos classificar os pontos fixos hiperbólicos de acordo com a classificação do sistema linearizado. Como estamos considerando apenas pontos fixos hiperbólicos, as classificações possíveis são entre pontos fixos *atratores*, *repulsores* e de *sela*. Além disso, dentre os atratores e repulsores, podemos distinguir os *nós* e os *focos*, mas não nos preocuparemos

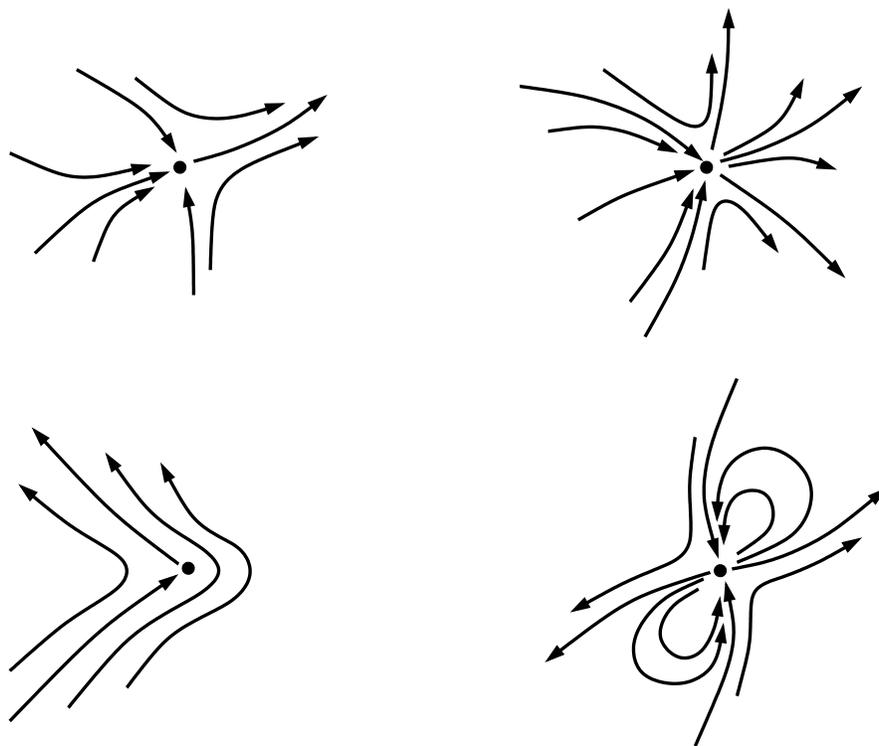


FIGURA 2.2. Exemplos de diagramas de fase na vizinhança de pontos fixos não-hiperbólicos.

em classificar os tipos de nós pois a não-linearidade pode eliminar a diferença entre eles. A figura 2.3 ilustra esses diferentes tipos de pontos fixos hiperbólicos.

Vejamos, agora, o exemplo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (8 - 2x - y)x, \\ \frac{dy}{dt} = (9 - x - 3y)y, \end{cases}$$

tratado acima. Encontramos quatro pontos fixos:

$$P_1 = (x_1, y_1) = (0, 0),$$

$$P_2 = (x_2, y_2) = (0, 3),$$

$$P_3 = (x_3, y_3) = (4, 0),$$

$$P_4 = (x_4, y_4) = (3, 2).$$

A matriz de derivadas é dada por

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 4x - y & -x \\ -y & 9 - x - 6y \end{bmatrix}.$$

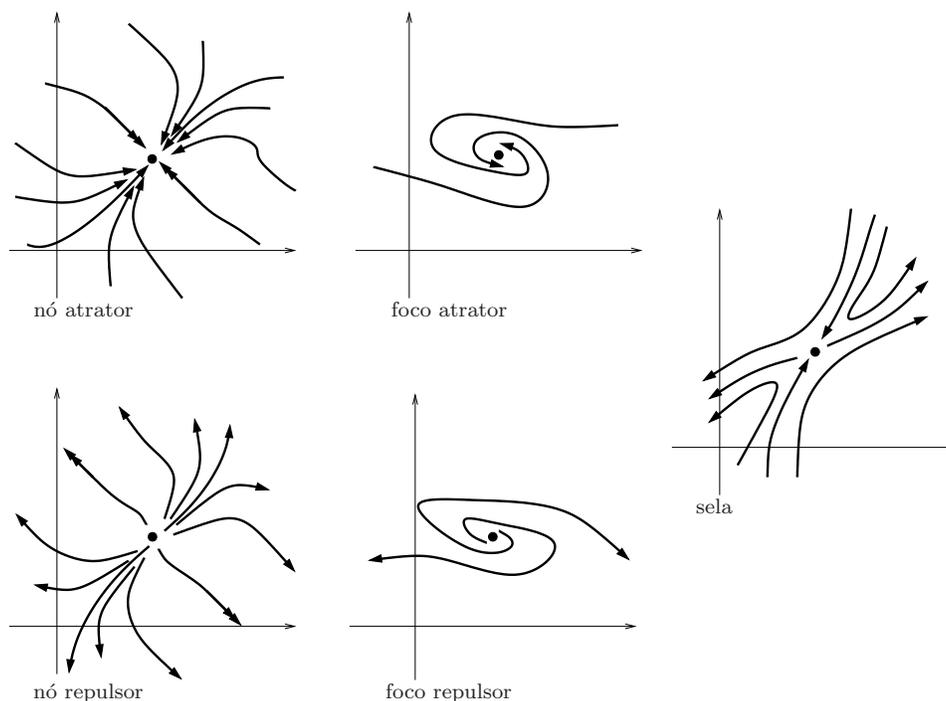


FIGURA 2.3. Classificações de pontos fixos hiperbólicos de sistemas bidimensionais não-lineares autônomos.

Calculando em cada um dos pontos fixos temos

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad A(0,3) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}, \quad A(4,0) = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad A(3,2) = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

É imediato deduzir que  $A(0,0)$  tem autovalores positivos 8 e 9; que  $A(0,3)$  tem autovalores reais de sinais contrários 5 e  $-9$ ; e que  $A(4,0)$  também tem autovalores reais de sinais contrários,  $-8$  e 5. Portanto,  $P_1$  é um nó repulsor, enquanto que  $P_2$  e  $P_3$  são pontos fixos de sela. Quanto a  $P_4$ , os autovalores são dados pelas raízes do polinômio característico:

$$\lambda^2 + 12\lambda + 30 = 0,$$

logo

$$\lambda = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 120}}{2} = -6 \pm \sqrt{6} < 0,$$

e ambos são negativos. Logo,  $P_4$  é um nó atrator.

A caracterização destes quatro pontos fixos está compatível com o diagrama de fase ilustrado na figura 1.1, no início deste capítulo. Mas para completar o diagrama de fase, com o comportamento das órbitas entre os pontos fixos, ainda precisamos de mais ferramentas, que só serão vistas no próximo capítulo.

## Exercícios

**2.1.** Ache os pontos fixos de cada um dos seguintes sistemas

$$(a) \begin{cases} x' = y^2 - 3x + 2, \\ y' = x^2 - y^2, \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + x^3, \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x' = \sin(x + y), \\ y' = y, \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x' = x - y - e^x, \\ y' = x - y - 1, \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x' = -y + x + xy, \\ y' = x - y - y^2, \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x' = -3y + xy - 4, \\ y' = y^2 - x^2. \end{cases}$$

**2.2.** Para cada um dos pontos fixos  $(x^*, y^*)$  dos sistemas

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

da questão anterior, ache a matriz diferencial

$$A(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{bmatrix}$$

e esboce o diagrama de fase do sistema linearizado  $\mathbf{U}' = \mathbf{A}\mathbf{U}$ , onde  $\mathbf{U} = (X, Y)$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

**2.3.** No sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (8 - 2x - y)x, \\ \frac{dy}{dt} = (9 - x - 3y)y, \end{cases}$$

tratado no texto, ache os auto-espacos dos sistemas linearizados em cada um dos pontos fixos  $A, B, C, D$  e compare-os com as órbitas esboçadas na figura 1.1. Essas órbitas devem ser tangentes aos auto-espacos correspondentes.

**2.4.** Linearize o sistema

$$\begin{cases} x' = \alpha x - xy, \\ y' = xy^2 + (\alpha - 1)y, \end{cases}$$

em torno do ponto fixo  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  e determine para quais valores reais de  $\alpha$  esse ponto fixo é i) hiperbólico atrator, ii) hiperbólico repulsor, iii) hiperbólico de sela e iv) não-hiperbólico.

**2.5.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = y^2 - x, \\ y' = x^2 - y. \end{cases}$$

Ache os pontos fixos do sistema, linearize em torno de cada ponto fixo e determine se eles são atratores, repulsores ou de sela.

2.6. Linearize o sistema

$$\begin{cases} x' = -x + 2y + xy, \\ y' = ay + x^2y^3, \end{cases}$$

em torno da origem e determine para quais valores de  $a$  a origem é um ponto fixo atrator.

2.7. Considere o sistema não-linear

$$\begin{cases} x' = -2x + xy - y, \\ y' = 2x + x^2y + xy^2. \end{cases}$$

Linearize o sistema em torno da origem e faça um esboço do diagrama de fase do sistema linearizado em torno da origem.

### 3. Órbitas regulares

Graças à unicidade das soluções, válida nos casos em que estamos interessados, órbitas diferentes não se cruzam. Em particular, órbitas que não sejam pontos fixos não podem “atravessar” os pontos fixos. Com isso, para essas órbitas, o vetor tangente  $(x'(t), y'(t))$  nunca se anula. Isso garante que elas não formam “bicos”, são curvas suaves. Essas órbitas são chamadas de *regulares*. Assim, o diagrama de fase de um sistema é composto de pontos fixos e de órbitas regulares.

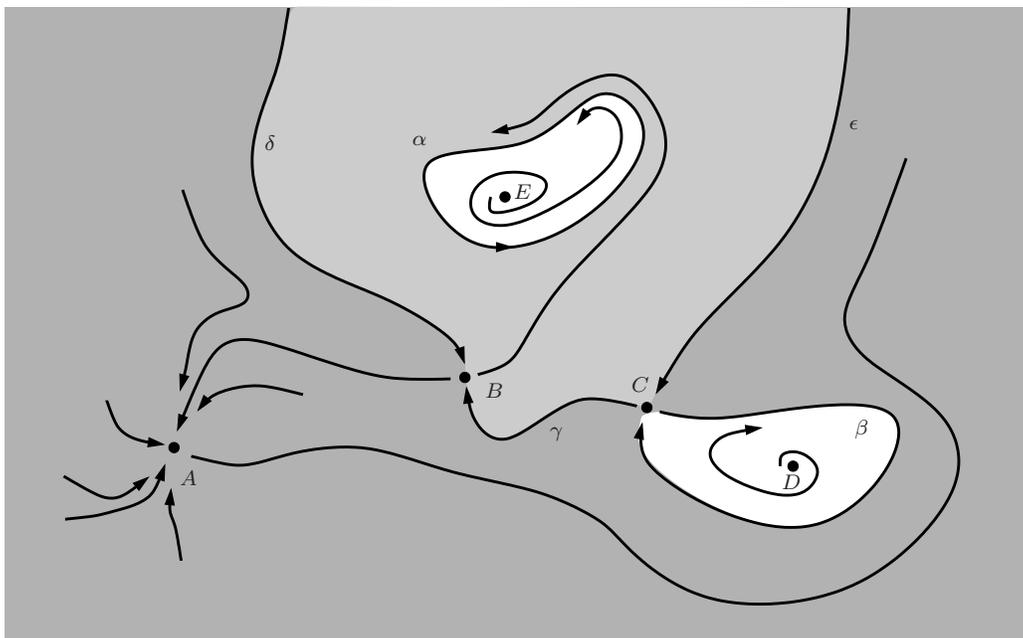


FIGURA 3.1. Diagrama de fase ilustrando diversos tipos de órbitas regulares.

Órbitas regulares podem ser classificadas em vários tipos. Tomemos o diagrama de fase da figura 3.1 como ilustração.

Indicamos, na figura, todos os pontos fixos, através dos algarismos romanos de  $A$  a  $E$ , e algumas órbitas regulares, através das letras gregas de  $\alpha$  a  $\epsilon$ . Dos pontos fixos,  $A$  é atrator,  $B$  e  $C$  são pontos de sela,  $D$  e  $E$  são repulsores.

Quanto às órbitas regulares,  $\alpha$  é uma *órbita periódica*, também chamada de *órbita fechada* (não tem início nem fim; não tem “pontas”). Ela está associada a uma solução periódica. Existe um período  $T$  em que a solução se repete, ou seja  $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Vimos várias soluções periódicas em sistema lineares com autovalores complexos. Porém, nesses casos, há sempre uma infinidade de órbitas periódicas. Em sistemas não-lineares, isso nem sempre acontece. As órbitas periódicas podem aparecer isoladas, ou seja, sem nenhuma outra órbita periódica suficientemente próxima a ela. Uma órbita periódica isolada é também chamada de *ciclo limite*. A razão disso é que ela é o limite de outras órbitas regulares (isso não é tão trivial e é parte de um resultado conhecido como Teorema de Poincaré-Bendixson). Por exemplo, observe, na ilustração, que as órbitas no interior da órbita periódica  $\alpha$  convergem para a órbita  $\alpha$ . As órbitas na região cinza claro também convergem para a órbita  $\alpha$ . Ou seja,  $\alpha$  é o limite de órbitas próximas a ela. Nesse caso, dizemos, ainda, que  $\alpha$  é um ciclo limite atrator. Os ciclos limites podem ser classificados em *atratores*, *repulsores* e *conectores*. Esses três casos estão ilustrados na figura 3.2

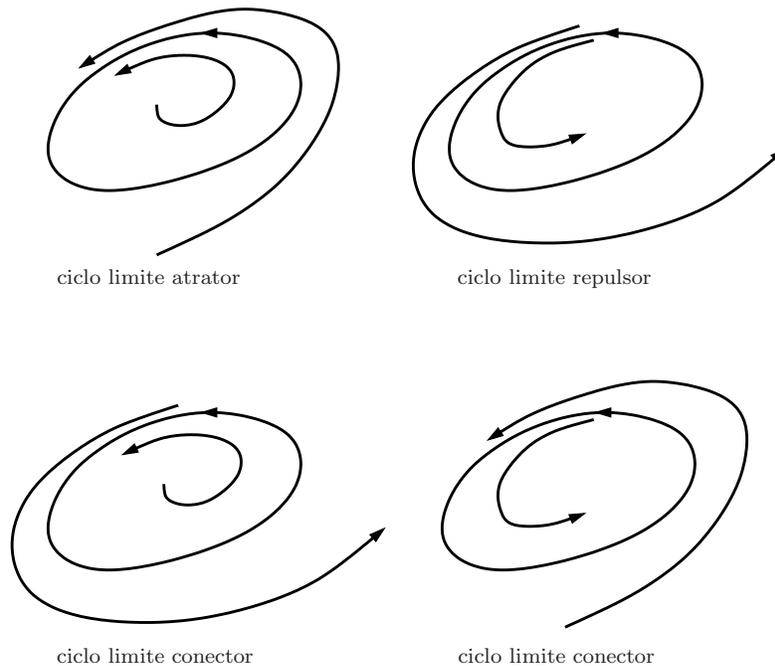


FIGURA 3.2. Tipos de ciclos limites, classificados segundo o comportamento das órbitas próximas a eles.

De volta à figura 3.1, observe, agora, a órbita  $\beta$ . Ela “nasce” e “morre” no ponto fixo  $C$ , ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = C = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)).$$

Uma órbita regular com esse comportamento, ou seja, que nasce e morre em um mesmo ponto fixo, é chamada de *órbita homoclínica*. Observe que essa órbita homoclínica separa o plano em duas regiões. Em cada região, podemos ter comportamentos diferentes das órbitas. Esse é um dos motivos da importância de se identificar esse tipo de órbita.

A órbita  $\gamma$ , por sua vez, é chamada de *órbita heteroclínica*, pois os limites no passado e no futuro são pontos fixos diferentes. No caso,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = C, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = B.$$

Além disso,  $\gamma$  liga dois pontos fixos de sela, por isso,  $\gamma$  é chamada, ainda, de *ligação de sela*. A importância dessa órbita pode ser vista em conjunto com as órbitas  $\delta$  e  $\epsilon$ . Essas duas órbitas “morrem” em pontos fixos de sela. Às órbitas que “morrem” em pontos fixos de sela (assim como às que nascem; veja abaixo) daremos o nome de *separatrizes de sela*. Uma ligação de sela é, também, uma separatriz de sela. A razão dessa nomenclatura é que elas separam o plano em regiões de comportamentos futuros diferentes. Observe, na figura, que essas três separatrizes de sela,  $\gamma$ ,  $\delta$  e  $\epsilon$ , dividem o plano em uma região cinza claro e outra cinza escuro. As regiões brancas são subdivisões determinadas por outras órbitas, não nos preocuparemos com elas no momento. O que queremos ressaltar é a diferença de comportamento entre as regiões cinzas. Na região cinza claro, todas as órbitas convergem para o ciclo limite  $\alpha$ . Na região cinza escuro, todas as órbitas convergem para o ponto fixo atrator  $A$ .

As órbitas que “nascem” em pontos de sela também são especiais, pois dividem o plano em regiões de diferentes comportamentos no passado. Essas órbitas também são chamadas de separatrizes de sela. Um ponto fixo de sela tem, portanto, quatro separatrizes, duas no passado e duas no futuro, determinando regiões com comportamentos assintóticos possivelmente diferentes.

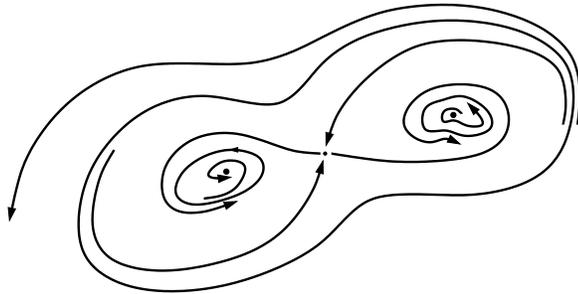
Uma mesma órbita pode ser classificada como separatriz de mais de um ponto fixo de sela. Por exemplo,  $\gamma$  é separatriz tanto de  $B$  como de  $C$ , enquanto que  $\beta$  é separatriz de  $C$ , tanto em relação ao comportamento futuro quanto ao passado.

Em resumo, observe a importância de identificarmos algumas órbitas que são cruciais para o comportamento global do sistema. A partir delas, fica mais fácil entender o comportamento das outras órbitas. Não é necessário traçar todas as órbitas de cada região. Apenas algumas órbitas em cada região são suficientes para descrever o diagrama de fase.

O exemplo acima ilustra os principais tipos de órbitas regulares que encontraremos nos capítulos seguintes. A apresentação feita aqui foi bastante informal e ligeira. Esses conceitos não são tão óbvios e a idéia é que eles sejam mais bem compreendidos à medida em que estudemos exemplos específicos. Essa seção deve ser encarada como uma mera introdução a esses conceitos.

## Exercícios

- 3.1. Identifique as órbitas homoclínicas e heteroclínicas e as separatrizes de sela do diagrama de fase da figura 1.1 e as regiões de diferentes comportamentos que elas delimitam..
- 3.2. Identifique as separatrizes de sela da figura 1.2 e as regiões de diferentes comportamentos que elas delimitam.
- 3.3. Identifique e classifique (entre atratores, repulsores e conectores) os ciclos limites do seguinte diagrama de fase:





## Sistemas Conservativos e Aplicações

### 1. Sistemas conservativos e o modelo predador-presa de Lotka-Volterra

Uma classe importante de sistemas não-lineares que permite uma análise global mais detalhada é a de sistemas conservativos, ou integráveis. Esses sistemas são caracterizados pela existência de uma função suave  $\varphi(x, y)$  que estabelece implicitamente uma relação entre as coordenadas de todas as soluções  $(x(t), y(t))$  através de equações da forma

$$\varphi(x, y) = C,$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária. Esta “constante”  $C$  é constante apenas em relação a  $t$ , pois ela pode variar com cada solução  $(x(t), y(t))$ . Mais precisamente, dada uma solução  $(x(t), y(t))$ , existe uma constante  $C$  tal que

$$\varphi(x(t), y(t)) = C, \quad \forall t.$$

Uma consequência da existência dessa função  $\varphi(x, y)$  é que cada órbita pertence a uma determinada curva de nível dessa função.

A função  $\varphi = \varphi(x, y)$  pode ser obtida via integração de uma equação de primeira ordem, obtida após eliminarmos a variável  $t$  do sistema. Como o sistema é autônomo, o lado direito das equações do sistema não depende explicitamente de  $t$ . Assim, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Essa equação faz sentido quando  $f(x, y) \neq 0$  e passagem pode ser justificada através do Teorema da Função Inversa. Mas não vamos nos preocupar com isso, por enquanto. O fato é que chegamos a uma equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Se pudermos resolver essa equação, chegaremos, em geral, a uma solução dada implicitamente por uma relação da forma

$$\varphi(x, y) = C,$$

para alguma função  $\varphi(x, y)$ . Para garantir que as curvas de nível dessa função sejam, de fato, curvas “razoáveis”, é exigido que essa função seja suave.

Assim, uma função  $\varphi(x, y)$  definida em um domínio de  $\mathbb{R}^2$  e tal que as coordenadas  $x$  e  $y$  de cada solução  $(x(t), y(t))$  do sistema satisfazem a relação

$$\varphi(x, y) = C,$$

para alguma constante  $C$  é chamada de *integral* do sistema, ou *quantidade conservada* pelo sistema.

Se, além disso, essa função suave  $\varphi = \varphi(x, y)$  estiver definida em um domínio simplesmente conexo (“sem buracos”, como o plano todo, um semiplano, ou um quadrante, por exemplo; veja a seção 3 do capítulo 4), então o sistema é chamado de sistema *integrável* ou *conservativo*.

Na definição de sistema conservativo, exigimos, ainda, que a integral  $\varphi(x, y)$  não seja constante. Isso porque, independente da equação, uma função constante satisfaz as hipóteses para ser uma integral mas a “curva de nível” é todo o domínio de definição da função, o que não nos dá nenhuma informação sobre a forma das órbitas.

Para ilustrar essas idéias, em particular a hipótese do domínio ser simplesmente conexo, vamos considerar os seguintes sistemas lineares.

Exemplo 1: Considere

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Dividindo uma equação pela outra chegamos à equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Esta é uma equação separável, cujas soluções são dadas por

$$ydy = xdx \implies \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \text{constante}.$$

Assim, vemos que uma integral para o sistema é a função

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}.$$

As curvas de nível são hipérbolas. De fato, a análise da matriz associada ao sistema revela a existência de autovalores reais com sinais contrários, 1 e  $-1$ , gerando um ponto fixo de sela, cujas órbitas são, de fato, hipérbolas.

Exemplo 2: Considere, agora, o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -4x. \end{cases}$$

Dividindo uma equação pela outra chegamos agora a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}.$$

Usando separação de variáveis, temos

$$ydy = -4xdx \implies \frac{y^2}{2} = -2x^2 + \text{constante}.$$

Assim, vemos que uma integral para o sistema é a função

$$\varphi(x, y) = 2x^2 + \frac{y^2}{2}.$$

As curvas de nível são elipses. A análise via matriz associada do sistema indica um ponto fixo do tipo centro, com autovalores imaginários puros  $\pm 2i$ , cujas órbitas são, de fato, elipses (figura 1.1).

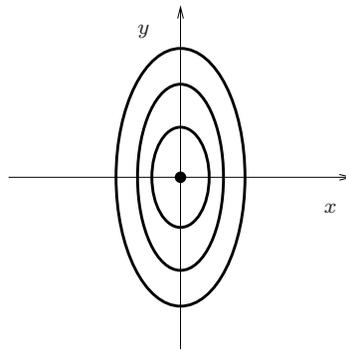


FIGURA 1.1. Curvas de nível de  $\varphi(x, y) = 2x^2 + y^2/2$ .

Uma vantagem desse novo método é que agora fica mais óbvio enxergar o formato da elipse (os seus eixos principais e a excentricidade, por exemplo).

Exemplo 3: Vamos ver, agora, o seguinte exemplo de sistema não-conservativo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

Utilizamos esse exemplo apenas a título de ilustração, pois esse sistema está desacoplado e é, de fato, a forma canônica de um sistema diagonalizável com autovalores reais iguais a  $-1$ . As órbitas são semiretas apontando para a origem.

Prosseguimos a análise dividindo uma equação pela outra, o que nos dá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Separando as variáveis, temos

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx \implies \ln |y| = \ln |x| + \text{constante}.$$

Assim, achamos uma integral do sistema, dada por

$$\varphi(x, y) = \ln |y| - \ln |x|.$$

Um problema com essa função é que ela não está definida em nenhum dos eixos  $x$  e  $y$ . Portanto, não podemos deduzir que o sistema é conservativo no plano. O máximo que podemos afirmar é que ele é conservativo em cada quadrante, separadamente.

A situação pode ser melhorada aplicando a exponencial na relação

$$\ln |y| = \ln |x| + \text{constante},$$

o que nos dá

$$|y| = C|x|.$$

Isso nos leva a duas novas integrais:

$$\varphi_1(x, y) = \left| \frac{y}{x} \right| \quad \text{e} \quad \varphi_2(x, y) = \left| \frac{x}{y} \right|.$$

No entanto, cada uma delas não está definida em um dos eixos. Dessa forma, podemos garantir apenas que o sistema é conservativo em cada semiplano  $x > 0$ ,  $x < 0$ ,  $y > 0$  e  $y < 0$ , separadamente.

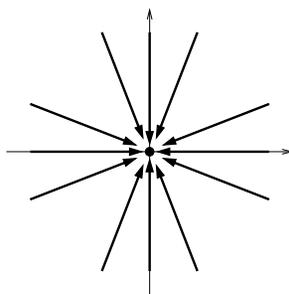


FIGURA 1.2. Diagrama de fase do sistema não-conservativo  $x' = -x, y' = -y$ .

Poderíamos continuar buscando integrais no plano todo, mas podemos nos convencer da impossibilidade do sistema ser conservativo em uma região contendo a origem observando as órbitas do sistema. De fato, sabemos que cada órbita deve pertencer a uma curva de nível e sabemos que todas as órbitas têm a origem como limite (figura 1.2). Portanto, se existir uma integral  $\varphi_0(x, y)$  definida em uma região que inclua a origem, teremos que todos os níveis devem ser iguais ao nível da origem e a função terá que ser constante. Mais precisamente, considere duas órbitas quaisquer associadas a soluções  $(x_1(t), y_1(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$ . Cada uma delas pertence a uma curva de nível, digamos

$$\varphi_0(x_1(t), y_1(t)) = C_1, \quad \varphi_0(x_2(t), y_2(t)) = C_2,$$

para dois níveis  $C_1$  e  $C_2$ . Mas como  $(x_1(t), y_1(t)) \rightarrow (0, 0)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , assim como  $(x_2(t), y_2(t)) \rightarrow (0, 0)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , devemos ter, pela continuidade de  $\varphi_0(x, y)$  que  $\varphi_0(0, 0) = C_1$ , por um lado, e  $\varphi_0(0, 0) = C_2$ , por outro. Logo,  $C_1 = C_2$  e os dois níveis são iguais. Como as órbitas foram tomadas arbitrariamente, temos que quaisquer dois níveis coincidem. Ou seja, todos os níveis são iguais e a função  $\varphi_0(x, y)$  é constante. Sendo a função constante, a informação dada por essa integral é absolutamente vazia. Daí a exigência da integral estar definida em uma região “sem buracos”.

**1.1. Interação entre espécies e o modelo predador-presa de Lotka-Volterra.** Vejamos, agora, um modelo conservativo não-linear. O modelo que estamos interessados é um caso particular de dinâmica populacional de duas espécies. Mais geralmente, a dinâmica populacional de duas espécies pode ser escrita da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = M(x, y)x \\ \frac{dy}{dt} = N(x, y)y. \end{cases}$$

As variáveis  $x$  e  $y$  indicam as populações de cada espécie e os termos  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  são as taxas de crescimento específico de cada espécie. Já vimos este conceito de taxa de crescimento específico em dinâmica de apenas uma espécie. A diferença, agora, é que, devido à interação entre as duas espécies, essas taxas dependem, também, da população da outra espécie. A natureza da interação vai determinar a forma dessas funções. Por exemplo, se  $M(x, y)$  for crescente em  $y$ , isso significa que a presença da espécie  $y$  é benéfica para a espécie  $x$ , como no caso de simbiose ou se  $y$  for uma presa para  $x$ . Se, por outro lado,  $M(x, y)$  for decrescente em  $y$ , isso significa que a presença da espécie  $y$  é maléfica para a espécie  $x$ , como no caso de  $x$  ser uma presa para  $y$ .

O modelo que estamos interessados nessa seção é conhecido como o modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Ele tem a forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\lambda - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (-\mu + cx)y. \end{cases}$$

onde todos os parâmetros  $\lambda, \mu, b, c$  são positivos. Os sinais determinam a natureza da interação. A idéia é que  $x$  representa a população de “presas” e  $y$ , a de “predadores”.

Vamos buscar uma integral para esse sistema. Dividindo as equações, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-\mu + cx)y}{(\lambda - by)x}.$$

Podemos não estar claro de imediato, mas esta é uma equação separável. Podemos resolvê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda - by}{y} dy &= \frac{-\mu + cx}{x} dx \implies \left( \frac{\lambda}{y} - b \right) dy = \left( \frac{-\mu}{x} + c \right) dx \\ &\implies \lambda \ln |y| - by = -\mu \ln |x| + cx + \text{constante.} \end{aligned}$$

Podemos escrever o resultado na forma

$$cx - \mu \ln |x| + by - \lambda \ln |y| = \text{constante.}$$

Temos, aqui, o mesmo problema do último exemplo acima, ou seja, a função acima não está definida nos eixos  $x$  e  $y$ . Esse problema pode ser parcialmente sanado aplicando a exponencial em ambos os lados,

$$\frac{e^{cx} e^{by}}{|x|^\mu |y|^\lambda} = \text{constante,}$$

e invertendo numerador com denominador:

$$\tilde{\varphi}(x, y) = |x|^\mu e^{-cx} |y|^\lambda e^{-by} = \text{constante.}$$

Achamos, portanto, uma integral do sistema, logo o sistema é conservativo no plano.

Mas na modelagem, só faz sentido considerarmos valores positivos para as populações. Com isso, podemos considerar a função

$$\varphi(x, y) = cx - \mu \ln x + by - \lambda \ln y,$$

que é uma integral apenas no primeiro quadrante,  $x, y > 0$ . Essa função é da forma

$$\varphi(x, y) = g(x) + h(y),$$

onde

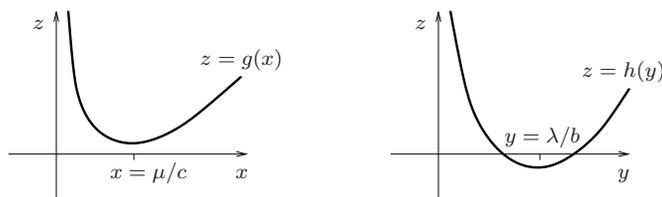
$$g(x) = cx - \mu \ln x, \quad h(y) = by - \lambda \ln y.$$

O gráfico de funções da forma  $\varphi(x, y) = g(x) + h(y)$  é relativamente bem mais simples de se esboçar, bastando visualizar o gráfico de cada uma das funções  $g(x)$  e  $h(y)$  e combiná-las de maneira apropriada. No nosso caso, os gráficos de  $g(x)$  e  $h(y)$  são parecidos, pois as funções têm a mesma forma. Vamos analisar a função  $g(x)$ . Temos

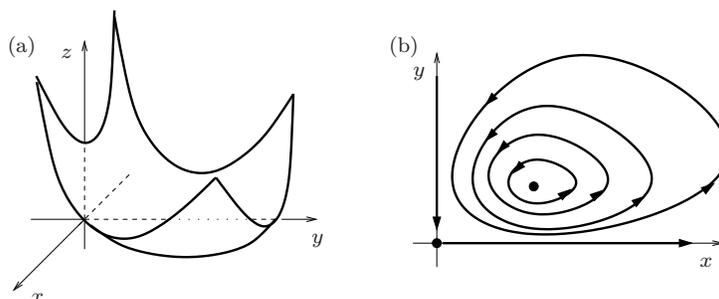
$$g'(x) = c - \frac{\mu}{x}, \quad g''(x) = \frac{\mu}{x^2}.$$

Portanto, a função tem apenas um ponto crítico, em  $x^* = \mu/c$  e este ponto fixo é um ponto de mínimo, pois a concavidade, dada por  $g''(x)$ , é sempre positiva. O valor do mínimo é dado por  $g(x^*) = g(\mu/c) = \mu(1 - \ln(\mu/c))$ , que pode ser positivo ou negativo, dependendo dos parâmetros. Além disso,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ . Juntando essas informações, podemos fazer o esboço do gráfico de  $g(x)$  e  $h(y)$  conforme a figura 1.3.

Para juntar os gráficos de  $g(x)$  e  $h(y)$  no esboço da função bidimensional  $z = \varphi(x, y) = g(x) + h(y)$ , observe que cada “corte” paralelo ao eixo  $x$  equivale a manter o valor de  $y$  constante, o que nos dá o mesmo gráfico de  $g(x)$  apenas transladado verticalmente pelo valor de  $h(y)$ . Da mesma forma, cada “corte” paralelo ao eixo  $y$  equivale a manter o valor

FIGURA 1.3. Esboço dos gráficos de  $z = h(x)$  e  $z = g(y)$ .

de  $x$  constante, o que nos dá o mesmo gráfico de  $h(y)$  apenas transladado verticalmente pelo valor de  $g(x)$ . O gráfico de  $\varphi(x, y)$  possui um ponto de mínimo global em  $(x^*, y^*)$ , onde  $x^* = \mu/c$  e  $y^* = \lambda/b$ . E as curvas de nível são curvas fechadas em torno desse ponto de mínimo. O gráfico de  $\varphi(x, y)$  e as curvas de nível estão ilustradas na figura 1.4. O ponto crítico  $(x^*, y^*)$  de  $\varphi(x, y)$  é um ponto fixo do sistema.

FIGURA 1.4. Esboço do (a) gráfico de  $z = \varphi(x, y)$  e (b) das as órbitas do sistema de Lotka-Volterra.

As curvas de nível de  $\varphi(x, y)$  coincidem com as órbitas do sistema. O sentido (anti-horário) das órbitas pode ser deduzido a partir do campo de vetores. De fato, se tomarmos  $y = y^* = \lambda/b$  e  $x > x^* = \mu/a$ , vemos que  $f(x, y) = 0$  e  $g(x, y) > 0$ , indicando que à direita do ponto fixo  $(x^*, y^*)$ , as órbitas crescem verticalmente. Na modelagem, isso representa um ciclo, com uma oscilação na população de cada espécie. Em um certo momento, temos uma diminuição na população de presas devido ao aumento de predadores, em seguida uma diminuição na população de predadores devido à diminuição na população de presas, depois um aumento na população de presas devido à diminuição no número de predadores e finalmente um aumento no número de predadores devido ao aumento na população de presas.

O esboço do diagrama de fase pode ser completado incluindo as órbitas em cada semi-eixo. Para isso, observe que a origem  $(0, 0)$  também é um ponto fixo e que os eixos são invariantes, correspondendo à presença de apenas uma das espécies. No eixo  $x$ , o sistema se reduz a  $x' = \lambda x$ , indicando um crescimento exponencial, com a presa livre para se procriar sem a presença do predador. No eixo  $y$ , o sistema se reduz a  $y' = -\mu y$ , indicando um decrescimento exponencial, com o predador destinado à extinção, sem a sua fonte alimentação.

## Exercícios

**1.1.** Ache uma integral  $\varphi = \varphi(x, y)$  para cada um dos sistemas a seguir e determine se eles são sistemas conservativos em todo o plano  $xy$ .

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{cases} x' = y, \\ y' = x - x^2, \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x' = y^2, \\ y' = -ye^x, \end{cases} \\ \text{(c)} \begin{cases} x' = y - y^3, \\ y' = x(1 - y^2), \end{cases} & \text{(d)} \begin{cases} x' = -y \cos x, \\ y' = \cos^2 x, \end{cases} \\ \text{(e)} \begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = -x + y, \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} x' = 4y, \\ y' = 2x + 4x^3. \end{cases} \end{array}$$

**1.2.** Ache uma integral  $\varphi = \varphi(x, y)$  definida para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  do sistema

$$\begin{cases} x' = (2 + y)x, \\ y' = -(2 + x)y. \end{cases}$$

**1.3.** No exercício 3.11 do capítulo 6, chegamos ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} X' = bX, \\ Y' = -cY, \end{cases}$$

com  $b$  e  $c$  positivos e onde  $X = x - x^*$  e  $Y = y - y^*$  representam as variações das populações  $x$  e  $y$  de raposas e coelhos em relação a populações de equilíbrio  $x^*$  e  $y^*$ . Ache uma integral para esse sistema e analise a influência dos parâmetros  $b$  e  $c$  nas soluções.

**1.4.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = y^2, \\ y' = -(x - \alpha)y. \end{cases}$$

- Ache todos os pontos fixos do sistema;
- Ache uma integral  $\varphi = \varphi(x, y)$  do sistema, em todo o plano  $xy$ ;
- Faça um esboço do diagrama de fase do sistema;
- Determine os valores de  $\alpha$  para os quais a solução com  $x(0) = 1/2$  e  $y(0) = 1/2$  assume apenas valores positivos de  $x(t)$ .

**1.5.** Em um certo modelo de epidemia em uma população,  $x$  representa a fração de indivíduos suscetíveis à infecção,  $y$ , a fração de indivíduos infectados e  $z$ , a fração de indivíduos imunes à infecção. Nessa modelagem, os valores de interesse são  $0 \leq x, y, z \leq 1$ , pois essas quantidades são frações da população total. Além disso,  $x + y + z = 1$ , pois assumimos que a população total permanece constante. Suponha que a evolução de cada um desses grupos de indivíduos seja dada por

$$\begin{cases} x' = -\alpha yx, \\ y' = (\alpha x - \gamma)y, \\ z' = \gamma y, \end{cases}$$

onde  $\alpha > 0$  é um fator de propagação da infecção e  $\gamma > 0$ , é um fator de cura.

- Observe que as equações para  $x'$  e  $y'$  não envolvem  $z$ , o que nos dá um sistema bidimensional envolvendo apenas as variáveis  $x$  e  $y$ ;
- Ache os pontos fixos desse sistema bidimensional.
- Ache uma integral para esse sistema bidimensional no quadrante  $x > 0, y \geq 0$ .
- Faça um esboço do diagrama de fase no quadrante  $x > 0, y \geq 0$ .
- Assumindo condições iniciais  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ , mostre que i) se  $0 < x_0 \leq \gamma/\alpha$ , então  $y(t)$  decresce para zero e ii) se  $x_0 > \gamma/\alpha$ , então  $y(t)$  cresce até um valor máximo  $y_{\max}$  e, depois, decresce para zero.
- No caso em que  $x_0 > \gamma/\alpha$ , ache o valor máximo  $y_{\max}$  assumido por  $y(t)$ , em função de  $x_0, y_0, \alpha$  e  $\gamma$ .

**1.6.** Uma equação linear com autovalores imaginários puros deve ser da forma

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx - ay, \end{cases}$$

com  $a^2 + bc < 0$ , pois o traço da matriz associada deve ser nulo e o determinante, positivo. Verifique isso. Mostre, então, que a função

$$\varphi(x, y) = -c\frac{x^2}{2} + axy + b\frac{y^2}{2}$$

é uma integral para o sistema, cujas curvas de nível são elipses ( $b$  e  $c$  têm sinais contrários pela condição acima).

Ache a forma exata dessas elipses no exemplo

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y, \\ y' = -5x - 3y, \end{cases}$$

e trace o plano de fase correspondente.

## 2. Sistemas hamiltonianos e a equação do pêndulo não-amortecido

**2.1. Definição e exemplos simples.** Uma classe particular de sistemas conservativos de grande importância em mecânica é a de *sistemas hamiltonianos*, que são sistemas que podem ser escritos na forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}, \end{cases}$$

para alguma função suave  $H(x, y)$ . Essa função  $H(x, y)$  é chamada de *hamiltoniano* do sistema e é uma quantidade conservada, ou seja, uma integral do sistema. De fato, basta

diferenciarmos ao longo de uma solução  $(x(t), y(t))$  para vermos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= H_x(x(t), y(t))x'(t) + H_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= H_x(x(t), y(t))H_y(x(t), y(t)) - H_y(x(t), y(t))H_x(x(t), y(t)) = 0. \end{aligned}$$

Observe que os pontos críticos do hamiltoniano são precisamente os pontos fixos do sistema.

É fácil obter uma condição para que um sistema seja hamiltoniano. Dado um sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases}$$

ele é hamiltoniano se

$$f(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \quad g(x, y) = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x},$$

para alguma função  $H(x, y)$ . Nesse caso, necessariamente

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y} = 0,$$

caso as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  sejam duas vezes continuamente diferenciáveis. Essa é uma condição necessária independente do domínio de definição das funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , desde que elas sejam duas vezes continuamente diferenciáveis no domínio de definição. Para que essa condição seja também suficiente, é necessário que o domínio seja simplesmente conexo, ou seja, sem “buracos”, conforme discutido na Seção 3 do Capítulo 4 sobre resolução de equações exatas de primeira ordem. A idéia é exatamente a mesma. De fato, um sistema hamiltoniano pode ser reduzido a uma equação exata, visto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

logo

$$-g(x, y) + f(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

A condição de Euler, nesse caso, é exatamente

$$-g_y(x, y) = f_x(x, y),$$

que pode ser escrita como acima:

$$f_x(x, y) + g_y(x, y) = 0.$$

A função  $H(x, y)$  aparece em aplicações tipicamente (mas nem sempre) associado à energia total do sistema, formado essencialmente pela *energia cinética* mais a *energia potencial*. Nesse caso, podemos escrever

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x),$$

onde o primeiro termo indica essencialmente a energia cinética e o termo  $V(x)$ , a energia potencial. Com isso, temos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -V'(x). \end{cases}$$

Exemplo 1: Um exemplo específico é o do corpo em queda livre. A energia potencial é  $mgh$ , onde  $h$  é a altura do objeto de massa  $m$  e  $g$ , a aceleração da gravidade. A energia cinética é  $mv^2/2$ , onde  $v = h'$  é a velocidade vertical do objeto. Dividindo a energia total pela massa, temos a função

$$H(h, v) = \frac{v^2}{2} + gh.$$

Como

$$H_h(h, v) = g, \quad H_v(h, v) = v,$$

onde  $H_h$  e  $H_v$  denotam as derivadas parciais em relação a  $h$  e  $v$ , o sistema hamiltoniano associado toma a forma

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -g. \end{cases}$$

Derivando a primeira equação em relação a  $t$  e utilizando a segunda equação chegamos à equação na sua forma mais conhecida:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g.$$

Exemplo 2: Vejamos, agora, o exemplo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -by. \end{cases}$$

Esse sistema está desacoplado e é um sistema linear já na forma canônica. É um sistema do tipo sela, com autovalores  $a$  e  $-b$ . Como visto acima, para que ele seja hamiltoniano, é necessário que a seguinte condição seja válida:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ax) + \frac{\partial}{\partial y}(-by) = a - b = 0.$$

Logo, ele só é hamiltoniano no caso em que  $a = b$ . Nesse caso, um hamiltoniano do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -ay. \end{cases}$$

pode ser obtido facilmente via integração:

$$H(x, y) = axy.$$

As soluções são dadas implicitamente pela equação

$$axy = \text{constante}.$$

cujas soluções são hipérbolas, conforme visto quando do estudo de sistemas lineares. Observe que o sistema original, com  $b \neq a$ , é conservativo, o que ilustra o fato de que nem todo sistema conservativo é hamiltoniano. Isso está associada a uma outra propriedade de sistemas hamiltonianos, que é a preservação de áreas no espaço de fase.

A idéia da preservação de áreas é a seguinte. Se ao invés da evolução a partir de uma única condição inicial imaginarmos a evolução de um conjunto  $R_0$  de condições iniciais, então esse conjunto irá evoluir para conjuntos  $R(t)$  contendo todas as posições  $(x(t), y(t))$  de soluções com  $(x(0), y(0))$  em  $R_0$ . Segue do fato do divergente de um campo hamiltoniano ser zero que o volume de  $R(t)$  será constante, igual ao volume de  $R$ . Isso seria impossível na vizinhança de um ponto fixo atrator ou repulsor ou na vizinhança de um ponto de sela com autovalores diferentes em módulo. Esse é um resultado importante, mas não iremos explorá-lo nesse texto.

**2.2. Equação do pêndulo não-amortecido.** Vamos considerar, agora, a equação de um pêndulo, conforme ilustrado na figura 2.1. Temos um objeto de massa  $m$  na ponta de uma haste de comprimento  $l$  e que é considerada de massa desprezível. O movimento do pêndulo descreve um arco de uma circunferência de comprimento  $l$ . O peso gera uma força horizontal para baixo. Essa força pode ser decomposta em uma componente tangencial ao movimento e uma componente normal ao movimento. A componente normal está em equilíbrio com a força centrípeta e a tensão gerada na haste (veja Exercício 2.4).

A posição do pêndulo pode ser representada pelo ângulo que a haste faz com o eixo horizontal, conforme esquematizado na figura 2.2. Denotamos esse ângulo por  $\theta$ .

Sendo o peso dado por  $mg$ , a componente tangencial tem magnitude  $mg \sin \theta$ . Por outro lado, o objeto descreve um arco  $x = l\theta$  a partir do ponto de equilíbrio, que é a posição vertical, correspondente ao ângulo  $\theta = 0$ . A velocidade e a aceleração tangenciais são respectivamente

$$x' = l\theta', \quad x'' = l\theta''.$$

Assim, pela segunda lei de Newton, temos a equação

$$ml\theta'' = -mg \sin \theta.$$

O sinal de menos no lado direito dessa equação indica que a força tangencial é contrária ao movimento.

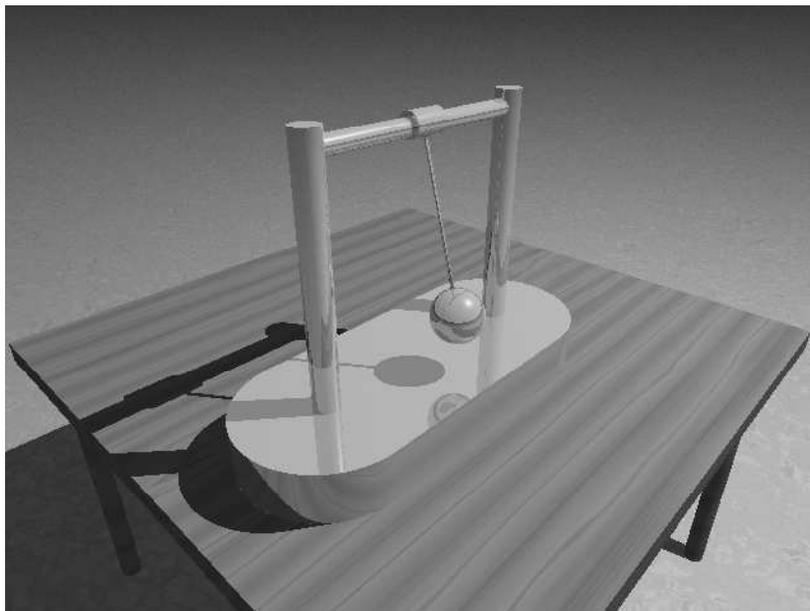


FIGURA 2.1. Ilustração do pêndulo a ser modelado.

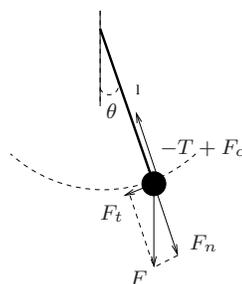


FIGURA 2.2. Pêndulo com um objeto de massa  $m$  na ponta, preso por uma haste de comprimento  $l$  e massa desprezível. O peso da massa tem magnitude  $mg$  e gera uma força vertical  $F$  com componente tangencial dada por  $F_t = mg \sin \theta$ . A componente normal  $F_n$  é balanceada pela tensão  $T$  na haste (ou uma reação  $-T$  na massa) e a força centrípeta  $F_c$ .

Introduzindo a variável  $\psi = \theta'$  para representar a velocidade angular, podemos escrever a equação de segunda ordem em  $\theta$  como um sistema em  $\theta$  e  $\psi$ :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \psi, \\ \frac{d\psi}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \end{cases}$$

Dividindo uma equação pela outra, temos

$$\frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{g \sin \theta}{l\psi}.$$

Usando separação de variáveis, encontramos a equação implícita

$$\frac{\psi^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \theta + \text{constante},$$

o que nos dá o hamiltoniano

$$H(\theta, \psi) = \frac{\psi^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \theta.$$

Esta função está bem definida para todo  $(\theta, \psi)$  em  $\mathbb{R}^2$ , logo o sistema é conservativo no plano todo. O gráfico de  $H(\theta, \psi)$  está ilustrado na figura 2.3.

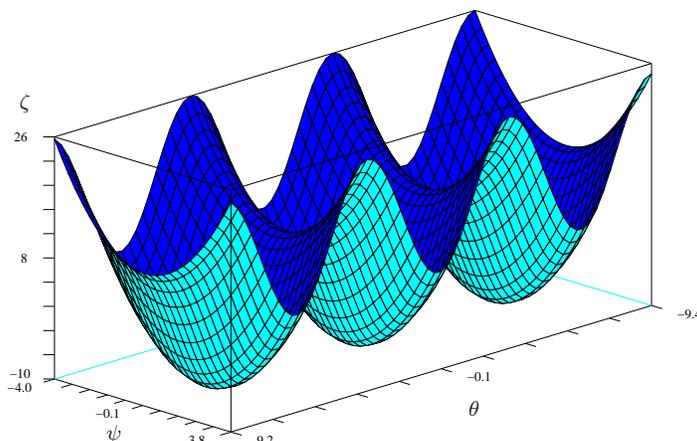


FIGURA 2.3. Gráfico de  $\zeta = H(\theta, \psi) = \psi^2/2 - 10 \cos \theta$ .

As curvas de nível de  $H(\theta, \psi)$  formam as órbitas do sistema. Em particular, os pontos críticos do hamiltoniano são os pontos fixos do sistema. Próximo a um ponto de mínimo local, as curvas de nível formam curvas fechadas e, com isso, esses pontos fixos são do tipo centro. Este não é um ponto fixo hiperbólico, mas a existência do hamiltoniano nos permite garantir que o ponto fixo é do tipo centro. Esses pontos fixos são da forma  $(2n\pi, 0)$ , com  $n$  inteiro. Os outros pontos fixos são pontos de sela, são os pontos fixos cujas coordenadas são dadas pelos os pontos de máximo de  $-\cos \theta$  e os pontos de mínimo de  $\psi^2/2$ . Esses pontos têm coordenadas  $((2n+1)\pi, 0)$ . O diagrama de fase desse sistema está ilustrado na figura 2.4. O sentido das soluções pode ser facilmente inferido da primeira equação  $\theta' = \psi$  do sistema. De fato, no semiplano superior  $\psi > 0$ , temos  $\theta' > 0$ , o que significa um crescimento do ângulo  $\theta$ . Já no semiplano inferior  $\psi < 0$ , temos  $\theta' = \psi < 0$  e, portanto, um decréscimo de  $\theta$ .

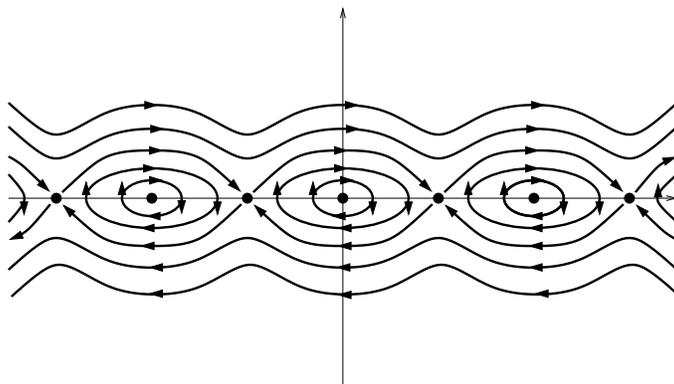


FIGURA 2.4. Diagrama de fase do sistema associado à equação do pêndulo sem amortecimento.

Devemos aproveitar para ressaltar que uma órbita não é, necessariamente, toda uma curva de nível. Pode ser apenas parte dela. Por exemplo, os vários pontos fixos do tipo centro pertencem a um mesmo nível, mas cada ponto fixo é uma órbita. Os pontos fixos de sela também pertencem a um mesmo nível, que inclui ainda todas as órbitas que conectam um ponto de sela a outro. Observe que essas órbitas que conectam os pontos de sela não “atravessam” os pontos fixos de sela, por causa da unicidade das soluções, válida nos casos em que os termos não-lineares são suaves. As soluções convergem para esses pontos fixos quando  $t \rightarrow \infty$  e  $t \rightarrow -\infty$ .

**Curiosidades.** A noção de sistema conservativo vista na seção 1 não está diretamente relacionada à de campo conservativo vista em conjunto com o Teorema de Stokes. Um campo conservativo é um campo de vetores  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{F}$  é menos o gradiente de uma outra função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . A função escalar  $V$  é chamada de potencial do campo  $\mathbf{F}$ . Em aplicações o campo  $\mathbf{F}$  está associado a um campo de forças agindo em uma ou mais partículas. O centro de massa dessas partículas é representado pela variável  $\mathbf{x}$  e é regido pelo sistema de equações de segunda ordem

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Observe que dessa forma  $\mathbf{F}$  não é exatamente um campo de forças, pois eliminamos as massas das partículas, que deveriam estar no lado esquerdo da equação, caso  $\mathbf{F}$  representasse um campo de forças.

Com  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$ , não é difícil mostrar que

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2 + V(\mathbf{x})$$

é um hamiltoniano para o sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{y}, \\ \mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \end{cases}$$

onde  $\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$  é a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ .

Observe, agora, que, caso  $n = 1$ , então o campo  $\mathbf{F}$  é na verdade um função escalar  $\mathbf{F} = f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que é sempre conservativa, pois podemos tomar  $V$  como menos uma primitiva qualquer de  $f$ . Dessa forma, temos o hamiltoniano

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$

do sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = f(x), \end{cases}$$

que está associado à equação de segunda ordem

$$x'' = f(x).$$

Para  $n > 1$ , nem todo campo é conservativo. Em particular, para  $n = 3$ , uma condição necessária é que o rotacional de  $\mathbf{F}$  seja identicamente zero. Deste modo, vemos que o conceito de campo conservativo está associado à generalização para  $n > 1$  do conceito de sistemas hamiltonianos para sistemas da forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{y}, \\ \mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Por outro lado, o conceito de sistemas conservativos visto na seção 1 visa a generalização para sistemas da forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

## Exercícios

- 2.1.** Verifique quais dos sistemas do exercício 1.1 são hamiltonianos.  
**2.2.** Vimos que um sistema bidimensional hamiltoniano tem a forma

$$\begin{cases} x' = H_y(x, y), \\ y' = -H_x(x, y), \end{cases}$$

para alguma integral  $H = H(x, y)$ , onde  $H_x$  e  $H_y$  denotam as derivadas parciais de  $H$ . Verifique que a matriz diferencial desse sistema é da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

para coeficientes apropriados  $a, b, c$ , dependentes de  $x$  e  $y$ , envolvendo derivadas de segunda ordem de  $H(x, y)$ . Em seguida, mostre que nenhum ponto fixo desse sistema pode ser atrator ou repulsor, apenas sela, centro ou degenerado.

**2.3.** Considere a equação

$$mx'' = g(x).$$

No caso em que  $g(x) = -k(x - x_e)$ , essa equação modela o sistema massa-mola sob a lei de Hooke, com a origem deslocada de tal forma que  $x$  denota o comprimento da mola e  $x_e$  é uma constante denotando o comprimento de equilíbrio da mola. Certas molas, porém, não obedecem a essa lei. Em muitos casos, a força de restauração é não-linear. Um exemplo é dado por

$$g(x) = -k(x - x_e) + \alpha(x - x_e)^3.$$

Quando  $\alpha < 0$ , a equação é conhecida como equação da mola dura e quando  $\alpha > 0$ , da mola macia. Faça um esboço do diagrama de fase do sistema no caso da mola dura.

**2.4.** Considere o movimento de um pêndulo como descrito na Seção 2.2. Escrevendo  $(x, y) = (l \cos \theta, l \sin \theta)$ , mostre que o vetor aceleração, em coordenadas cartesianas, é

$$(x'', y'') = \theta''(-y, x) - (\theta')^2(x, y).$$

Observe que os dois vetores no lado direito são as componentes tangencial e normal da aceleração. Como a norma dos vetores  $(-y, x)$  e  $(x, y)$  é igual a  $l$ , temos que esses dois vetores tem magnitude  $l\theta''$  e  $l(\theta')^2$ , respectivamente. Pela segunda lei de Newton, a força exercida no pêndulo é, precisamente, o vetor  $m(x'', y'')$ . A componente da força centrípeta  $F_c$  é dada pelo segundo termo, ou seja

$$F_c = -m(\theta')^2(x, y) = -ml(\theta')^2 \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|},$$

que é normal ao movimento e aponta sempre para dentro da circunferência sobre a qual se dá o movimento. Encontre a tensão que ocorre na haste do pêndulo e ache o ponto em que a magnitude da tensão é máxima.

**2.5.** Um exemplo clássico em física é o de um pêndulo em rotação. Esse exemplo pode aparecer de várias formas, como uma bolinha dentro de um tubo circular oco que pode ser girado em torno de um eixo diagonal (figura 2.5(a)), ou a de um pêndulo duplo com hastes de suporte (figura 2.5(b)), como no regulador de Watt de uma máquina a vapor.

Sejam  $m$  a massa da bola,  $R$  o comprimento da haste que segura a bola,  $\theta$  o ângulo que descreve a posição da bola em relação ao eixo de rotação, conforme ilustrado na figura, e  $\Omega$  a velocidade angular de rotação. Desprezando atritos e analisando as forças que agem sobre a bola, segue que o ângulo  $\theta$  satisfaz a equação diferencial

$$\theta'' = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta.$$

Mostre que o hamiltoniano desse sistema é

$$H(\theta, \psi) = \frac{1}{2}\psi^2 + \frac{\Omega^2}{2} \cos^2 \theta - \frac{g}{R} \cos \theta,$$

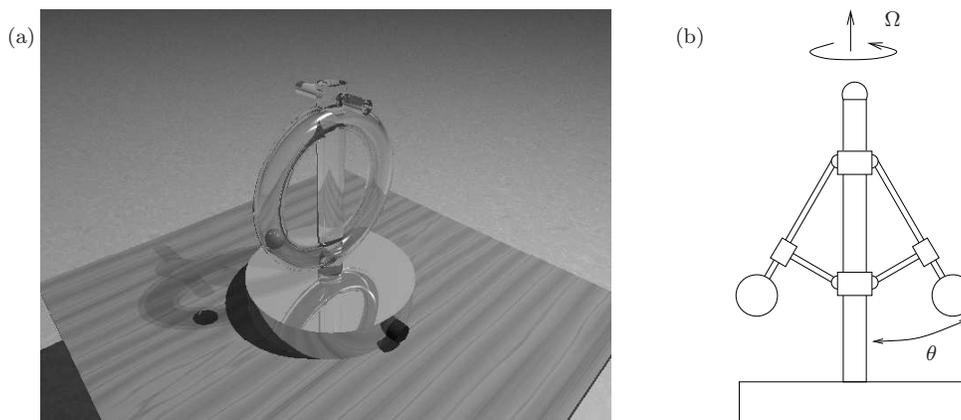


FIGURA 2.5. Dois exemplos de pêndulo em rotação.

onde  $\psi = \theta'$ . Faça um esboço do diagrama de fase do sistemas nos casos (i)  $\Omega^2 R < g$ ; (ii)  $\Omega^2 R = g$ ; e (iii)  $\Omega^2 R > g$ . Observe que nos casos (i) e (ii), temos apenas um ponto fixo estável, enquanto que no caso (iii), esse ponto fixo se torna instável e dois novos pontos fixos estáveis aparecem. Esse é um exemplo de bifurcação do tipo tridente em sistemas de equações.

Esse princípio é usado em máquinas a vapor. O aparelho é construído de tal forma que a velocidade angular aumenta com a pressão e que, na posição de equilíbrio  $\theta = 0$ , o aparelho mantém fechada uma válvula de escape para o vapor. Quando a pressão passa do valor crítico, o sistema passa para a nova posição de equilíbrio, abrindo a válvula e liberando o vapor, diminuindo, assim, a pressão e restaurando a pressão ideal desejada para o funcionamento da máquina.

Este modelo é também tomado como exemplo de que o hamiltoniano não é, necessariamente, a energia total do sistema (energia cinética mais potencial). Isso se deve ao fato de que a rotação não é proveniente de uma força potencial (i.e. não é do tipo gradiente de outra função).

### 3. Equação de Duffing e outros potenciais de sistemas hamiltonianos

**3.1. Equação de Duffing.** Uma equação clássica em equações diferenciais não-lineares é a equação de Duffing na forma

$$x'' = -\alpha x' + x - x^3 + \beta \cos(\omega t).$$

onde  $\alpha, \beta, \omega > 0$  Essa equação é, em um certo sentido, uma parametrização do comportamento de uma barra metálica sendo atraída por dois ímãs opostos, em um aparato sendo perturbado periodicamente no sentido horizontal, conforme ilustrado na figura 3.1. A modelagem completa envolve uma equação a derivadas parciais não-linear. No entanto, para pequenas vibrações, é possível mostrar que o comportamento da barra é dado qualitativamente pelo comportamento da equação acima, onde a variável  $x$  é essencialmente (mas não

exatamente), o deslocamento da ponta da barra de ferro em relação à posição de equilíbrio. Na equação,  $\alpha$  é um parâmetro de amortecimento,  $\omega$  é a frequência da perturbação periódica, e  $\beta$  é a amplitude dessa perturbação. Essa equação é um exemplo relativamente simples de sistema caótico. Mas observe que o sistema não é autônomo, devido à presença do termo  $\beta \cos(\omega t)$ . Mesmo sem esse termo, o sistema não é conservativo, devido ao amortecimento  $-\alpha x'$ .

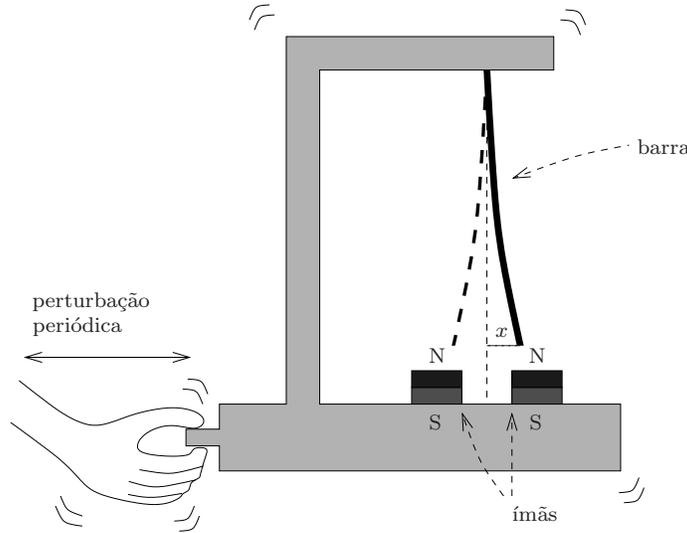


FIGURA 3.1. Barra metálica sendo atraída em direções opostas por dois ímãs, em um aparelho sendo perturbado periodicamente no sentido transversal ao da barra.

Nessa seção, vamos estudar apenas o modelo sem amortecimento e sem perturbação temporal. Nesse caso, temos a equação

$$x'' = x - x^3.$$

Essa equação pode ser escrita na forma

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x - x^3, \end{cases}$$

com potencial

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

e hamiltoniano

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

O potencial  $V(x) = x^4/4 - x^2/2$  tem dois pontos de mínimo,  $x = \pm 1$ , e um ponto de máximo local,  $x = 0$ . O gráfico desse potencial está ilustrado na figura 3.2(a). Na figura

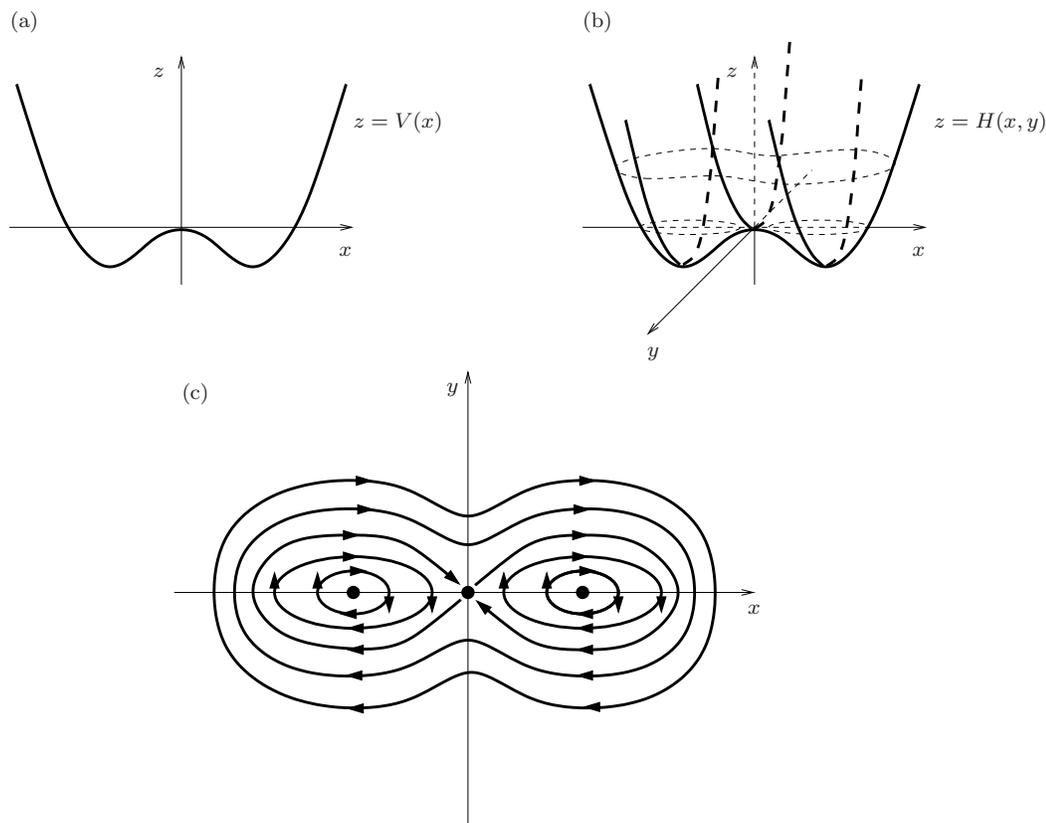


FIGURA 3.2. Sobre a equação  $x'' = x - x^3$ : (a) gráfico do potencial  $z = V(x) = -x^2/2 + x^4/4$ ; (b) gráfico do hamiltoniano  $z = H(x, y) = y^2/2 + V(x)$ ; e (c) gráfico do diagrama de fase do sistema no plano  $xy$ , onde  $y = x'$ .

**3.2(b)**, ilustramos o gráfico do hamiltoniano. Analisando as curvas de nível do hamiltoniano, chegamos ao diagrama de fase da figura **3.2(c)**. Observe que há três pontos fixos, em  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . O ponto fixo  $(0, 0)$  é um ponto de sela. Os pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$  não são hiperbólicos, mas se comportam qualitativamente como centros; são “centros não-lineares”.

Observe que a curva de nível zero engloba três órbitas: o ponto fixo  $(0, 0)$  e duas órbitas saindo de  $(0, 0)$  e voltando para  $(0, 0)$ , uma no semi-plano  $x > 0$  e outra no semi-plano  $x < 0$ . Todas as outras órbitas são periódicas, algumas no semi-plano  $x > 0$ , algumas no semi-plano  $x < 0$ , e o restante atravessando os dois semi-planos. Não esqueça que essas órbitas correspondem a comportamentos particulares da barra, podendo a barra oscilar em torno de um ou ambos os ímãs, ficar estacionada próxima a um dos ímãs ou exatamente entre os dois ímãs, ou ainda dar uma volta em torno de um dos ímãs e se aproximar da posição  $x = 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Dada uma solução com condição inicial  $x(0) = x_0$  e  $y(0) = y_0$ , podemos descobrir o comportamento dela através do seu nível  $H(x_0, y_0)$ . Observe, primeiramente, que os níveis dos pontos fixos são  $H(0, 0) = 0$  e  $H(\pm 1, 0) = -1/4$ . Se  $H(x_0, y_0) > 0$ , a órbita é periódica

e envolve todos os pontos fixos. Se  $-1/4 < H(x_0, y_0) < 0$ , a órbita também é periódica e envolve um dos pontos fixos do tipo centro, dependendo se  $x_0 > 0$  ou  $x_0 < 0$ . Se  $H(x_0, y_0) = 0$  e  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , então a órbita nasce e morre em  $(0, 0)$ , pertencendo ao semi-plano  $x > 0$ , se  $x_0 > 0$ , e ao semi-plano  $x < 0$ , se  $x_0 < 0$ . Em particular, se  $x(0) = 1/2$  e  $y(0) = y_0$ , temos que a solução é periódica se e somente se  $H(1/2, y_0) \neq 0$ , ou seja  $y_0 \neq \pm\sqrt{7/32}$ .

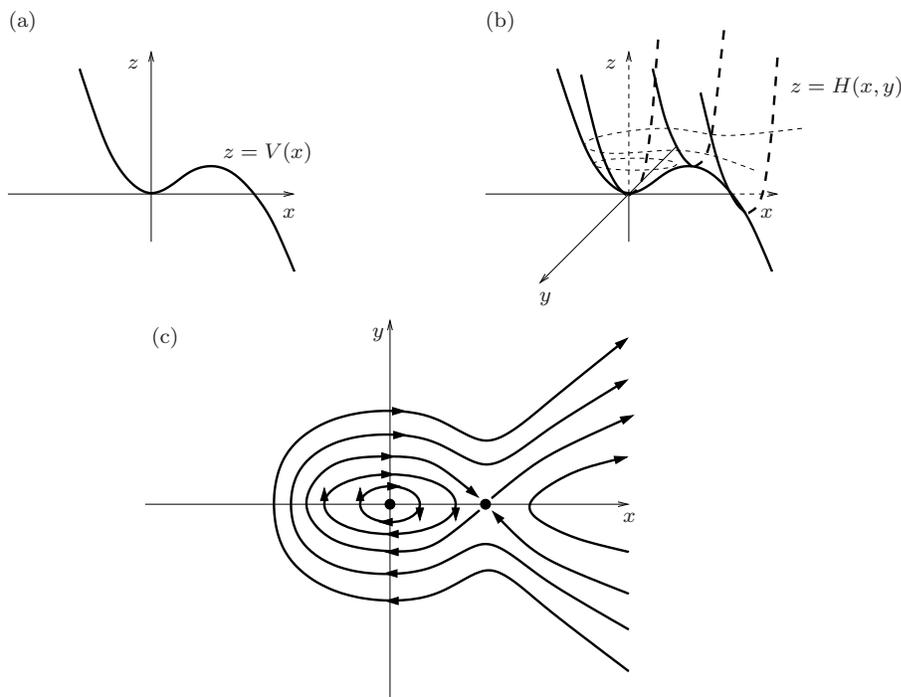


FIGURA 3.3. Sobre a equação  $x'' = x - x^2$ : (a) gráfico do potencial  $z = V(x) = -x^2/2 - x^3/3$ ; (b) gráfico do hamiltoniano  $z = H(x, y) = y^2/2 + V(x)$ ; e (c) gráfico do diagrama de fase do sistema no plano  $xy$ , onde  $y = x'$ .

**3.2. Um sistema com potencial cúbico.** Vamos considerar, agora, a equação

$$x'' = x^2 - x,$$

cujo potencial tem a forma

$$V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

e o hamiltoniano,

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

O potencial  $V(x) = x^2/2 - x^3/3$  tem um ponto de mínimo local,  $x = 0$ , e um ponto de máximo local,  $x = 1$ . O gráfico desse potencial está ilustrado na figura 3.3(a). Na figura 3.3(b), ilustramos o gráfico do hamiltoniano. Analisando as curvas de nível do hamiltoniano, chegamos ao diagrama de fase da figura 3.3(c). Observe que há dois pontos fixos, em  $(0, 0)$

e  $(1, 0)$ . O ponto fixo  $(0, 0)$  é um centro não-linear, enquanto que  $(1, 0)$  é um ponto de sela. Observe que, agora, temos várias soluções ilimitadas.

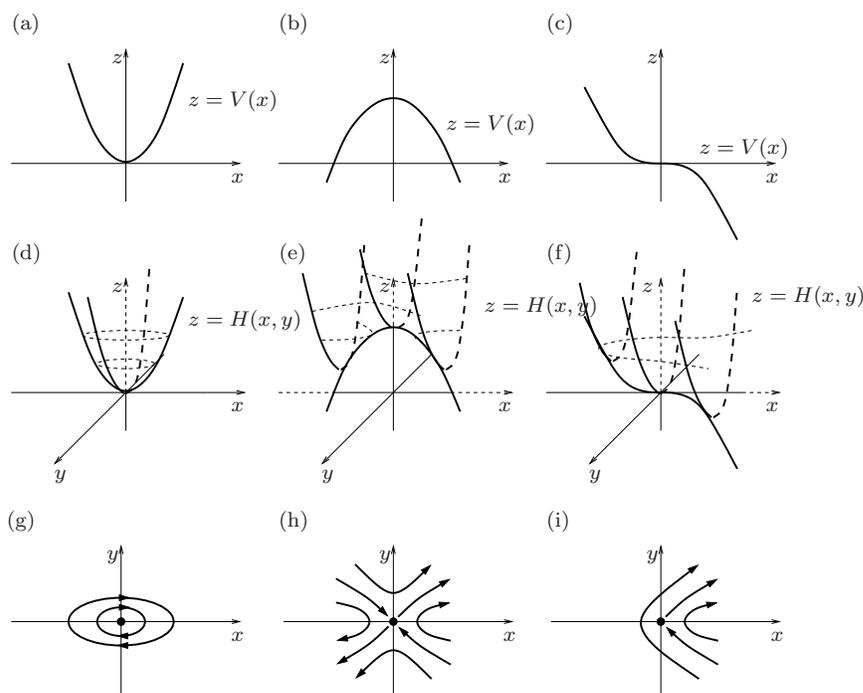


FIGURA 3.4. Vários potenciais  $z = V(x)$ , seus respectivos hamiltonianos  $z = H(x, y)$  e seus diagramas de fase.

### 3.3. Relação entre o potencial de sistemas mecânicos e o diagrama de fase.

Em geral uma equação da forma

$$x'' + g(x) = 0$$

pode ser escrita na forma

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -g(x), \end{cases}$$

com um hamiltoniano

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$$

e potencial dada por uma primitiva de  $g$ :

$$V'(x) = g(x).$$

Baseado nos exemplos acima, observe que há uma relação direta entre o potencial e o diagrama de fase. Primeiro observe que os pontos críticos  $x^*$  de  $V(x)$ , dados por  $V'(x^*) = g(x^*) = 0$ , são as coordenadas  $x$  de pontos fixos do sistema, que tem necessariamente a forma  $(x^*, 0)$ .

A natureza do ponto crítico do potencial determina o comportamento das órbitas próximas ao ponto fixo. Pontos de mínimo local do potencial geram pontos fixos não hiperbólicos (autovalores puramente imaginários) que se comportam como centros e são chamados de *centros não-lineares*. Pontos de máximo local do potencial geram pontos de sela do hamiltoniano e, assim, geram pontos fixos hiperbólicos do tipo sela. Por fim, pontos de inflexão do potencial geram pontos não-hiperbólicos com um autovalor nulo. Esses comportamentos estão ilustrados na figura 3.4. Vale lembrar que o sentido das órbitas segue direto da equação  $x' = y$ , que indica que no semi-plano  $y > 0$ , as soluções se deslocam no sentido de crescimento da coordenada  $x$ , enquanto que em  $y < 0$ , o sentido é contrário.

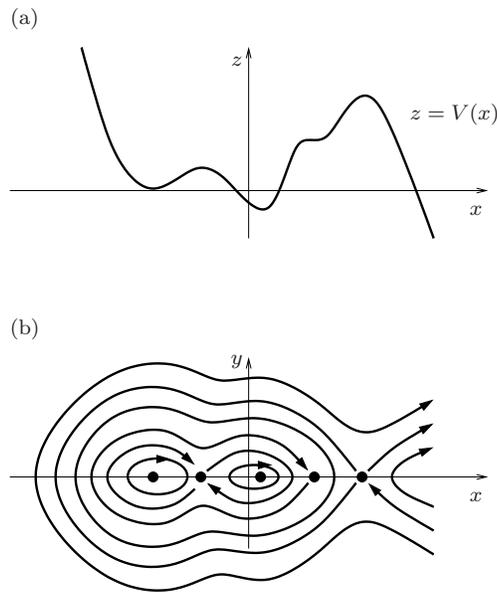


FIGURA 3.5. Em (a), temos um potencial  $z = V(x)$  com diferentes tipos de pontos críticos e em (b), o diagrama de fase correspondente.

Finalmente, na figura 3.5, mostramos um potencial  $z = V(x)$  com diferentes tipos de pontos críticos e o diagrama de fase correspondente.

Para o traçado das curvas de nível, sugerimos os seguintes passos

- (1) Determinar os pontos críticos;
- (2) Fazer a análise local das curvas de nível próximas a pontos fixos;
- (3) Traçar as curvas de nível globais dos pontos de sela e de inflexão, que são delimitadores importantes das outras curvas de nível; e
- (4) Traçar as curvas de nível restantes.

## Exercícios

**3.1.** Ache um hamiltoniano  $H = H(x, y)$  para o sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x - ax^n, \end{cases}$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , e  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Em seguida, esboce o diagrama de fase desse sistema nos casos i)  $a > 0$ ,  $n$  par, ii)  $a > 0$ ,  $n$  ímpar, iii)  $a < 0$ ,  $n$  par, iv)  $a < 0$ ,  $n$  ímpar. Em qual(is) desses casos as soluções são sempre limitadas?

**3.2.** Considere um sistema mecânico regido pela equação de segunda ordem não-linear

$$x'' - 2x + 4x^3 = 0.$$

Nesse sistema,  $x$  representa a posição de um objeto metálico sendo atraído em direções opostas por dois ímãs.

- Reescreva o problema como um sistema de duas equações de primeira ordem;
- Ache um hamiltoniano para esse sistema;
- Esboce o diagrama de fase desse sistema;
- Dadas as condições iniciais  $x(0) = 2$  e  $x'(0) = 0$ , ache os valores máximos e mínimos da posição  $x(t)$  e da velocidade  $x'(t)$  do objeto, em  $t \in \mathbb{R}$ .

**3.3.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x(3x - 6), \end{cases}$$

- Ache um hamiltoniano para o sistema e faça um esboço do diagrama de fase do mesmo.
- Determine os valores reais  $y_0$  para os quais a solução com  $x(0) = 0$  e  $y(0) = y_0$  é tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (2, 0).$$

**3.4.** Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x^2 + 2ax. \end{cases}$$

onde  $a$  é um parâmetro real positivo.

- Ache um hamiltoniano  $H = H(x, y)$  do sistema;
  - Faça um esboço do diagrama de fase do sistema;
  - Determine os valores positivos de  $a$  para os quais a solução com  $x(0) = 1/2$  e  $y(0) = 0$  assume apenas valores positivos de  $x(t)$ , para todo  $t$  real.
- 3.5.** Considere o hamiltoniano  $H(x, y) = y^2 + (x - \alpha)^6$ , onde  $\alpha$  é um parâmetro real.
- Escreva o sistema associado a esse hamiltoniano;
  - Faça um esboço do diagrama de fase do sistema;
  - Determine os valores de  $\alpha$  para os quais a coordenada  $x(t)$  da solução  $(x(t), y(t))$  com  $x(0) = 16$  e  $y(0) = 0$  assume apenas valores positivos.
- 3.6.** Considere o hamiltoniano  $H(x, y) = y^2 + x^2(x - 1)$ .

- (a) Escreva o sistema associado a esse hamiltoniano;  
 (b) Faça um esboço do diagrama de fase do sistema.  
 (c) Determine os valores de  $\alpha$  para os quais a solução com  $x(0) = 3/4$  e  $y(0) = \alpha$  é periódica.

**3.7.** Sabendo que a função

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - 2(x+1)^2(x-1)^2$$

é um hamiltoniano para um sistema de duas equações de primeira ordem em  $x$  e  $y$ , esboce o diagrama de fase do sistema e determine os valores reais de  $\alpha$  para os quais a solução com  $x(0) = 0$  e  $y(0) = \alpha$  é periódica.

**3.8.** Sabendo que a função

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - 2x^2(x-3)$$

é um hamiltoniano para um sistema de duas equações de primeira ordem em  $x$  e  $y$ , determine os valores reais de  $\alpha$  para os quais os limites  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$  da solução com  $x(0) = 0$  e  $y(0) = \alpha$  existem.

**3.9.** A órbita de um planeta em torno de um sol segundo a relatividade geral pode ser dada pela equação

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \alpha + \varepsilon u^2,$$

onde  $\alpha > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $u = 1/r$  e  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares do centro de massa do planeta em um plano com a origem no sol. Assumindo que  $16a\varepsilon < 3$ , reescreva a equação acima como um sistema hamiltoniano, faça um esboço do plano de fase desse sistema, determine uma solução desse sistema que corresponda a uma órbita circular estável do planeta em torno da origem e ache o raio dessa órbita. (Não confunda órbita do planeta com órbita do sistema hamiltoniano e entenda por órbita estável do planeta como tendo a propriedade de que órbitas próximas a ela continuem próximas).

**3.10.** Em modelagem molecular, várias forças de atração entre átomos devem ser levadas em consideração, como ligações químicas iônicas, ligações covalentes, pontes de hidrogênio e forças de Van der Waals. Em geral, os átomos são representados pontualmente e os efeitos quânticos são reduzidos a uma força de atração mecânica entre esses pontos e que depende da diferença  $x - x_r$  entre a distância  $x$  de um átomo a outro e uma distância de referência  $x_r$ . O que está em jogo aqui é a precisão da modelagem versus a sua complexidade, visto que essas modelagens são utilizadas para o desenvolvimento de métodos computacionais capazes de simular reações químicas e bioquímicas complexas, envolvendo milhares de átomos, o que é extremamente custoso computacionalmente.

O movimento desses átomos é essencialmente tridimensional, podendo, em certos casos especiais, ser reduzido a um movimento bidimensional ou até mesmo unidimensional. Vamos considerar, abaixo, apenas movimentos longitudinais entre pares

de átomos, que geram movimentos unidimensionais. Nesse caso, somos levados a sistemas hamiltonianos com um hamiltoniano da forma

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x),$$

onde  $y = x'$  e  $V(x)$  é um potencial apropriado dependendo do tipo de ligação química e dos átomos envolvidos. Vejamos alguns tipos específicos de potenciais. Todos os parâmetros abaixo são positivos.

- (1) Em ligações covalentes, em que elétrons de um ou mais átomos são compartilhados com outros átomos, para completar o último nível de energia, é comum se tomar um potencial análogo ao do sistema massa-mola, ou seja, um potencial quadrático

$$V(x) = \frac{\alpha}{2}(x - x_r)^2,$$

com a força de atração dependendo linearmente em  $x - x_r$ . Os átomos vibram, oscilando em torno do comprimento de referência  $x_r$ , onde  $x_r$  é um valor fixo dependente dos átomos envolvidos na ligação química em questão.

- (2) Ainda em ligações covalentes, modelagens mais precisas utilizam potenciais de ordem par mais alta, como

$$V(x) = \frac{\beta_n}{n}(x - x_r)^n, \quad n \text{ par}$$

ou, ainda, da forma (potencial de Morse)

$$V(x) = \mu(1 - \exp(-\sigma(x - x_r)))^2.$$

- (3) Em ligações iônicas, elétrons de um átomo são transferidos para outro, formando íons de cargas contrárias, causando uma atração elétrica entre os íons formados. O potencial é do tipo Coulomb, proporcional ao inverso da distância (gerando uma força proporcional ao inverso do quadrado da distância):

$$V(x) = \pm \frac{\kappa}{x}.$$

O sinal positivo corresponde, de fato, ao caso de cargas contrárias, gerando uma atração entre os íons. O sinal negativo deve ser usado no caso de cargas de mesmo sinal, gerando uma repulsão entre os íons.

- (4) As pontes de hidrogênio são ligações iônicas entre átomos de hidrogênio que estão ligados a outros átomos através de ligações covalentes. Nessas ligações covalentes, os elétrons compartilhados “passam mais tempo” no átomo que recebe o elétron compartilhado do hidrogênio, gerando uma fração de carga positiva no hidrogênio e uma fração de carga negativa no outro átomo. Esses compostos podem se unir a outros compostos similares, graças a essas cargas parciais, através de uma ligação iônica mais fraca do que a normal. A água em estado líquido, por exemplo, apresenta uma rede de moléculas  $\text{H}_2\text{O}$  ligados por pontes de hidrogênio entre os átomos de hidrogênio de uma molécula e os átomos de oxigênio de outra molécula. Essas ligações são constantemente

quebradas e refeitas em disposições diferentes. O potencial é o de uma ligação iônica, mas com uma constante  $\alpha$  relativamente menor.

- (5) A força de van der Waals está associada a flutuações na densidade de distribuição de elétrons em torno do núcleo, gerando dipolos elétricos transientes. Esta é uma força mais fraca que as anteriores, mas é importante entre moléculas em equilíbrio eletrostático (por exemplo, a eficiência de uma enzima pode depender de uma grande quantidade de ligações do tipo van der Waals entre átomos da enzima e átomos do substrato, que é a macromolécula em que a enzima deve agir). O potencial de van der Waals está incluído no potencial do tipo 6/12 de Lennard-Jones:

$$V(x) = -\frac{\gamma}{x^6} + \frac{\lambda}{x^{12}}.$$

O primeiro termo, de atração, corresponde ao potencial de van der Waals. O segundo termo é incluído com o objetivo de modelar uma força de repulsão entre as nuvens de elétrons causada pelo princípio de exclusão de Pauli, assim como forças de repulsão entre os núcleos; a potência 12 é apenas uma aproximação. Uma aproximação melhor é dada pelo *potencial de Buckingham*:

$$V(x) = -\frac{\gamma}{x^6} + \lambda_1 e^{\lambda_2 x}.$$

Faça um esboço das curvas de nível de cada hamiltoniano e um esboço do plano de fase  $xy$  do sistema associado. Em seguida, determine, nos casos (1) e (2), os valores de  $y_0$  para os quais a solução com  $x(0) = x_r$  e  $x'(0) = y_0$  é periódica. Observe que na maioria dos casos, qualquer  $y_0$  satisfaz essa condição, enquanto que em um dos casos, não. Essas soluções periódicas correspondem a vibrações em torno de uma posição de equilíbrio. Finalmente, no caso (5), caracterize algebricamente os valores de  $x(0)$  e  $y(0)$  para os quais a solução é periódica.

- 3.11.** Modifique o programa `Scilab` do exercício 3.13 do capítulo 6 para traçar o campo de vetores e as órbitas do sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x - x^3, \end{cases}$$

associado à equação de Duffing. Modifique a região traçada para  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ , o tempo final para `tfinal=20` e as condições iniciais para

$$(x_0, y_0) = (1, 1/2), (-1, -1/2), (1, \sqrt{2}/2), (-1, -\sqrt{2}/2), (1, -1), (-1, 1.5).$$



## Sistemas Não-Conservativos e Aplicações

### 1. \*Perturbações dissipativas de sistemas conservativos

Vamos começar com sistemas não-conservativos de uma forma bem particular, a saber, perturbações dissipativas de sistemas conservativos. Nesses sistemas uma função escalar do tipo energia ainda está disponível para nos ajudar, mas ao invés dessa função ser constante ao longo das órbitas ela é não-crescente. As órbitas não pertencem mais às curvas de nível, mas as curvas de nível ainda podem auxiliar na descrição das órbitas, pois estas atravessam as curvas de nível no sentido de menor nível. Vejamos como isso pode ser feito.

Vamos considerar sistemas mecânicos da forma

$$x'' + \alpha x' + g(x) = 0.$$

O termo  $g(x)$  está associado a uma força conservativa e o termo  $\alpha x'$ , sendo proporcional à velocidade e com  $\alpha > 0$ , representa uma dissipação, ou amortecimento, no sistema. Com  $\alpha = 0$ , o sistema é conservativo, com um hamiltoniano dado por

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x),$$

onde  $V(x)$  é uma primitiva de  $g(x)$  e  $y = x'$ . Com  $\alpha > 0$ , vamos mostrar que  $H(x, y)$  é decrescente ao longo das soluções não-estacionárias. Mais precisamente, considere uma solução  $(x(t), y(t))$  do sistema associado

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -g(x) - \alpha y. \end{cases}$$

O hamiltoniano varia ao longo dessa solução de acordo com

$$H(x(t), y(t)) = \frac{y(t)^2}{2} + V(x(t)),$$

que é uma função escalar da variável temporal  $t$ . Derivando essa função em relação a  $t$ , usando que  $V'(x) = g(x)$ , achamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= y(t)y'(t) + g(x(t))x'(t) = y(t)(-g(x(t)) - \alpha y(t)) + g(x(t))y(t) \\ &= -\alpha y(t)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) \leq 0$$

e a função  $H(x(t), y(t))$  é não-crescente. Além disso, ela é estritamente decrescente a menos que  $(x(t), y(t))$  seja uma solução estacionária. De fato, se  $H(x(t), y(t))$  não for estritamente decrescente, então ela é constante em algum intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ . Nesse intervalo, temos, então, que

$$0 = \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = -\alpha y(t)^2,$$

logo,  $x'(t) = y(t) = 0$  nesse intervalo, assim como  $y'(t) = 0$ . Logo,  $x(t)$  e  $y(t)$  são constantes nesse intervalo. Pela unicidade das soluções, essa solução deve coincidir com uma solução estacionária e ser, portanto, constante para todo  $t$  real.

Concluimos, então, que se  $(x(t), y(t))$  não for uma solução estacionária, então a função  $H(x(t), y(t))$  é estritamente decrescente em  $t$ .

Vamos nos concentrar em equações essencialmente da forma  $x'' + \alpha x' + g(x) = 0$ , mas vale ressaltar que essas idéias podem ser aplicadas a equações mais gerais.

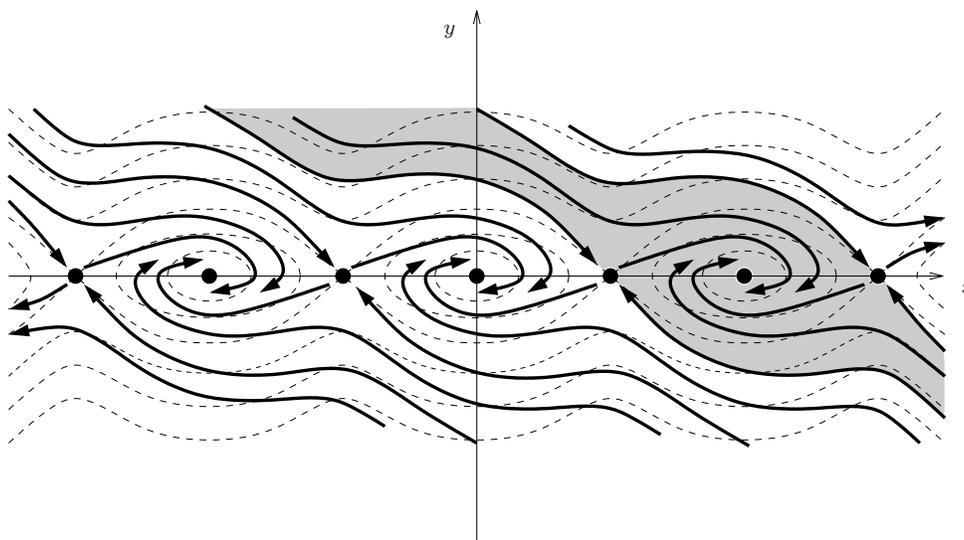


FIGURA 1.1. Curvas de nível da função energia  $H(x, y) = y^2/2 - (g/l) \cos x$  (linhas tracejadas), principais órbitas do sistema do pêndulo amortecido (linhas sólidas), e a região (em cinza) na qual as órbitas convergem para o ponto fixo  $(x^*, y^*) = (2\pi, 0)$ .

**1.1. Equação do pêndulo amortecido.** Tomemos como exemplo a equação do pêndulo amortecido:

$$ml\theta'' = -mg \sin \theta - \beta l\theta',$$

onde o termo  $\beta$  representa um coeficiente de amortecimento. Para simplificar, vamos denotar  $\theta$  por  $x$ , dividir a equação por  $ml$  e reescrever a equação na forma

$$x'' = -\kappa \sin x - \alpha x',$$

onde  $\kappa = g/l$  e  $\alpha = \beta/m$ . A energia do sistema é dada pelo hamiltoniano associado

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \kappa \cos x.$$

Pelo resultado acima, essa energia é decrescente ao longo das soluções não-estacionárias. Conhecendo as curvas de nível da função  $H(x, y)$  e sabendo que as órbitas atravessam essas curvas de nível em direção às de nível cada vez mais baixo, podemos esboçar o diagrama de fase conforme a figura 1.1. Observe que as órbitas que “morrem” (limite quando  $t \rightarrow \infty$ ) em dois pontos fixos de sela consecutivos delimitam uma região onde as órbitas “morrem” no ponto fixo atrator entre esses dois pontos fixos de sela. Essas são as separatrizes de sela em relação ao comportamento futuro.

Exceto pelas soluções que convergem para um ponto fixo de sela, todas as outras soluções convergem para um ponto fixo atrator. Fisicamente, o ponto fixo atrator representa o pêndulo na posição mais baixa e a maioria das soluções converge para essa posição de equilíbrio, podendo, se a velocidade inicial for muito alta, dar várias voltas completas até começar a oscilar em torno dessa posição de equilíbrio, diminuindo cada vez mais de amplitude e se aproximando da posição de equilíbrio.

**1.2. Equação de Duffing com amortecimento.** Vamos fazer mais um exemplo, o da equação de Duffing com amortecimento:

$$x'' = -\alpha x' + x - x^3.$$

onde  $\alpha > 0$ . Essa equação tem como energia o hamiltoniano

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Devido ao amortecimento, essa energia não é conservada, ela decresce ao longo do movimento, com

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = -\alpha y(t)^2.$$

Traçando as curvas de nível de  $H(x, y)$  e usando o fato que as soluções decrescem de nível, podemos traçar o diagrama de fase do sistema conforme ilustrado na figura 1.2. Observe o papel das separatrizes do ponto de sela em relação ao futuro. Essas separatrizes, que são as órbitas que “morrem” na origem, delimitam duas regiões espirais, uma na qual as orbitas convergem para o ponto fixo atrator  $P^- = (-1, 0)$  e outra na qual as órbitas convergem para o ponto fixo atrator  $P^+ = (1, 0)$ .

## Exercícios

**1.1.** Trace o diagrama de fase do sistema bidimensional associado à equação

$$x'' + x' - 2x(3x - 6) = 0.$$

Em seguida, indique, no diagrama de fase, a região na qual as órbitas convergem para o único ponto fixo atrator.

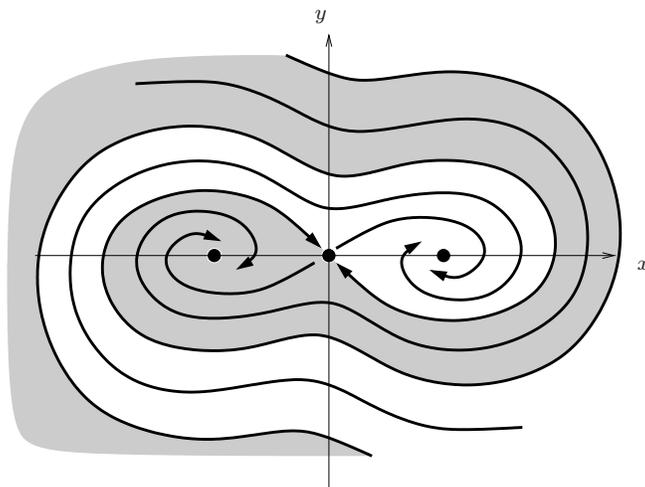


FIGURA 1.2. Diagrama de fase da equação de Duffing com amortecimento  $x' = y$ ,  $y' = -\alpha y + x - x^3$ . A região cinza contém as órbitas que convergem para o ponto fixo  $P^- = (-1, 0)$ , enquanto que a região clara contém as órbitas que convergem para  $P^+ = (1, 0)$ . O limite entre essas regiões é formado pelas órbitas que convergem para o ponto fixo de sela  $P_0 = (0, 0)$ .

**1.2.** Trace o diagrama de fase do sistema bidimensional associado à equação

$$x'' = x^2(x - 1) - 2x'.$$

**1.3.** Considere um sistema mecânico com amortecimento quadrático, da forma

$$x'' + \beta|x'|x' + g(x) = 0,$$

com  $\beta > 0$ . Mostre que o hamiltoniano do sistema conservativo associado também é decrescente ao longo das soluções não-estacionárias.

## 2. Sistemas não-conservativos e o modelo de competição entre espécies

Vamos considerar, agora, casos mais gerais de sistemas não-conservativos. Vamos utilizar um método análogo ao método das isóclinas visto em uma dimensão. Vamos tentar identificar as regiões do plano em que cada coordenada é crescente ou decrescente e a partir do comportamento das soluções em cada região, tentar esboçar o comportamento global das soluções.

Considere um sistema qualquer da forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Primeiramente, vamos identificar a curva de nível zero de cada função  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ . Em certos casos essa “curva” de nível zero pode ser simplesmente um ponto ou na verdade um conjunto de curvas. De qualquer maneira, essa curva de nível poderá separar o plano em uma

ou mais regiões. Em cada um dessas regiões, a função  $f(x, y)$  será positiva ou negativa. Como  $x' = f(x, y)$ , isso indicará que uma solução  $(x(t), y(t))$  qualquer que passar por essa região em um certo intervalo de tempo  $]t_1, t_2[$  terá sua coordenada  $x(t)$  crescente (se  $f(x, y) > 0$  nessa região) ou decrescente (se  $f(x, y) < 0$ ) nesse intervalo de tempo. Analogamente, o estudo da curva de nível zero de  $g(x, y)$  e do sinal de  $g(x, y)$  nas regiões delimitadas pela curva de nível zero indicará o crescimento ou decréscimo da coordenada  $y(t)$  nessa região. Com essas informações, será possível, em certos casos, fazer o esboço, completo ou parcial, do diagrama de fase do sistema. Vejamos um caso concreto.

**2.1. Modelo de competição entre espécies.** Vimos que o modelo geral de interação entre duas espécies tem a forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = M(x, y)x, \\ \frac{dy}{dt} = N(x, y)y. \end{cases}$$

Um caso particular que modela uma certa competição entre as duas espécies é dado pelas taxas de crescimento específico

$$M(x, y) = \lambda - ax - by, \quad N(x, y) = \mu - cx - dy,$$

onde todos os parâmetros  $\lambda, \mu, a, b, c, d$  são positivos. Os sinais indicam que o crescimento de qualquer uma das espécies é prejudicial às duas espécies, como no caso das espécies disputarem uma mesma fonte de alimentação limitada. Temos, assim, o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\lambda - ax - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (\mu - cx - dy)y. \end{cases}$$

Sejam

$$f(x, y) = M(x, y)x = (\lambda - ax - by)x, \quad g(x, y) = N(x, y)y = (\mu - cx - dy)y.$$

A curva de nível zero de  $f(x, y)$  é formada, na verdade, por duas retas, pois

$$f(x, y) = 0 \iff M(x, y) = 0 \text{ ou } x = 0 \iff \lambda - ax - by = 0 \text{ ou } x = 0.$$

Como os parâmetros  $\lambda, a$  e  $b$  são positivos, a reta  $\lambda - ax - by = 0$  passa pelos semi-eixos  $x > 0$  e  $y > 0$ , tendo inclinação negativa. A outra reta é o próprio eixo  $y$ . Essas duas retas estão ilustradas na figura 2.1(a).

Analogamente, a curva de nível zero de  $f(x, y)$  também é formada por duas retas, dadas por

$$g(x, y) = 0 \iff N(x, y) = 0 \text{ ou } y = 0 \iff \mu - cx - dy = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Como os parâmetros  $\mu, c$  e  $d$  são positivos, a reta  $\mu - cx - dy = 0$  também passa pelos semi-eixos  $x > 0$  e  $y > 0$  e tem inclinação negativa. A outra reta é o eixo  $x$ . Essas duas retas estão ilustradas na figura 2.1(b).

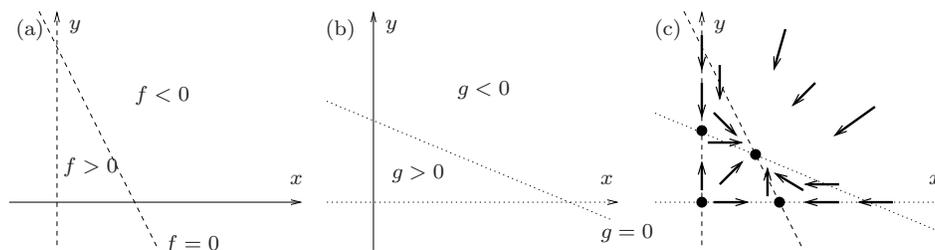


FIGURA 2.1. Regiões de crescimento e decréscimo (a) da coordenada  $x$ ; (b) da coordenada  $y$ ; e (c) a inclinação dos vetores tangentes  $(x', y') = (f(x, y), g(x, y))$  das órbitas em cada região, no primeiro quadrante.

Os parâmetros  $\lambda, \mu, a, b, c, d$  não estão definidos nesse momento. Por isso, não podemos definir a posição relativa das duas retas  $\lambda - ax - by = 0$  e  $\mu - cx - dy = 0$ . Dependendo dos parâmetros, essas retas podem ser paralelas, coincidentes ou concorrentes. No caso de serem concorrentes, podemos ter o ponto de interseção em diversos lugares, como no primeiro, no segundo ou no quarto quadrantes ou em um dos semi-eixos positivos. A título de ilustração, vamos supor inicialmente que essas duas retas estejam como indicado na figura 2.1. Pode-se verificar que essa situação corresponde às condições

$$\frac{b}{d} < \frac{\lambda}{\mu} < \frac{a}{c}.$$

Assim, juntando as informações sobre os sinais de  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , podemos descrever a inclinação do vetor tangente

$$(x', y') = (f(x, y), g(x, y))$$

em cada região. Esses são os vetores tangentes à órbita que passa pelo ponto  $(x, y)$  em questão. Mais precisamente, considere, por exemplo, um ponto  $(x_0, y_0)$  que está na região em que  $f(x, y) > 0$  e  $g(x, y) > 0$ . Então a solução  $(x(t), y(t))$  que passa por  $(x_0, y_0)$  em um instante  $t = t_0$  (ou seja  $x(t_0) = x_0$  e  $y(t_0) = y_0$ ) tem, nesse instante, o vetor tangente dado por  $(x'(t_0), y'(t_0)) = (f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$ , logo  $x'(t_0) > 0$ ,  $y'(t_0) > 0$  e as duas coordenadas são crescentes. Baseado nisso, podemos indicar a inclinação de vetores tangentes típicos em cada região, conforme ilustrado na figura 2.1(c). A partir dessa ilustração, podemos tentar esboçar o conjunto das órbitas, que são curvas que passam tangentes a esses vetores.

Observe que na figura 2.1(c) indicamos, também, os vetores tangentes nos pontos das retas onde uma das funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  se anula. Nesses pontos, uma das coordenadas do vetor tangente se anula e o vetor tangente é horizontal ou vertical, dependendo do caso.

Nesse momento, podemos, também, identificar os pontos fixos do sistema. Esses pontos podem ser vistos como os pontos de interseção entre uma das curvas de nível zero de  $f(x, y)$  e uma das curvas de nível zero de  $g(x, y)$ . De fato, nesses pontos de interseção, temos  $f(x, y) = 0$  e  $g(x, y) = 0$ , que definem os pontos fixos. Esses pontos fixos estão identificados

na figura 2.1(c). São eles:

$$A = (0, 0), \quad B = \left(0, \frac{\mu}{d}\right), \quad C = \left(\frac{\lambda}{a}, 0\right), \quad D = \frac{1}{ad - bc}(d\lambda - b\mu, a\mu - c\lambda).$$

O ponto  $D$  é obtido do sistema

$$\begin{cases} ax + by = \lambda, \\ cx + dy = \mu. \end{cases}$$

A hipótese  $b/d < \lambda/\mu < a/c$  garante que  $ad - bc > 0$ ,  $d\lambda - b\mu > 0$  e  $a\mu - c\lambda > 0$ , logo o ponto fixo  $D$  se encontra no primeiro quadrante.

Observe que só nos preocupamos com o primeiro quadrante. A razão disso é simplesmente a motivação desse modelo como de dinâmica populacional, onde populações negativas não têm sentido. Contudo, do ponto de vista matemático, a análise acima pode perfeitamente ser estendida para o plano todo.

Agora estamos prontos para completar o esboço do diagrama de fase. Primeiramente, vamos observar os semi-eixos positivos. Esses semi-eixos representam a ausência de uma das espécies. Intuitivamente, é natural esperarmos que se o sistema está em um semi-eixo em algum instante ele continue nesse semi-eixo para sempre, pois uma espécie não pode surgir do nada (é claro que não estamos considerando a evolução das espécies, aqui). Matematicamente, isso pode ser visto da equação diferencial. De fato, se  $x = 0$ , temos  $x' = 0$ , o que faz com que  $x(t) = 0$  para todo  $t$ , e o sistema se reduz a uma equação  $y' = (\mu - dy)y$  apenas para a espécie  $y$ . Geometricamente, isso também pode ser observado do fato de que o vetor tangente no eixo  $y$  aponta em direção ao próprio eixo  $y$ , fazendo com que a evolução do sistema se mantenha ao longo do eixo  $y$ . Essas observações indicam que no eixo  $y$  o diagrama de fase se reduz à linha de fase da equação unidimensional  $y' = (\mu - dy)y$ . Analogamente, o diagrama de fase no eixo  $x$  se reduz à linha de fase da equação unidimensional  $x' = (\lambda - ax)x$ . Essas linhas de fase estão indicadas na figura 2.2.

Agora, vamos observar o que acontece na região acima das duas retas  $\lambda - ax - by = 0$  e  $\mu - cx - dy = 0$ . Nessa região, o vetor tangente tem as suas duas coordenadas negativas. Logo, uma solução nessa região tem as duas coordenadas decrescentes. Conforme o tempo avança, uma solução nessa região terá três destinos possíveis: atravessar a reta  $\lambda - ax - by = 0$ , atravessar a reta  $\mu - cx - dy = 0$ , ou convergir para o ponto fixo  $D$ . Nenhuma outra situação será possível. De fato, ela não pode cruzar os semi-eixos porque isso violaria a unicidade das soluções.

Da mesma forma, uma solução que se encontra na região abaixo das duas retas  $\lambda - ax - by = 0$  e  $\mu - cx - dy = 0$  terá três destinos possíveis: atravessar a reta  $\lambda - ax - by = 0$ , atravessar a reta  $\mu - cx - dy = 0$ , ou convergir para o ponto fixo  $D$ .

Quanto às soluções que entram na região entre as duas retas  $\lambda - ax - by = 0$  e  $\mu - cx - dy = 0$ , o único destino possível delas é convergir para o ponto fixo  $D$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Para completar, uma análise via linearização indica que os pontos fixos  $B$  e  $C$  são pontos fixos hiperbólicos do tipo sela. Deles, nascem soluções que convergem para o ponto fixo  $D$ . Essas soluções conectam os pontos fixos  $B$  e  $C$  ao ponto fixo  $D$  e são soluções especiais, que chamamos de ligações de sela. Elas delimitam o plano em duas regiões nas quais as

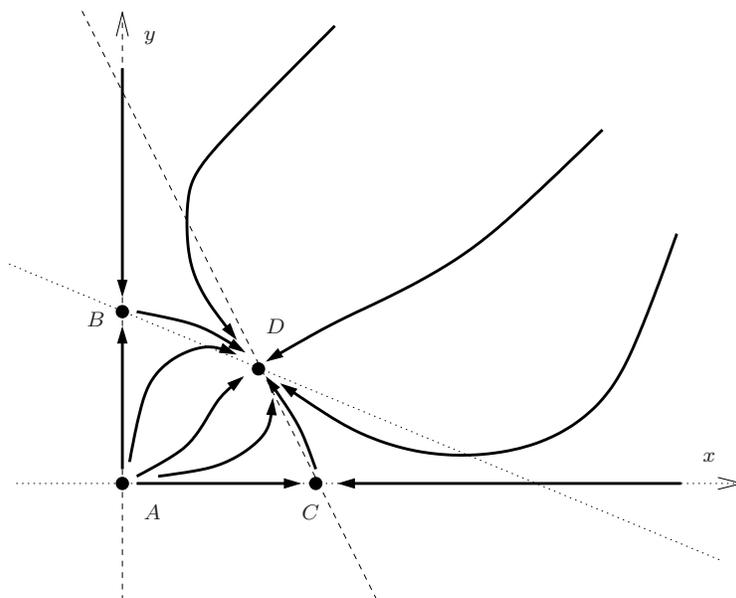


FIGURA 2.2. Esboço do diagrama de fase do sistema de competição entre espécies no caso em que  $b/d < \lambda/\mu < a/c$ .

soluções têm comportamentos distintos quando  $t \rightarrow -\infty$  (ou  $t \rightarrow +\infty$ , em certos casos). Por exemplo, as soluções à esquerda nascem do ponto fixo  $A$ , enquanto que as soluções à direita se afastam continuamente da origem quando  $t \rightarrow -\infty$ .

Quanto ao ponto fixo  $A = (0, 0)$ , vemos, pela análise via linearização, que ele é um ponto fixo hiperbólico repulsor, com autovalores  $\mu$  e  $\lambda$  positivos e auto-espacos  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente. Mas, nesse momento, a relação de ordem entre  $\mu$  e  $\lambda$  não está definida, podendo esses autovalores serem iguais ou não. Sem essa definição, não podemos afirmar se as órbitas se afastam da origem necessariamente tangentes a algum dos eixos e, caso positivo, qual deles. A figura 2.2 ilustra uma situação em que  $\lambda = \mu$ .

**2.2. Competição entre espécies – outros casos.** Vimos acima um caso específico de competição entre espécies, com os parâmetros satisfazendo as condições

$$\frac{b}{d} < \frac{\lambda}{\mu} < \frac{a}{c}.$$

Mas este é apenas um caso dentre vários possíveis. Não faremos os outros casos em detalhe, isso é deixado como exercício. Vamos nos limitar a apresentar, na figura 2.3 um esboço do diagrama de fase de cada situação.

Um caso bastante interessante e importante é o do último diagrama de fase da figura 2.3. Nesse caso, o ponto de equilíbrio fora dos eixos é um ponto de sela, portanto, instável. Na prática, em geral, as soluções do sistema convergem para uma situação em que apenas uma das espécies sobrevive. Este fenômeno é a base da ação da penicilina, uma substância antibiótica produzida pelo fungo *Penicillium notatum* e que destrói várias bactérias nocivas.

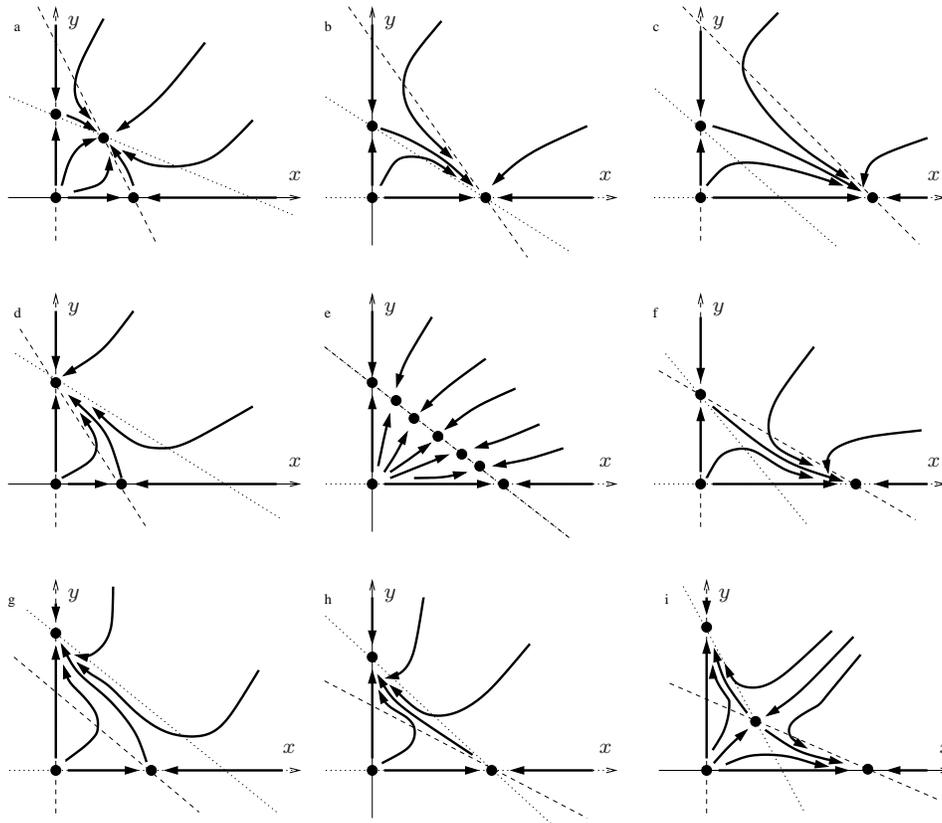


FIGURA 2.3. Esboço do diagrama de fase do sistema de competição entre espécies em várias situações diferentes, dependendo dos parâmetros.

Observe, pelo diagrama de fase, que a situação limite do sistema depende da relação entre as concentrações iniciais das duas espécies. Se a concentração inicial de uma das substâncias for suficientemente grande em comparação com a da outra, ela vai eliminar a outra espécie do meio. Esse mesmo fenômeno aparece na fabricação de cerveja. Conforme mencionado na seção 1.3, o fungo *S. cerevisiae* é usado na fermentação de cerveja. Ele compete com outros fungos e bactérias e cuidados devem ser tomados para diminuir significativamente a quantidade desses micro-organismos indesejados, para que o *S. cerevisiae* elimine esses competidores do tanque de fermentação. Na prática, simplificações de modelagem e o fato da eliminação completa só ocorrer no limite quando o tempo vai para infinito, a ação dessa competição tem como efeito evitar que a outra espécie aumente a níveis prejudiciais. Dados experimentais obtidos por Gause [6] com os fungos *Saccharomyces cerevisiae* e *Schizosaccharomyces kephir* confirmaram a validade do modelo de competição entre essas duas espécies, com os parâmetros  $\lambda = 0,2586$ ,  $\mu = 0,05744$ ,  $a = 0,0203$ ,  $b = 0,05711$ ,  $c = 0,004803$  e  $d = 0,009768$ .

**2.3. Mais um exemplo.** Para solidificar a idéia, vamos considerar mais um sistema, a saber,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3y^2 - x, \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 4 + y^2). \end{cases}$$

Os pontos fixos são dados por

$$\begin{cases} 3y^2 - x = 0, \\ y(x - 4 + y^2) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y^2, \\ y(3y^2 - 4 + y^2) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y^2, \\ y = 0 \text{ ou } y^2 = 1. \end{cases}$$

Logo, temos três pontos fixos, dados por

$$A = (0, 0), \quad B = (3, 1), \quad C = (3, -1).$$

Para a análise via linearização, devemos diferenciar o lado direito do sistema de equações, o que nos leva à matriz

$$L(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 6y \\ y & x - 4 + 3y^2 \end{bmatrix}.$$

Em cada ponto fixo, temos

$$L(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad L(3, 1) = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad L(3, -1) = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $L(0, 0)$  é diagonal, com autovalores  $-1$  e  $-4$  e auto-espacos coincidindo com os eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, sendo  $A = (0, 0)$  um ponto fixo hiperbólico atrator, com o eixo  $x$  associado à direção mais lenta. Os outros pontos fixos são hiperbólicos do tipo sela.

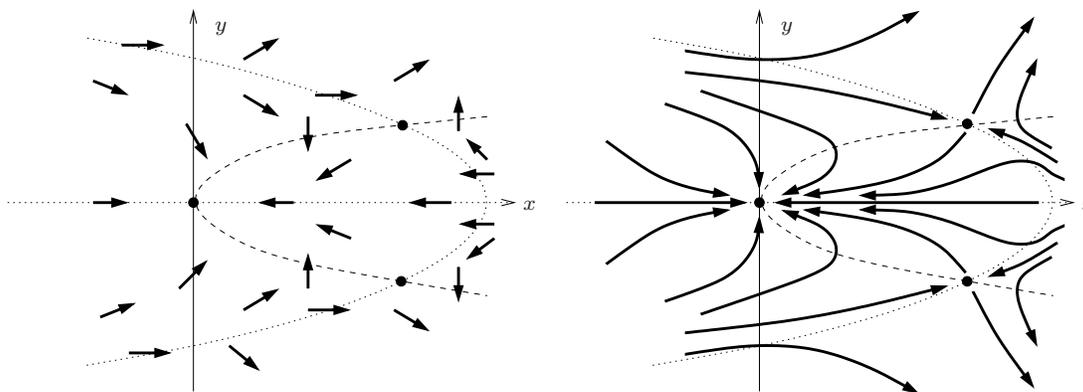


FIGURA 2.4. (a) Inclinação dos vetores tangentes  $(x', y')$  das órbitas em cada região e (b) esboço do diagrama de fase do sistema  $x' = 3y^2 - x$ ,  $y' = y(x - 4 + y^2)$ .

A isóclina de inclinação zero da coordenada  $x$  é o conjunto dos pontos em que  $x' = 0$ , que é a parábola “deitada”  $x = 3y^2$ . À direita dessa parábola, temos  $x' = 3y^2 - x < 0$ , e,

à esquerda,  $x' = 3y^2 - x > 0$ . A isóclina de inclinação zero da coordenada  $y$  é o conjunto dos pontos em que  $y(x - 4 + y^2) = 0$ , que é formado pela reta  $y = 0$  e pela parábola deitada  $x = 4 - y^2$ . Essa isóclina delimita quatro regiões do plano, com  $y'$  positivo ou negativo em cada região. Essas informações estão sintetizadas na figura 2.4(a). Com isso, é possível montar o plano de fase do sistema, conforme ilustrado na figura 2.4(b).

**2.4. \*Observação sobre a caracterização dos pontos fixos via análise das isóclinas.** Os pontos fixos são pontos de interseção das isóclinas  $f(x, y) = 0$  e  $g(x, y) = 0$ . Essa interseção pode ser dividida em dois tipos, as transversais e as não-transversais. Quando as isóclinas, no ponto de interseção, possuem coeficientes angulares diferentes, dizemos que a interseção é transversal, e caso os coeficientes angulares sejam iguais, as duas isóclinas são tangentes e a interseção é dita não transversal (veja figura 2.5). Na interseção transversal, as curvas devem necessariamente se cruzar, enquanto que na não-transversal, isso não é necessário.

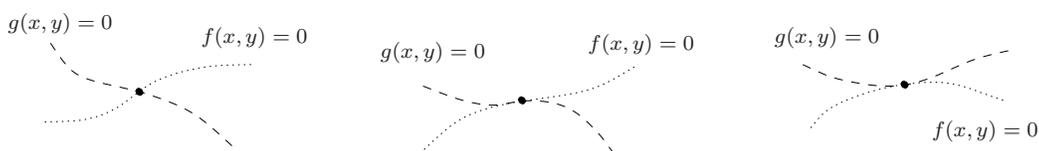


FIGURA 2.5. Exemplos de (a) interseção transversal das curvas de nível  $f(x, y) = 0$  (linha pontilhada) e  $g(x, y) = 0$  (linha tracejada), com as curvas necessariamente se cruzando; (b) interseção não-transversal com as curvas se cruzando; e (c) interseção não-transversal sem cruzamento das curvas.

O tipo de interseção pode ser diretamente relacionado às derivadas parciais das funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ . De fato, a isóclina  $f(x, y) = 0$ , por exemplo, é a curva de nível zero da função  $f(x, y)$ . Além disso, o gradiente de  $f(x, y)$ , que é o vetor  $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), g_x(x, y))$ , indica a direção de crescimento de  $f(x, y)$ . Mais precisamente, esse vetor é perpendicular à curva de nível, conforme visto no curso de Cálculo de Várias Variáveis. De fato, parametrizando a curva de nível zero na forma  $(x(s), y(s))$ , temos

$$f(x(s), y(s)) = 0$$

para todo  $s$ . Derivando essa equação em relação ao parâmetro  $s$  obtemos

$$f_x(x(s), y(s))x'(s) + f_y(x(s), y(s))y'(s) = 0.$$

Isso mostra que produto escalar entre o gradiente  $\nabla f(x, y)$  e o vetor tangente  $(x'(s), y'(s))$  à curva de nível é zero, logo eles são perpendiculares.

No caso de uma interseção transversal entre  $f(x, y) = 0$  e  $g(x, y) = 0$ , segue, então, que os vetores gradientes  $\nabla f(x, y)$  e  $\nabla g(x, y)$  são linearmente independentes. Essa é, na verdade, uma condição necessária e suficiente.

Por outro lado, a matriz de linearização do sistema é formada pelas derivadas parciais da função:

$$L(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

Assim,  $\nabla f(x, y)$  e  $\nabla g(x, y)$  são linearmente independentes se e somente se a matriz  $L(x, y)$  tem determinante não-nulo, o que acontece se e somente se essa matriz não possui autovalor nulo. Isso não quer dizer que o ponto fixo tem que ser hiperbólico, pois ainda há a possibilidade dos autovalores serem complexos puros. Mas, com isso, podemos eliminar os casos degenerados.

Em resumo, uma interseção transversal está associada a pontos fixos hiperbólicos ou a pontos fixos com linearização com autovalores complexos puros. Por outro lado, uma interseção não-transversal está associada a linearizações degeneradas.

### Exercícios

- 2.1.** Ache as condições entre  $\lambda, \mu, a, b, c, d$  associadas a cada diagrama de fase da figura 2.3 e verifique a veracidade de cada diagrama.
- 2.2.** Verifique que o caso de competição entre as espécies *S. cerevisiae* e *S. kephir*, com os parâmetros  $\lambda = 0,2586$ ,  $\mu = 0,05744$ ,  $a = 0,0203$ ,  $b = 0,05711$ ,  $c = 0,004803$  e  $d = 0,009768$ , tem como diagrama de fase o último diagrama da figura 2.3.
- 2.3.** Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} x' = (9 - x^2 - y)x, \\ y' = (16 - 8x - y)y. \end{cases}$$

- (a) Ache os pontos fixos do sistema;
- (b) Faça um esboço do diagrama de fase do sistema linearizado em torno de cada ponto fixo do primeiro quadrante ( $x, y \geq 0$ );
- (c) Faça um esboço do diagrama de fase do sistema no primeiro quadrante;
- (d) Se  $x$  e  $y$  representam a população de duas espécies (em unidades apropriadas) e se em um certo momento  $t_0$  temos  $x(t_0) = 2$  e  $y(t_0) = 4$ , qual o destino das duas populações, isto é, quais os limites  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ ?
- 2.4.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = (2 - 2x - y)x, \\ y' = (3 - x - y)y. \end{cases}$$

- (a) Ache os pontos fixos do sistema;
- (b) Linearize em torno de cada ponto fixo e determine se eles são atratores, repulsores ou de sela;
- (c) Ache os autoespaços das linearizações em torno de cada ponto fixo e trace o esboço próximo aos pontos fixos levando em consideração os espaços mais rápidos e mais lentos e as devidas tangencias das órbitas.
- (d) Faça um esboço do diagrama de fase do sistema no quadrante  $x \geq 0, y \geq 0$ .
- (e) Qual o limite da solução com a condição inicial  $x(0) = 1, y(0) = 1$ ?

2.5. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x' = (1 - x + y)x, \\ y' = (1 + \alpha x - y)y, \end{cases}$$

onde  $\alpha > -1$ . Se  $x(0) > 0$  e  $y(0) > 0$ , determine os possíveis limites  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  em termos de  $\alpha$ .

2.6. As populações  $x(t)$  e  $y(t)$  de dois organismos vivendo em *mutualismo* satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} x' = (\lambda - ax + by)x, \\ y' = (\mu + cx - dy)y, \end{cases}$$

onde  $\lambda, \mu, a, b, c, d > 0$  são parâmetros apropriados. Suponha que  $c/d < a/b$ . Faça um esboço do diagrama de fase do sistema no quadrante  $x, y \geq 0$  e determine o limite das duas populações quando  $t \rightarrow \infty$  assumindo que inicialmente elas são positivas.

2.7. Uma substância  $X$  reage com um catalisador  $Y$  produzindo uma substância  $Z$  segundo a reação  $X + Y \xrightarrow{\kappa} Z + Y$ . As substâncias são introduzidas e retiradas de um tanque de reação de tal forma que as suas concentrações  $x$  e  $y$  nesse tanque satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x' = a - \kappa xy - cx, \\ y' = b - cy, \end{cases}$$

onde  $a, b, c, \kappa > 0$ . Ache uma condição envolvendo os parâmetros do problema para que a concentração de  $X$  se mantenha eventualmente abaixo de um valor dado  $\mu > 0$ .

2.8. Em uma experiência do governo carioca, torcedores do Flamengo e do Vasco são enviados na espaçonave “Maracanã I” para colonizar um pequeno planeta. Observa-se que as populações  $x$  e  $y$  de torcedores do Flamengo e do Vasco, respectivamente, medidas em milhares de indivíduos, satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = (2 - 0.0002x - 0.0001y)x, \\ y' = (2 - 0.0005x - 0.0002y)y. \end{cases}$$

Sabendo que inicialmente eram 100 torcedores de cada time, qual o comportamento assintótico (limite quando  $t \rightarrow \infty$ ) de cada uma das populações?

2.9. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} x' = x^2 + y - 64, \\ y' = (8x + y - 71)y. \end{cases}$$

- Ache todos pontos fixos do sistema;
- Sabendo que  $(x(t), y(t))$  é uma solução que converge para um ponto fixo quando  $t$  vai para infinito e é tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) > 0$ , determine este ponto fixo;
- Faça um esboço do diagrama de fase do sistema.

**2.10.** Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = (xy - 1)y. \end{cases}$$

Faça um esboço do diagrama de fase do sistema e determine o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t))$$

da solução que passa por  $(x(0), y(0)) = (1/2, 1/2)$  em  $t = 0$ .

**2.11.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = y^2 - x, \\ y' = x^2 - y. \end{cases}$$

Sabendo que  $(x(t), y(t))$  é uma solução tal que  $x(0) = \alpha$  e  $y(0) = \alpha$ , onde  $\alpha \geq 0$ , determine os valores de  $\alpha$  para os quais o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t))$  existe.

**2.12.** Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} x' = 6(y - x), \\ y' = 2y(y + x - 4). \end{cases}$$

- Ache os pontos fixos do sistema e determine se eles são hiperbólicos atratores, hiperbólicos repulsores, hiperbólicos de sela ou não-hiperbólicos.
- Sabendo que  $(x(t), y(t))$  é uma solução tal que  $(x(0), y(0)) = (\alpha, \alpha)$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ , determine os valores de  $\alpha$  para os quais o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t))$  existe.

**2.13.** Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x' = (3 - x)(y - x), \\ y' = (x + y - 4)y. \end{cases}$$

- Ache todos os pontos fixos do sistema, linearize em torno de cada ponto fixo e classifique os pontos fixos hiperbólicos entre atratores, repulsores e de sela
- Faça um esboço do diagrama de fase do sistema
- Sabendo que  $(x(t), y(t))$  é uma solução tal que o limite

$$(x^*, y^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t))$$

existe, com  $y^* > 0$ , determine os valores de  $x^*$  e  $y^*$ .

**2.14.** Podemos considerar um modelo simplificado e idealizado de crescimento bacteriano em laboratório dado por

$$\begin{cases} x' = \left( \frac{\alpha y}{1 + y} - \gamma x \right) x, \\ y' = -\frac{\beta y}{1 + y} x, \end{cases}$$

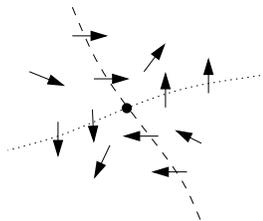
com  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ , onde  $x$  denota a população de bactérias e  $y$ , a quantidade de nutrientes disponível. Note que a quantidade de nutrientes diminui com o seu uso

pelas bactérias e as bactérias evoluem de acordo com a quantidade de nutriente disponível e de acordo com uma população limite.

- Ache os pontos fixos do sistema;
- Ache as regiões de crescimento e decrescimento das coordenadas  $x$  e  $y$ .
- Faça um esboço do diagrama de fase do sistema no primeiro quadrante.
- Dada uma condição inicial  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  com  $\gamma x_0 \ll \alpha y / (1 + y)$ , faça um esboço do gráfico da coordenada  $x = x(t)$  da solução correspondente.
- \*Com o auxílio de um computador, ache a solução com  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $x(0) = 0.1$ , e  $y(0) = 20$ , e trace o gráfico da coordenada  $x = x(t)$  obtida no intervalo  $0 \leq t \leq 50$ .

Esse modelo é capaz de exibir três das quatro fases da evolução de uma colônia de bactérias em laboratório. Apenas a fase inicial de “lag” não aparece. Essa fase “lag” pode ser obtida acrescentando-se uma terceira equação ao sistema.

**2.15.** Um sistema cujas inclinações têm a forma

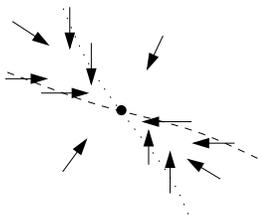


com coeficientes angulares de sinais opostos é necessariamente tal que as derivadas parciais de  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  satisfazem

$$f_x(x, y) > 0, \quad f_y(x, y) > 0, \quad g_x(x, y) < 0, \quad g_y(x, y) > 0,$$

próximas ao ponto fixo. Linearizando o sistema no ponto fixo e usando essas informações sobre as derivadas mostre que o ponto fixo é necessariamente hiperbólico e de sela (i.e. mostre que a matriz linearização tem auto-valores reais distintos e de sinais opostos).

**2.16.** Um sistema cujas inclinações têm a forma



é caracterizado pelas relações

$$f_x(x, y), f_y(x, y), g_x(x, y), g_y(x, y) < 0, \quad f_x g_x - f_y g_x > 0,$$

próximas ao ponto fixo. Linearizando o sistema no ponto fixo e usando essas informações sobre as derivadas mostre que o ponto fixo é necessariamente um nó

atrator ou um foco atrator, mostrando que a matriz linearização tem auto-valores reais negativos ou complexos com parte real negativa.

### 3. \*Ciclos limites e osciladores não-lineares

O estudo do diagrama de fase próximo a um ponto fixo a partir das isóclinas  $f(x, y) = 0$  e  $g(x, y) = 0$  é, na verdade, mais delicado do que como visto acima. Vimos apenas situações em que o ponto fixo é de sela e casos particulares do tipo nó próprio. Os casos de focos atratores ou repulsores, ou certos tipos de nós são bem mais complicados. Com o agravante de que podem estar associados à existência de um ou mais ciclos limites envolvendo o ponto fixo em questão.

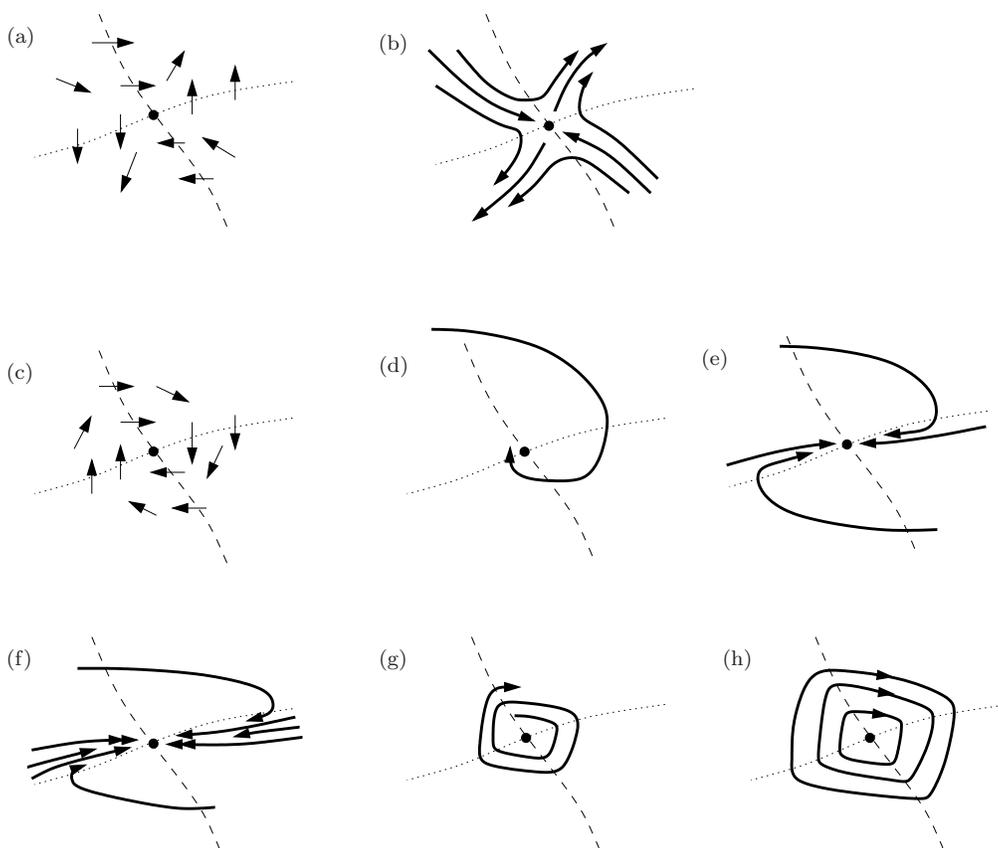


FIGURA 3.1. Em (a) e (c) temos duas situações típicas das inclinações próximas a um ponto fixo. Em (b), temos o diagrama de um ponto de sela compatível com a figura (a). Nas figuras de (d) a (h) temos várias possibilidades compatíveis com a figura (c).

As figuras 3.1(a) e (c) ilustram duas situações típicas, quando as isóclinas  $f(x, y) = 0$  e  $g(x, y) = 0$  se interceptam transversalmente (se cruzando, ao invés de se tangenciando, sem trocar de lado). O caso (a) está tipicamente associado a um ponto fixo de sela (figura (b)).

Observe que as duas isóclinas delimitam quatro regiões e, em cada uma delas, todas as setas sobre as isóclinas que delimitam a região apontam ou para dentro ou para fora dela.

Essa situação é totalmente diferente da apresentada em (c). Nesta, as setas apontam de uma região para outra, consecutivamente. Essa situação está tipicamente associada a um ponto fixo do tipo foco (figuras (d) e (g)), com as órbitas girando em torno do ponto fixo. Mas pode muito bem estar associada a um nó impróprio atrator (figura (e)) ou a um nó próprio atrator, com as direções rápida e lenta muito próximas. Ou pode ainda estar associada a pontos fixos não-hiperbólicos, como um centro não-linear (figura (h)), ou algum outro comportamento ainda mais complicado. Apenas o conhecimento das inclinações não é suficiente para determinar qual comportamento é o correto. Nesse caso, uma análise via linearização pode ajudar a reduzir as opções.

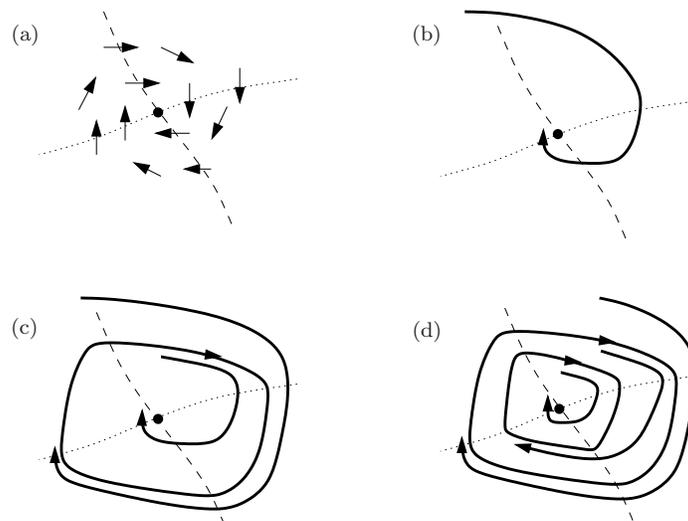


FIGURA 3.2. Em (a), temos as inclinações de próximas a um ponto fixo do tipo foco atrator, e nas figuras de (b) a (d), temos três possibilidades compatíveis com a figura (a).

Mais difícil ainda é descobrir se existe ou não um ciclo limite envolvendo o ponto fixo. A figura 3.2(a) apresenta as inclinações em um caso de um ponto fixo do tipo foco atrator. Nas figuras de (b) a (d), temos três diagramas perfeitamente compatíveis com as inclinações da figura (a) e a análise via linearização não seria capaz de distinguir os três casos. A existência ou não de ciclos limites é uma questão bastante delicada. Análises mais detalhadas são necessárias. Mas o nosso objetivo não é apresentar essas análises em detalhes, pois elas podem ser bem complicadas. O nosso objetivo é chamar a atenção para essas questões e para a possível existência de um ou mais ciclos limites.

Ciclos limites são fundamentais em diversos fenômenos. Eles estão presentes, por exemplo, em circuitos elétricos, em diversos fenômenos fisiológicos, em reações químicas, em economia e em dinâmica populacional.

Vimos, de fato, o modelo predador-presa de Lotka-Volterra, no qual as soluções são periódicas. Nesse modelo não há ciclo limite, mas sim uma infinidade de soluções periódicas envolvendo um ponto fixo do tipo centro não-linear. O problema com esse modelo é que a adição de perturbações no sistema pode quebrar esse comportamento e as soluções não se aproximarem mais de um comportamento periódico. O sistema, nesse caso, não é robusto, ou seja, o seu comportamento muda qualitativamente com pequenas perturbações. É desejável que modelos de fenômenos naturais sejam robustos, pois a própria modelagem envolve erros. Um modelo de predador-presa mais realista é o de Holling-Tanner (veja Arrowsmith & Place (1992)). Esse modelo tem a forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) x - w \frac{xy}{d+x}, \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{bx}\right) y, \end{cases}$$

com  $r, k, w, d, s, b > 0$ . Para certos valores desses parâmetros, como, por exemplo,  $r = 1$ ,  $k = 7$ ,  $w = 2$ ,  $d = 1$ ,  $s = 0.2$ , e  $b = 1$ , esse modelo apresenta um ponto fixo repulsor do tipo foco e um ciclo limite atrator envolvendo o ponto fixo. Todas as órbitas, exceto o ponto fixo, convergem para o ciclo limite (veja figura 3.3). Esse sistema é robusto, no sentido de que esse comportamento qualitativo não se altera para valores dos parâmetros próximos aos mencionados acima. Para valores muito diferentes, porém, pode não haver ciclo limite, ou haver mais de um ciclo limite.

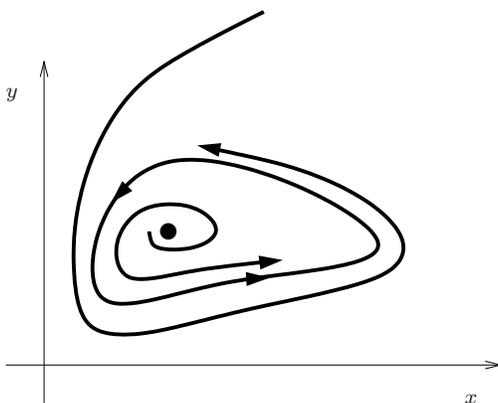


FIGURA 3.3. Esboço do diagrama de fase do sistema Holling-Tanner em  $x, y > 0$ , mostrando um ponto fixo repulsor envolvido por um ciclo limite atrator.

Um outro modelo clássico é o de Van der Pol, que é o de um circuito do tipo LCR mas com um resistor não-linear. As equações para a corrente  $j$  e para a diferença de potencial  $V_C$  através do capacitor são

$$\begin{cases} L \frac{dj}{dt} = V_C - f(j), \\ C \frac{dV_C}{dt} = j. \end{cases}$$

O termo  $f(j)$  é o termo não-linear da resistência, que dá uma diferença de potencial  $V_R = f(j)$  ao longo do resistor. Um resistor não-linear característico é do tipo cúbico:

$$f(j) = j(j^2 - 1).$$

Neste caso, o sistema tem um único ponto fixo em  $j = 0, V_C = 0$ . É possível mostrar que há, também, um ciclo limite atrator envolvendo esse ponto fixo. O campo de vetores e o diagrama de fase do sistema estão esboçados na figura 3.4.

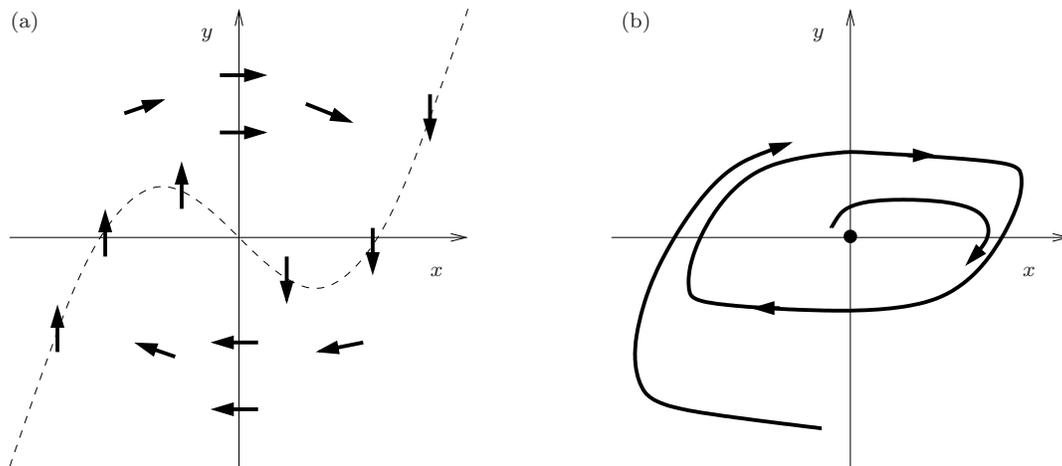


FIGURA 3.4. Esboço do (a) campo de vetores e do (b) diagrama de fase do sistema de Van der Pol.

### Exercícios

3.1. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x' = 1 - x - y, \\ y' = y(e^x - y). \end{cases}$$

Ache os pontos fixos do sistema, linearize em torno de cada ponto fixo e determine se eles são atratores, repulsores ou de sela. Em seguida, tente fazer um esboço do diagrama de fase do sistema.

3.2. Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = 4 - x^2 - y, \\ y' = x^2 - 2x - y. \end{cases}$$

- Trace a curva  $y = 4 - x^2$  e determine as regiões no plano onde  $x' > 0$ ,  $x' = 0$  e  $x' < 0$ .
- Trace a curva  $y = x^2 - 2x$  e determine as regiões no plano onde  $y' > 0$ ,  $y' = 0$  e  $y' < 0$ .
- Ache os pontos fixos do sistema.

- (d) Determine a estabilidade de cada ponto fixo.
- (e) Tente fazer um esboço o diagrama de fase do sistema.

## Respostas (Parciais) de Exercícios Seleccionados

### Capítulo 1.

**1.1.** Solução geral:  $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ , definida para  $x \in \mathbb{R}$ , com parâmetros  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Solução particular com as condições iniciais dadas:  $y(x) = 2 \sin x$ , para  $x \in \mathbb{R}$ . Solução particular com as condições de contorno dadas:  $y(x) = \sin x + 2 \cos x$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

**1.2.** Item (d).

**1.3.**  $\frac{dP}{dt} = \alpha P$ .

**2.1.** 2865 anos.

**2.2.** Solução particular:  $A(t) = (\lambda(t - t_0)/2 + A_0^{1/2})^2$ , definida para  $t \in \mathbb{R}$ . Procurando  $t_1$  tal que  $A(t_1) = 4A_0$ , achamos o intervalo de tempo  $t_1 - t_0 = 2A_0^{1/2}/\lambda$ .

**2.3.** Supondo  $r' = \mu$  constante, como  $A = \pi r^2$ , então  $A' = 2\pi r r' = 2\pi r \mu = 2\pi(A/\pi)^{1/2} \mu = \lambda A^{1/2}$ , onde  $\lambda = 2\mu/\pi^{1/2}$ .

**2.4.** Solução geral:  $r(t) = (3\alpha t/4\pi + C)^{1/3}$ . Solução particular:  $r(t) = (3\alpha(t - t_0)/4\pi + r_0^3)^{1/3}$ , definida para  $t \in \mathbb{R}$ . (a) Procurando  $t_1$  tal que  $r(t_1) = 2r_0$ , achamos o intervalo de tempo  $t_1 - t_0 = 28\pi r_0^3/3\alpha$ . (b) 16 segundos.

**2.5.** Solução geral:  $P(t) = (a - b - Ce^{-\alpha t})/\alpha$ , definida para  $t \in \mathbb{R}$ , com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$ . Limite da solução:  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = (a - b)/\alpha$ .

**2.6.** Solução geral:  $K(t) = (\lambda \alpha J_0^\theta e^{\theta \mu t} / \mu + C)^{1/\theta}$ , definida para  $t \in \mathbb{R}$ , com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$ . Razão capital-trabalho:  $K(t)/J(t) = (\lambda \alpha / \mu + C J_0^\theta e^{-\theta \mu t})^{1/\theta}$ , para  $t \in \mathbb{R}$ . Limite dessa razão:  $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t)/J(t) = (\lambda \alpha / \mu)^{1/\theta}$ .

**2.7.** Solução particular:  $h(t) = v_0 t - gt^2/2$ , definida para  $t \in \mathbb{R}$ . Tempo de vôo:  $t = 2v_0/g$ .

**2.8.** Soluções particulares:  $h(t) = h_0 + (v_0 \sin \alpha)t - gt^2/2$  e  $x(t) = (v_0 \cos \alpha)t$ , para  $t \geq 0$ . Mudando a variável independente:  $t(x) = x \sec \alpha / v_0$  e  $h(x) = h_0 + (\tan \alpha)x - (g \sec^2 \alpha)x^2/(2v_0^2)$ , para  $x \geq 0$ .

**2.9.** A condição  $h|_{x=1} = h_1$  se traduz em  $h_0 + \tan \alpha - g \sec^2 \alpha / (2v_0^2) = h_1$ , que é equivalente a  $v_0 = \sec \alpha \sqrt{g / (2(h_0 - h_1 + \tan \alpha))}$ . Essa condição tem infinitas soluções (um  $v_0 > 0$  para cada  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ ), desde que  $\tan \alpha > h_1 - h_0$ , que é uma condição geometricamente natural (faça o desenho correspondente).

**2.10.** Solução particular:  $y(x) = x(h/\ell - g\rho_0/(2T_0) + g\rho_0 x/(2T_0))$ , para  $0 \leq x \leq \ell$ . Para não formar barriga, precisamos de  $y(x) \geq 0$ . Como  $y(x)$  é parte de uma parábola com concavidade positiva e com uma das raízes em  $x = 0$ , então é necessário e suficiente que a outra raiz seja menor ou igual a zero, ou seja  $2hT_0 \geq g\ell\rho_0$ .

**2.11.** (a)  $x(t) = Ce^{-\cos t}$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$ . (b)  $x(t) = 0$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , e  $x(t) = 2/(C - t^2)$ , para  $t \neq \pm\sqrt{C}$ , com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$ . (c) No quadrante  $x, t \geq 0$ ,  $x(t) = (t^{3/2}/3 + C)^2$ , para  $t \geq 0$ , com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$ .

## Capítulo 2.

**2.1.** (a)  $x, t \in \mathbb{R}$ . (b)  $x > 0, t \in \mathbb{R}$ . (c) quadrantes  $x > 0, t \geq 0$  e  $x < 0, t \leq 0$ . (d)  $x, t \in \mathbb{R}$ . (e)  $x, t \in \mathbb{R}$ . (f)  $0 < x < 1, t \in \mathbb{R}$  e  $x > 1, t \in \mathbb{R}$ . (g)  $x, t \in \mathbb{R}$ . (h)  $x, t \in \mathbb{R}$ . (i)  $x \neq t$ . (j)  $x > 2, t \in \mathbb{R}$ .

**2.2.** Seja  $x(t) = 1$ , para  $t \in \mathbb{R}$ . Como a função é constante,  $x'(t) = 0$ . Por outro lado  $x(t)^{1/2} - 1 = 1 - 1 = 0$ . Logo,  $x' = x^{1/2} - 1$ . Agora, como  $f(t, x) = x^{1/2} - 1$  está definida e é contínua por partes na região  $x > 0, t \in \mathbb{R}$ , que inclui o ponto  $(t_0, x_0) = (0, 1)$ , então há uma única solução de  $x' = x^{1/2} - 1$  satisfazendo  $x(0) = 1$ , que é exatamente  $x(t) = 1, t \in \mathbb{R}$ .

**2.3.** Via separação de variáveis, achamos  $x(t) = (t + C)^{3/2}$ , para  $t \geq -C$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ . Juntando com a solução  $x(t) = 0$ , achamos a solução geral

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -C, \\ \pm(t + C)^{3/2}, & t \geq -C \end{cases}$$

com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$  ou  $C = -\infty$ , correspondendo à solução identicamente nula. A unicidade local é válida exceto em  $x = 0$ . E quando  $x(t_0) = 0$  para algum  $t_0$ , então, pela fórmula da solução geral,  $x(t) = 0$  para todo  $t \leq 0$ , estabelecendo a unicidade no passado. No futuro, há várias soluções com  $x(t_0) = 0$ , basta tomar  $C \geq -t_0$ .

**2.4.** Solução geral:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t < -2C, \\ 1 + (t/2 + C)^2, & t \geq -2C, \end{cases}$$

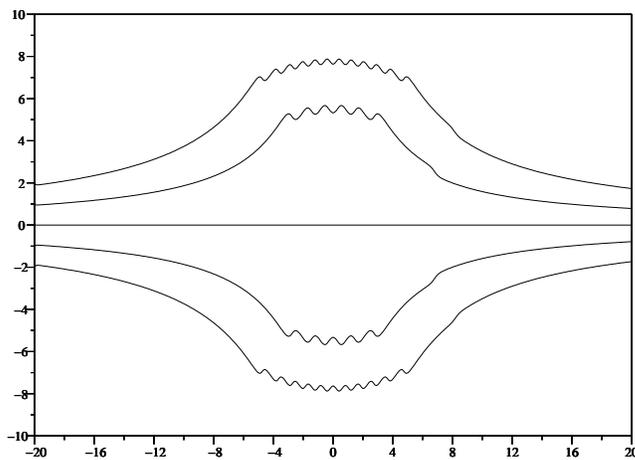
com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$  ou  $C = -\infty$ , correspondendo à solução identicamente 1.

**2.5.** Solução geral:

$$x(t) = \begin{cases} x^*, & t < -C/(1-\alpha), \\ x^* + ((1-\alpha)t + C)^{1/(1-\alpha)}, & t \geq -C/(1-\alpha), \end{cases}$$

com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$  ou  $C = -\infty$ , correspondendo à solução identicamente  $x^*$ .

**2.6.** Se tudo correr bem, o **Scilab** deverá abrir uma janela com a figura



### Capítulo 3.

**1.1.** (a) As isóclinas são retas passando pela origem; as soluções são hipérbolas. (b) As isóclinas são retas passando pela origem; as soluções são semi-circunferências (não estão definidas em  $y = 0$ ). (c) As isóclinas são hipérbolas; as soluções são crescentes nos quadrantes  $xy > 0$  e decrescentes nos quadrantes  $xy < 0$ ; as soluções são côncavas para cima no semiplano  $y > 0$  e côncavas para baixo no semiplano  $y < 0$ . (d) As isóclinas são retas com inclinação 1; as soluções são crescentes na região  $y > x$  e decrescentes na região  $y < x$ ; as soluções têm concavidade positiva em  $y > x + 1$  e negativa em  $y < x - 1$ ; a função  $y(x) = x + 1$  é uma solução particular que divide o plano em duas regiões onde as soluções apresentam comportamentos distintos. (e) Este é semelhante ao item (d), correspondendo, mais precisamente, a uma reflexão em relação ao eixo horizontal. (f) Uma solução é  $x(t) = 0$ ; as soluções em  $x > 0$  são crescentes, enquanto que as soluções em  $x < 0$  são decrescentes; no semiplano  $x > 0$ , as soluções têm concavidade positiva em  $t < -2^{1/3}$ , negativa em  $-2^{1/3} < t < 0$  e positiva em  $t > 0$ , com pontos de inflexão em  $t = -2^{1/3}$  e  $t = 0$ ; no semiplano  $x < 0$ , as soluções têm concavidade negativa em  $t < -2^{1/3}$ , positiva em  $-2^{1/3} < t < 0$  e negativa em  $t > 0$ , com pontos de inflexão em  $t = -2^{1/3}$  e  $t = 0$ ; as soluções parecem exponenciais ligeiramente deformadas perto do eixo  $x$ ; na verdade, a solução geral tem a forma  $x(t) = Ce^{t^3/3}$ . (g) As isóclinas são hipérbolas; as soluções são crescentes nos

quadrantes  $tx < 0$  e decrescentes nos quadrantes  $tx > 0$ ; no semiplano  $x > 0$ , as soluções têm concavidade positiva em  $t < -1$  e  $t > 1$  e negativa em  $-1 < t < 1$ , com pontos de inflexão em  $t = -1$  e  $t = 1$ ; no semiplano  $x < 0$ , as soluções têm concavidade negativa em  $t < -1$  e  $t > 1$  e positiva em  $-1 < t < 1$ , com pontos de inflexão em  $t = -1$  e  $t = 1$ ; a solução geral é  $x(t) = Ce^{-t^2/2}$ . (h) As isóclinas são as cúbicas  $x = m + t^3$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ; as soluções são crescentes em  $x > t^3$  e decrescentes em  $x < t^3$ ; a região de concavidade positiva é  $x > t^2(t - 3)$  e a de concavidade negativa é  $x < t^2(t - 3)$ . (i) As isóclinas são as cúbicas  $x = m - t^3$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ; as soluções são crescentes em  $x > -t^3$  e decrescentes em  $x < -t^3$ ; a região de concavidade positiva é  $x > -t^2(t - 3)$  e a de concavidade negativa é  $x < -t^2(t - 3)$ .

**1.2.** As isóclinas são as retas  $y = 2x + m - 1$ . A região de concavidade positiva é  $y > 2x + 1$  e a de concavidade negativa é  $y < 2x + 1$ . A função  $\tilde{y}(x) = 2x + 1$  é uma solução particular da equação que divide o plano em duas regiões onde as soluções têm comportamentos diferentes. A solução particular  $y(x)$  que satisfaz  $y(0) = 0$  está abaixo da solução  $\tilde{y}(x)$ , tendo concavidade sempre negativa. A solução  $y(x)$  tem assíntota  $2x + 1$  quando  $x \rightarrow -\infty$ . A solução  $y(x)$  é inicialmente crescente, se tornando decrescente a partir do ponto em que cruza a reta  $y = 2x - 1$ .

**2.1.** (a) Um ponto fixo repulsor em  $x = 0$  e um conector em  $x = 1$ . (b) Um ponto fixo conector em  $x = 0$ , com as órbitas se aproximando de  $x = 0$  pela esquerda e se afastando pela direita. (c) Infinitos pontos fixos em  $x_n = n\pi + \pi/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , alternando entre repulsores e atratores. (d) Um ponto fixo conector em  $x = 0$  e um repulsor em  $x = 1$ . (e) Infinitos pontos fixos em  $x_n = n\pi/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , alternando entre atratores e repulsores. (f) um ponto fixo conector em  $x = 0$ , atraindo as órbitas do lado esquerdo e repelindo as do direito. (g) Infinitos pontos fixos em  $x_n = 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , todos conectores, com as órbitas entre os pontos fixos indo para a esquerda. (h) Um pontos fixo atratores em  $x = -1$ , um conector em  $x = 0$  e um repulsor em  $x = 1$ . (i) Nenhum ponto fixo, há apenas uma órbita ocupando toda a reta e indo de  $x = -\infty$  para  $x = +\infty$ . (j) Nenhum ponto fixo, há apenas uma órbita ocupando toda a reta e indo de  $x = -\infty$  para  $x = +\infty$ . (k) Como  $f(x) = x + e^x$  é estritamente crescente e converge para  $\pm\infty$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , há um único ponto fixo  $x_0$ , dado por  $x^* + e^{x^*} = 0$ , que é o único zero de  $f(x)$ . Este é um ponto fixo repulsor, com as órbitas à esquerda e à direita de  $x_0$  se afastando de  $x_0$ . (l) Infinitos pontos fixos em  $x_n = 2n\pi - \pi/2$ , todos conectores, com as órbitas entre eles indo para a direita.

**2.2.** Veja as respostas do próprio exercício 2.1.

**2.3.** (a) Há duas soluções estacionárias:  $x(t) = 0$  e  $x(t) = 1$ , definidas para  $t \in \mathbb{R}$ ; na região  $x < 0$ , as soluções são decrescentes com concavidade para baixo e convergindo para  $x = 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ ; na região  $0 < x < 1$ , as soluções são crescentes, vindo de  $x = 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e indo para  $x = 1$  quando  $t \rightarrow \infty$ , com concavidade inicialmente para cima e mudando para baixo depois do ponto de inflexão, que ocorre quando  $x = 1/3$ ; na região  $x > 1$ , as soluções são crescentes, com concavidade para cima e vindo de  $x = 1$  quando

$t \rightarrow -\infty$ . (b) Há uma única solução estacionária, dada por  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; em  $x < 0$ , as soluções são crescentes, com concavidade para baixo e convergindo para  $x = 1$  quando  $t \rightarrow \infty$ ; em  $x > 0$ , as soluções são crescentes, com concavidade para cima, vindo de  $x = 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . (c) Há infinitas soluções estacionárias e, entre elas, as soluções alternam entre crescentes e decrescentes, apresentando um ponto de inflexão e convergindo para os pontos fixos adjacentes quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . (d) Há duas soluções estacionárias,  $x(t) = 0$  e  $x(t) = 1$ , definidas para  $t \in \mathbb{R}$ ; as soluções em  $x < 0$  são decrescentes e côncavas para baixo, vindo de  $x = 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ ; as soluções em  $0 < x < 1$  são decrescentes, com um ponto de inflexão quando  $x = 2/3$  e com assíntotas  $x = 1$  e  $x = 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e  $t \rightarrow +\infty$ , respectivamente; em  $x > 1$ , as soluções são crescentes e côncavas para cima, vindo de  $x = 1$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . (e) Semelhante ao item (c). (f) Semelhante ao item (b). (g) Há infinitas soluções estacionárias e, entre elas, as soluções são decrescentes, apresentando um ponto de inflexão e convergindo para os pontos fixos adjacentes quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . (h) Há três soluções estacionárias,  $x(t) = -1$ ,  $x(t) = 0$  e  $x(t) = 1$ , definidas para  $t \in \mathbb{R}$ ; em  $x < -1$ , as soluções são crescentes e com concavidade para baixo, convergindo para  $x = -1$  quando  $t \rightarrow \infty$ ; em  $-1 < x < 0$ , as soluções são decrescentes, com um ponto de inflexão, vindo de  $x = 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e indo para  $x = -1$  quando  $t \rightarrow \infty$ ; em  $0 < x < 1$ , as soluções também são decrescentes, com um ponto de inflexão, vindo de  $x = 1$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e indo para  $x = 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ ; em  $x > 1$ , as soluções são crescentes e côncavas para cima, vindo de  $x = 1$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . (i) As soluções são todas crescentes, sendo côncavas para baixo em  $x < 0$  e côncavas para cima em  $x > 0$ , com um ponto de inflexão quando  $x = 0$ . (j) As soluções são todas crescentes e côncavas para cima. (k) Há uma solução estacionária  $x(t) = x^*$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; Abaixo de  $x^*$ , as soluções são decrescentes e com concavidade para baixo, vindo de  $x^*$  e indo para  $-\infty$ , enquanto que acima de  $x^*$ , as soluções são crescentes e com concavidade para cima, vindo de  $x^*$  e indo para  $+\infty$ . (l) Semelhante ao item (g), exceto que as soluções não-estacionárias são crescentes.

**2.4.** Em todos os casos, temos uma solução estacionária correspondendo ao ponto fixo. Na primeira linha de fase, todas as soluções se aproximam do ponto fixo quando  $t$  cresce, convergindo para o ponto fixo quando  $t \rightarrow \infty$ . Na segunda linha de fase, as soluções se afastam do ponto fixo, vindo do ponto fixo em  $t \rightarrow -\infty$ . Na terceira linha de fase, as soluções abaixo do ponto fixo se aproximam dele e as soluções acima, se afastam. Na quarta linha de fase, as soluções abaixo do ponto fixo se afastam dele e as soluções acima, se aproximam.

**2.5.** Há três soluções estacionárias, assumindo, digamos, valores  $x_1 < x_2 < x_3$ . Em  $x < x_1$ , as soluções são crescentes, convergindo para  $x_1$  quando  $t \rightarrow \infty$ , podendo apresentar sempre uma concavidade negativa. Em  $x_1 < x < x_2$ , as soluções são decrescentes, apresentando pelo menos um ponto de inflexão e com limites  $x_2$  e  $x_1$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e  $t \rightarrow \infty$ , respectivamente. Em  $x_2 < x < x_3$ , as soluções são crescentes, apresentando pelo menos um ponto de inflexão e com limites  $x_2$  e  $x_3$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e  $t \rightarrow \infty$ , respectivamente. Em  $x > x_3$ , as soluções são decrescentes, podendo apresentar concavidade sempre positiva e convergindo para  $x_3$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**2.6.**  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1$ .

**2.7.** Observe, primeiramente, que  $f(x)$  é continuamente diferenciável em  $x \in \mathbb{R}$ , logo, vale a existência e a unicidade de soluções. Observe, agora, que a linha de fase apresenta um infinidade de pontos fixos, em  $x = \pm 1/(n\pi)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , se acumulando na origem  $x = 0$ , que também é um ponto fixo. Os pontos fixos se alternam entre atratores e repulsores, exceto pelo ponto fixo  $x = 0$ , que não é nem atrator, nem repulsor, nem conector.

**2.8.** A linha de fase apresenta um ponto fixo conector em  $x = 0$  e um ponto fixo atrator em  $x = 3/2$ . A solução particular  $x(t)$  com  $x(0) = 1/2$  é crescente, converge para  $x = 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , converge para  $x = 3/2$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , é côncava para cima até alcançar o valor  $x = 1$ , onde apresenta um ponto de inflexão e passa a ser côncava para baixo. A solução particular  $x(t)$  com  $x(0) = -1$  é sempre crescente e côncava para baixo, convergindo para  $x = 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**2.9.**  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ .

**2.10.**  $\ell = 1$

**2.11.**  $f(x) = (1 - x)x(x - 1)$ .

**2.12.** (a) Este caso só está definido para  $x > 0$ . A linha de fase apresenta um ponto fixo atrator em  $x = x_r$ . (b) Este caso só está definido para  $x \neq x_r/\alpha$ , o que divide a linha de fase em dois intervalos, a menos que  $\alpha = 1$ , que se reduz ao caso de taxa de crescimento específico constante. Para  $\alpha < 1$ , temos um ponto fixo atrator em  $x = x_r$ . Para  $\alpha > 1$ , temos um ponto fixo repulsor em  $x = x_r$ . Observe que o caso mais realista é  $\alpha < 1$ . (c) Este caso só está definido para  $x \geq 0$ . Há um ponto fixo repulsor em  $x = 0$  (repulsor por um lado, pois pelo outro lado a equação não está definida) e um ponto fixo atrator em  $x = x_r$ . (d) Há um único ponto fixo atrator no (único) ponto em que  $\lambda - \alpha x - \beta e^{-x} = 0$ .

**2.13.** Basta usar a regra da cadeia para derivação

**2.14.** (a) Usando a regra da cadeia para derivar  $r(t) = K(t)/J(t)$ , achamos  $r' = \lambda \alpha r^{1-\theta} - \mu r$ . A região de existência e unicidade é  $\{(r, t); r > 0, t \in \mathbb{R}\}$ . (A função é contínua na reta  $r = 0$ , também, mas essa reta não está no interior da região de definição da função.) (b) A linha de fase na semi-reta  $r > 0$  possui um único ponto fixo  $r^* = (\lambda \alpha / \mu)^{1/\theta}$ , que é um ponto fixo atrator. O limite procurado é exatamente  $r^*$ .

**3.1.** (a) As soluções em  $x < 0$  e  $x > 1$  explodem em tempo finito no futuro. (b) As soluções em  $x < 0$  explodem em tempo finito no passado, enquanto que as soluções em  $x > 0$  explodem em tempo finito no futuro. (c) Não há solução ilimitada. (d) As soluções em  $x < 0$  e  $x > 1$

explodem em tempo finito no futuro. (e) Não há solução ilimitada. (f) As soluções em  $x < 0$  explodem em tempo finito no passado, enquanto que as soluções em  $x > 0$  explodem em tempo finito no futuro. (g) Não há solução ilimitada. (h) As soluções em  $x < 1$  explodem em tempo finito no passado, enquanto que as soluções em  $x > 1$  explodem em tempo finito no futuro. (i) Todas as soluções explodem em tempo finito no futuro e no passado. (j) Todas as soluções explodem em tempo finito no futuro. (k) As soluções em  $x < x^*$  existem em todo o intervalo de tempo e decrescem para  $-\infty$  quando o tempo vai para  $+\infty$ , enquanto que as soluções em  $x > x^*$  explodem em tempo finito no futuro. (l) Não há solução ilimitada.

**3.2.** (a) A linha de fase apresenta um ponto fixo conector em  $x = 0$  e um ponto fixo atrator em  $x = 3$ . (b) As soluções em  $x < 0$  são crescentes, com concavidade negativa e explodem em tempo finito no passado; as soluções  $x(t) = 0$  e  $x(t) = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , são estacionárias; as soluções entre  $0 < x < 1$  são crescentes, com concavidade positiva em  $0 < x < 2$  e negativa em  $2 < x < 3$ , apresentando um ponto de inflexão quando  $x = 2$ ; as soluções em  $x > 3$  são decrescentes, com concavidade positiva e explodem em tempo finito no passado. (c)  $\ell = 3$ .

**3.3.** (a) A linha de fase apresenta um ponto fixo conector em  $x = 0$ , um ponto fixo atrator em  $x = 10/3$  e um ponto fixo repulsor em  $x = 6$ . (b) As soluções em  $x < 0$  são crescentes, com concavidade negativa e explodem em tempo finito no passado; as soluções  $x(t) = 0$ ,  $x(t) = 10/3$  e  $x(t) = 6$ , definidas para  $t \in \mathbb{R}$ , são estacionárias; as soluções em  $0 < x < 10/3$  são crescentes, apresentando um ponto de inflexão quando  $x = 2$ ; as soluções em  $10/3 < x < 6$  são decrescentes, apresentando um ponto de inflexão em  $x = 5$ ; as soluções em  $x > 6$  são crescentes, explodindo em tempo finito no futuro. (c) As únicas soluções não-estacionárias cujos limites  $\ell_-$  e  $\ell_+$  existem são as que estão em  $0 < x < 10/3$  e  $10/3 < x < 6$ ; em qualquer caso,  $\ell_+ = 10/3$ . Para o cálculo das inflexões, observe que, após alguma aritmética,  $x'' = 12x(x - 5)(x - 2)x'$ .

**3.4.** Os pontos fixos são  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1 - \beta/\alpha$ . Então a discussão passa por localizar  $x_1$  em relação a  $x_0$ . Se  $\alpha = \beta$ , temos apenas um ponto fixo conector em  $x_0 = x_1 = 0$ , com a população de infectados convergindo para zero. Se  $\alpha < \beta$  temos um ponto fixo repulsor em  $x_1 = 1 - \beta/\alpha < 0$  e um ponto fixo atrator em  $x_0 = 0$ , com a população de infectados convergindo para zero, novamente. Se  $\alpha > \beta$ , temos um ponto fixo repulsor em  $x_0 = 0$  e um ponto fixo atrator em  $x_1 = 1 - \beta/\alpha$ , que está estritamente entre 0 e 1, com a população de infectados convergindo para  $x_1 = 1 - \beta/\alpha$ . Quanto menor  $\beta$  em relação a  $\alpha$ , maior a população final de infectados.

**3.5.** Os pontos fixos são  $x_a = a$  e  $x_b = b/2$ . Os diagramas variam de acordo com as condições  $a < b/2$ ,  $a = b/2$  e  $a > b/2$ . Em qualquer caso,  $x' = (a - x)(b - 2x)^2$  é positivo para  $x < \min\{x_a, x_b\}$ . Logo, partindo de  $x(0) = 0$ , teremos  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \min\{x_a, x_b\} > 0$ . De  $x + y = a$  tiramos a concentração limite restante  $y = a - \min\{x_a, x_b\}$  e de  $2x + z = b$ , tiramos a concentração limite restante  $z = b - 2 \min\{x_a, x_b\}$ .

**3.6.** Da reação química, temos  $x' = \kappa_1 ax - \kappa_2 x^2$ , cujos pontos fixos são  $x_0 = 0$  e  $x_* = \kappa_1 a / \kappa_2$ . Observe pelo gráfico de  $x \mapsto \kappa_1 ax - \kappa_2 x^2$  que  $x_*$  é um ponto fixo atrator que atrai todas as soluções com condições iniciais positivas. Logo, a concentração de  $X$  se aproxima de  $x_*$ .

**3.7.** Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as concentrações de cada substância. Em particular, temos  $y' = \kappa_1 x - \kappa_2 y$  na primeira reação, de maneira que a solução de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  satisfaz  $x^*/y^* = \kappa_2/\kappa_1$ . Na segunda reação, temos  $y' = \kappa_3 xz - \kappa_4 yz$ , com a solução de equilíbrio satisfazendo  $x^*/y^* = \kappa_4/\kappa_3$ . Para que a solução de equilíbrio seja a mesma nas duas reações, devemos então ter a relação  $\kappa_4/\kappa_3 = \kappa_2/\kappa_1$ .

**3.8.** Na equação da primeira estação, temos um único ponto fixo em  $x_1 = a/\beta = 2\text{ppm}$ , que atrai todas as órbitas, enquanto que na segunda, temos um único ponto fixo  $x_2 = (a/\gamma)^{1/3} = 3\text{ppm}$ , que também atrai todas as órbitas. Como  $x_1 < x_2$  a primeira estação de tratamento é mais potente.

**3.9.** (i) Na região  $V > 0$  (que não inclui  $V = 0$ !) a função  $V \mapsto 120 - 4V^{1/4}$  é continuamente diferenciável, logo, vale a unicidade das soluções. (ii) A linha de fase apresenta um ponto fixo atrator global em  $V_* = 810.000$  litros. Logo, o volume tenderá a aumentar até o limite máximo de 810 mil litros. Como  $V = lh^2/3$  e  $l = 300\text{cm}$ , o nível da água irá aumentar até o limite máximo de  $h_* = 3V_*/l = 90\text{cm}$ . Portanto, o recipiente deve ter no mínimo noventa centímetros para que a água não tranborde.

**3.10.**  $v' = -g - \beta|v|v/m$ . A velocidade limite é  $v_* = -\sqrt{mg/\beta}$ .

**3.11.**  $v' = -g - \alpha v/m - \beta|v|v/m$ . A velocidade limite é  $v_* = (\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4mg})/(2\beta)$ .

**3.12.** (i) A função  $W \mapsto \lambda - \beta W^{3/4}$  é continuamente diferenciável na região  $W > 0$  (que não inclui  $W = 0$ ), logo há unicidade de soluções nessa região. Como o único ponto fixo é  $W_* = (\lambda/\beta)^{4/3}$ , que é positivo, a unicidade da solução estacionária correspondente está garantida. O diagrama de fase apresenta um único ponto fixo atrator em  $W_*$ . (ii) A primeira relação é  $W_i = (\lambda_i/\beta)^{4/3}$  e a segunda,  $\lambda_f = \beta W_f^{3/4}$ .

**4.1.** (b) e (f) são qualitativamente equivalentes entre si; (c) e (e) também; e (i) e (j) também.

**4.2.** Com dois pontos fixos, temos 8 linhas de fase qualitativamente diferentes. Com três pontos fixos, temos 16 linhas de fase. Com  $n$  pontos fixos, temos  $2^{n+1}$  linhas de fase.

**4.3.** Apenas dois: um com  $b$  atrator e  $c$  repulsor e outro com  $b$  repulsor e  $c$  atrator.

**4.4.** Os pontos de bifurcação são  $\mu = 0$  e  $\mu = 1$ . Temos quatro tipos de diagrama de fase, correspondendo a  $\mu < 0$  e  $0 < \mu < 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu = 1$  e  $\mu > 1$ . Em  $\mu < 0$  e  $0 < \mu < 1$ , temos

dois pontos fixos atratores, com um ponto fixo repulsor entre os dois atratores; em  $\mu = 0$ , temos um ponto fixo atrator e um conector; em  $\mu = 1$ , temos um ponto fixo conector e um atrator; em  $\mu > 1$ , temos um ponto fixo atrator.

**4.5.** Os pontos de bifurcação são  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 1$ . Há três tipos de diagrama de fase, correspondendo a  $\lambda \leq 0$ ,  $0 < \lambda < 1$  e  $\lambda > 1$ , e  $\lambda = 1$ . Em  $\lambda \leq 0$ , temos um ponto fixo repulsor; em  $0 < \lambda < 1$  e  $\lambda > 1$ , temos dois pontos fixos repulsores e um atrator entre os dois repulsores; e em  $\lambda = 1$ , temos um repulsor e um conector.

**4.6.** O diagrama de bifurcação não apresenta nenhum ponto de bifurcação, com as linhas de fase sendo qualitativamente equivalentes para todos os valores de  $\lambda$ . Temos, sempre, um ponto fixo atrator em  $x_\lambda = 0.1 + (\lambda - 2)^{1/3}/10$ , atraindo todas as soluções, logo  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_\lambda$ . Para que  $x_\lambda \leq 0.1$ , devemos ter  $\lambda \leq 2$ . Para que  $x_\lambda \leq 0.2$ , devemos ter  $\lambda \leq 3$ .

**4.7.** Os pontos de bifurcação são  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$ . Em  $\lambda < 1$ , temos um ponto fixo atrator dado por  $x = 1$ ; em  $\lambda = 1$ , temos um ponto fixo conector dado por  $x = 0$  e um atrator dado por  $x = 1$ ; em  $1 < \lambda < 2$ , temos dois pontos fixos atratores e um ponto fixo repulsor no meio; em  $\lambda = 2$ , temos um ponto fixo atrator e um conector; em  $\lambda > 2$ , temos, novamente, dois pontos fixos atratores com um repulsor no meio.

**4.8.** (a) Os pontos de bifurcação são  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 8$ . (b)  $\lambda = -4$ .

**4.9.** Para  $\lambda$  entre 1.000 e 8.000.

**4.10.** (i)  $\lambda = 0$  não é ponto de bifurcação no caso  $\varepsilon = 0$ . (iii) os pontos de bifurcação são  $\lambda = \pm 2(\varepsilon/3)^{3/2}$ .

**4.11.** Para  $\alpha < 0$ .

**4.12.** Para  $\alpha > 0$ .

**4.13.** Pontos de bifurcação:  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$ . O limite é satisfeito quando  $\alpha < 1/2$ .

**4.14.** Pontos de bifurcação:  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$ . O limite é satisfeito quando  $\alpha > 1/4$ .

**4.15.** O diagrama tem um único ponto de bifurcação em  $h = \lambda$ . Para  $h \geq \lambda$ , a pesca é predatória, pois  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , para toda solução com  $x(0) > 0$ , enquanto que para  $0 < h < \lambda$ , as soluções com  $x(0) = 0$  satisfazem  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (h - \lambda)/\gamma > 0$  e a pesca se estabiliza em um nível sustentável.

**4.16.**  $h \geq \lambda(1 - \gamma/10)$ .

**4.17.** É preciso separar os casos  $x_r = \lambda/\gamma$ ,  $x_r > \lambda/\gamma$  e  $x_r < \lambda/\gamma$ . O único que apresenta pontos de bifurcação é  $x_r > \lambda/\gamma$ . Nesse caso, são dois os pontos de bifurcação, dados por  $\mu_{\pm} = x_{\pm}(\lambda - \gamma x_{\pm})/(x_{\pm} - x_r)$ , onde  $x_{\pm} = x_r \pm \sqrt{x_r(x_r - \lambda/\gamma)}$ .

**4.18.** Basta usar a regra da cadeia para calcular  $y'$ .

**4.19.** Os pontos de bifurcação são  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = a^2/4$ . No caso em que  $a = 10$ , temos que o segundo ponto de bifurcação é  $\lambda_2 = 9$ . Como  $\lambda = 9$  está entre os dois pontos de bifurcação, o diagrama de bifurcações apresenta três pontos fixos: um atrator em  $x_0 = 0$ , um repulsor em  $x_1 = 1$  e outro atrator em  $x_2 = 9$ . Como  $x(0) = 10$  é maior que todos os pontos fixos, a solução correspondente converge para o ponto fixo atrator  $x_2 = 9$ . Logo, o limite da concentração quando  $t \rightarrow \infty$  é  $x = 9$ .

#### Capítulo 4.

**1.1.** (a)  $x(t) = -\ln(C - t)$ , definida para  $t < C$ , com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$ . (b) A solução geral pode ser dividida em quatro fórmulas: as duas soluções estacionárias  $x(t) = 0$  e  $x(t) = \lambda/\gamma$ , definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; as soluções  $x(t) = \lambda/(\gamma + Ce^{-\lambda t})$  definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , no caso do parâmetro  $C > 0$ ; e as soluções  $x(t) = \lambda/(\gamma + Ce^{-\lambda t})$  definidas para todo  $t \neq (1/\lambda) \ln(-C/\gamma)$ , no caso do parâmetro  $C < 0$ . (c) A solução geral pode ser dividida em cinco fórmulas: as três soluções estacionárias  $x(t) = -\sqrt{\lambda}$ ,  $x(t) = 0$  e  $x(t) = \sqrt{\lambda}$ , definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; as soluções  $x(t) = \pm\sqrt{\lambda/(1 + Ce^{-2\lambda t})}$ , definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , no caso do parâmetro  $C > 0$ ; e as soluções  $x(t) = \pm\sqrt{\lambda/(1 + Ce^{-2\lambda t})}$ , definidas para todo  $t > -(1/2\lambda) \ln(-1/C)$ , no caso do parâmetro  $C < 0$ . (d) A solução geral pode ser definida em duas fórmulas: as soluções estacionárias  $x(t) = \pi/2 + n\pi$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$ , e as soluções não-estacionárias  $x(t) = \arctan(t + C) + n\pi$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . (e) A solução geral é formada pela solução estacionária  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; pelas soluções  $x(t) = (C + t^2/4)^2$  definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , no caso do parâmetro  $C \geq 0$ ; e pelas soluções

$$x(t) = \begin{cases} (-C_1 + t^2/4)^2, & t < -2\sqrt{C_1}, \\ 0, & -2\sqrt{C_1} \leq t \leq 2\sqrt{C_2}, \\ (-C_2 + t^2/4)^2, & t > 2\sqrt{C_2}, \end{cases}$$

no caso dos parâmetros  $C_1, C_2 \geq 0$ . (f) A solução geral é formada pela solução estacionária  $x(t) = 0$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , pelas soluções  $x(t) = \pm\sqrt{1/(C + 2 \cos t)}$ , definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , no caso do parâmetro  $C > 2$ , e pelas soluções  $x(t) = \pm\sqrt{1/(C + 2 \cos t)}$  definidas para  $t$  tal que  $\cos t \geq -C/2$ , no caso do parâmetro  $-2 < C \leq 2$ ; não há solução com  $C \leq -2$ . (g)  $x(t) = Ct/(1 - t) - 1$ , definida para  $t \neq 1$ , com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$ . (Observe que em  $t = 0$ , a solução faz sentido e satisfaz  $x'(t) = (x(t) + 1)/(t - t^2)$ , apesar de  $(x + 1)/(t - t^2)$  não estar definido para  $t = 0$  e  $x$  qualquer.) (h)  $x(t) = 1/(C - t^3)$ , definida para todo  $t \neq C^{1/3}$  real, com parâmetro  $C \in \mathbb{R}$ .

**1.2.** Use os métodos geométricos em conjunto com as fórmulas das soluções para fazer o esboço.

**1.3.** (a) Só há uma órbita, formada pela reta toda, correspondendo às soluções  $x(t) = -\ln(C-t)$ ,  $t < C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ . (b) Há cinco órbitas:  $]-\infty, 0[$ ,  $\{0\}$ ,  $]0, 1[$ ,  $\{1\}$ ,  $]1, \infty[$ . A órbita  $]-\infty, 0[$  corresponde às soluções  $x(t) = \lambda/(\gamma + Ce^{-\lambda t})$ ,  $t < (1/\lambda) \ln(-C/\gamma)$ , quando  $C < 0$ ; a órbita  $\{0\}$  corresponde à solução estacionária  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; a órbita  $]0, 1[$  corresponde às soluções  $x(t) = \lambda/(\gamma + Ce^{-\lambda t})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , quando  $C > 0$ ; a órbita  $\{1\}$  corresponde à solução estacionária  $x(t) = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; e a órbita  $]1, \infty[$  corresponde às soluções  $x(t) = \lambda/(\gamma + Ce^{-\lambda t})$ ,  $t > (1/\lambda) \ln(-C/\gamma)$ , quando  $C < 0$ . (c) Há sete órbitas:  $]-\infty, -\sqrt{\lambda}[$ ,  $\{-\sqrt{\lambda}\}$ ,  $]-\sqrt{\lambda}, 0[$ ,  $\{0\}$ ,  $]0, \sqrt{\lambda}[$ ,  $\{\sqrt{\lambda}\}$ ,  $]\sqrt{\lambda}, \infty[$ . As três soluções estacionárias  $x(t) = -\sqrt{\lambda}$ ,  $x(t) = 0$  e  $x(t) = \sqrt{\lambda}$ , definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , correspondem às órbitas  $\{-\sqrt{\lambda}\}$ ,  $\{0\}$  e  $\{\sqrt{\lambda}\}$ , respectivamente; as soluções  $x(t) = \sqrt{\lambda/(1 + Ce^{-2\lambda t})}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , quando  $C > 0$ , correspondem à órbita  $]0, \sqrt{\lambda}[$ ; as soluções  $x(t) = -\sqrt{\lambda/(1 + Ce^{-2\lambda t})}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , quando  $C > 0$ , correspondem à órbita  $]-\sqrt{\lambda}, 0[$ ; as soluções  $x(t) = \sqrt{\lambda/(1 + Ce^{-2\lambda t})}$ ,  $t > -(1/2\lambda) \ln(-1/C)$ , no caso  $C < 0$ , correspondem à órbita  $]\sqrt{\lambda}, \infty[$ ; e as soluções  $x(t) = -\sqrt{\lambda/(1 + Ce^{-2\lambda t})}$ ,  $t > -(1/2\lambda) \ln(-1/C)$ , no caso  $C < 0$ , correspondem à órbita  $]-\infty, -\sqrt{\lambda}[$ . (d) Há infinitas órbitas, dadas pelos pontos fixos  $\{\pi/2 + n\pi\}$  e por  $]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$ . Cada ponto fixo  $\{\pi/2 + n\pi\}$  corresponde à solução estacionária  $x(t) = \pi/2 + n\pi$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , enquanto que cada órbita  $]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$  corresponde às soluções não-estacionárias  $x(t) = \arctan(t + C) + n\pi$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ .

**1.4.**  $y(x) = 1/(1 - \sin x)$ , definida para  $x$  no intervalo  $]-3\pi/2, \pi/2[$ .

**1.5.** (a) A solução geral é composta pela solução estacionária  $x(t) = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e pelas soluções não-estacionárias  $x(t) = 1 + 1/(C - t)$ , definidas para  $t \neq C$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ . (b) A solução estacionária  $x(t) = 1$  é obviamente constante, representada por uma reta horizontal; as soluções  $x(t) = 1 + 1/(C - t)$  em  $t > C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , são crescentes, com concavidade para baixo, explodindo em tempo finito para trás no tempo (quando  $t$  decresce para  $C$ ) e convergindo para  $x = 1$  quando  $t$  tende a infinito; as soluções  $x(t) = 1 + 1/(C - t)$  em  $t < C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , são crescentes, com concavidade para cima, explodindo em tempo finito para frente no tempo (quando  $t$  cresce para  $C$ ) e convergindo para  $x = 1$  quando  $t$  tende a menos infinito.

**1.6.** Derivando, temos  $y' = anx^{n-1}$ . Substituindo  $a$ , obtemos  $y' = ny/x$ . Logo, trajetórias ortogonais são dadas pela equação  $y' = -x/ny$ , cujas soluções são as elipses  $ny^2 + x^2 = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Observe que o grau dos polinômios da família muda a excentricidade das elipses.

**2.1.** (a)  $y(x) = x/(\ln|x| + C)$ , para  $x \neq 0$  e  $|x| \neq e^C$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ . (b)  $y(x) = x(3 \ln|x| + C)^{1/3}$ , para  $x \neq 0$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ .

**2.2.**  $y(x) = x\sqrt{\ln x^2 + 4}$ , para  $x$  no intervalo  $]e^{-2}, \infty[$ .

**2.3.**  $y(x) = x(3 \ln(x) + 8)^{1/3}$ , para  $x$  no intervalo  $]0, \infty[$ .

**2.4.** Solução particular:  $y(x) = \arccos(\ln x)$ , com o maior intervalo de definição dado por  $1/e < x < e$ . (A solução geral é um pouco complicada, dada por  $y(x) = x \arccos(\ln |x| + C) + 2n\pi x$  e  $y(x) = -x \arccos(\ln |x| + C) + (2n+1)\pi x$ , definida para  $x$  tal que  $e^{-1-C} < |x| < e^{1+C}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ .)

**2.5.** A equação é da forma  $y' = -(4x + 3y)/x$ , que é homogênea. A solução geral é  $y(x) = C/x^3 - x$ , para  $x \neq 0$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ .

**2.6.** Pela propriedade de homogeneidade,

$$\frac{dy}{dx} = h(x, y) = h(r \cos \theta, r \sin \theta) = h(\cos \theta, \sin \theta).$$

Usando que  $r^2 = x^2 + y^2$ , temos, para uma solução  $y = y(x)$ , que

$$2r \frac{dr}{d\theta} = 2x \frac{dx}{d\theta} + 2y \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = (2r \cos \theta + 2r(\sin \theta)h(\cos \theta, \sin \theta)) \frac{dx}{d\theta}.$$

Derivando  $x(\theta) = r(\theta) \cos \theta$  em relação a  $\theta$ , obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = (\cos \theta + (\sin \theta)h(\cos \theta, \sin \theta)) \left( \cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \sin \theta \right).$$

Resolvendo para a derivada, obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{(\cos \theta + (\sin \theta)h(\cos \theta, \sin \theta))}{((\cos \theta)h(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta)}.$$

Além disso, como, pela propriedade de homogeneidade,  $h(\cos \theta, \sin \theta) = h(\tan \theta, 1)$ , podemos, também, escrever

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{(1 + (\tan \theta)h(\tan \theta, 1))}{(h(\tan \theta, 1) - \tan \theta)}.$$

**3.1.** Basta dividir uma equação separável da forma  $x' = g(t)f(x)$  por  $f(x)$  para chegar na equação exata

$$-g(t) + \frac{1}{f(x)} \frac{dx}{dt} = 0.$$

**3.2.** Apenas (b) e (c) são exatas.

**3.3.** (a)  $xy + x^2/2 + \sin y = C$ . (b)  $x^2 \cos y + xy - x^5/5 = C$ . (c)  $e^x + xy + y^2/2 = C$ , (d)  $x \cos y + y^2 = C$ .

**3.4.**  $n = 3$ .

**3.5.** Como a equação é exata, devemos ter  $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ , mas como o termo do lado esquerdo só depende de  $y$  e o termo do lado direito só depende de  $x$ , os dois termos devem ser constantes, ou seja  $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x = a$ , para algum  $a \in \mathbb{R}$ . Assim,  $M(y) = M(0) + ay$  e  $N(x) = N(0) + ax$ . Como  $M(0) = N(0) = 0$ , então  $M(y) = ay$  e  $N(x) = ax$ . Assumindo  $a \neq 0$ , caso contrário não há equação diferencial, podemos dividir a equação por  $a$  e ver que ela é equivalente a  $y + x \frac{dy}{dx} = 0$ . Resolvendo essa equação, chegamos à integral  $\varphi(x, y) = xy$  e as soluções da equação são hipérbolas  $y = c/x$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**3.6.** Basta derivar e verificar.

**3.7.** Basta derivar para verificar a condição de Euler. Quanto à não existência de  $\varphi$ , faça como na sugestão. Considere  $\gamma(s) = (a \cos s, a \sin s)$ ,  $0 \leq s \leq 2\pi$ , e mostre que  $\int_{\gamma} \mathbf{F}(x, y) \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 s + \cos^2 s) ds = 2\pi$ . Se existisse  $\varphi$  como no exercício, então  $(d/ds)\varphi(\gamma(s)) = \nabla\varphi(\gamma) \cdot \gamma'(s)$ , de maneira que  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \varphi(\gamma(2\pi)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(a, 0) - \varphi(a, 0) = 0$ , uma contradição. Logo,  $\varphi$  não pode existir.

**4.1.** (a) homogênea; (b) linear; (c) linear; (d) separável; (e) linear; (f) exata; (g) nenhuma das opções; (h) separável; (i) linear; (j) nenhuma das opções; (k) homogênea; (l) nenhuma das opções.

**4.2.**  $x^3y + x^2 \sin y = C$ .

**4.3.**  $m = 2$  com solução geral  $x^3(x + y) = c$ , que também pode ser escrita explicitamente como  $y(x) = C/x^3 - x$ , para  $x \neq 0$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ .

**4.4.** (a)  $m = 2$ ,  $n = 1$ . (b)  $x^4y^2 + x^3y^4 = C$ .

**4.5.** (a)  $p = 3$ . (b)  $x^5 + x^4y + x^5y^2 = C$ .

**4.6.**  $a = 3$ .

**4.7.** (a)  $x(t) = C^{-kt} + t/k - 1/k^2$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ . (b)  $x(t) = (x_0 + 1/k^2)e^{-kt} + t/k - 1/k^2$ , para  $t \in \mathbb{R}$ . (c) Se  $x_0 \leq 0$ , então  $\min_{t \geq 0} x(t) = x(0) = x_0$ . Se  $x_0 > 0$ , então  $\min_{t \geq 0} x(t) = (1/k^2) \ln(k^2x_0 + 1)$ .

**4.8.**  $y(x) = (x + 1)^3/4 + C/(x + 1)$ , para  $x > -1$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ .

**4.9.** (a)  $y(x) = Ce^{-3x} + 9x^2 - 6x + 2$ , para  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ . (b)  $y(x) = Ce^{2x} - 2 \cos x + \sin x$ , para  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ .

**4.10.** (a)  $y(t) = Ce^{-t^2} + 2$ . (b)  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$ .

**4.11.**  $T(t) = \left( T_0 - T_s - \frac{\kappa^2 \Delta t}{\kappa^2 + \omega^2} \right) e^{-\kappa t} + T_s + \frac{\kappa^2 \Delta t}{\kappa^2 + \omega^2} \left( \cos \omega t + \frac{\omega}{\kappa} \sin \omega t \right)$ , para  $t \geq 0$ .

**4.12.** (a) Basta ver que  $x' + y' + z' = 0$ . (b)  $x(t) = x_0 e^{-\kappa_1 t}$ ,  $y(t) = \kappa_1 x_0 (e^{-\kappa_2 t} - e^{-\kappa_1 t}) / (\kappa_1 - \kappa_2)$ ,  $z(t) = x_0 - x(t) - y(t) = x_0 (1 - e^{-\kappa_1 t} - \kappa_1 (e^{-\kappa_2 t} - e^{-\kappa_1 t}) / (\kappa_1 - \kappa_2))$ . (c) Isso segue das fórmulas obtidas no item (b), usando que  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ . (d) Derivando em relação a  $t$  a expressão para a solução  $y(t)$  obtida em (b) e igualando a zero para achar o instante crítico, obtemos  $\kappa_2 e^{-\kappa_2 T} - \kappa_1 e^{-\kappa_1 T} = 0$ , ou seja,  $T = \ln(\kappa_1 / \kappa_2) / (\kappa_1 - \kappa_2)$ , que é positivo pois  $\kappa_1 > \kappa_2$ . (e) O instante de máximo de  $u(t)$  é o mesmo que o de  $y(t)$ , de modo que o máximo da utilização é  $u(T) = y(T) / x_0$ , cuja expressão é obtida substituindo o instante de máximo  $T$  obtido em (d), que é independente de  $x_0$ , pois  $y(t)$  é linear em  $x_0$ , e pode ser reescrita como função apenas de  $\kappa_1 / \kappa_2$ .

**4.13.** Multiplicando a equação por  $ye^{2P(x)}$ , chegamos a uma equação da forma  $M(x, y) + N(x, y)(dy/dx) = 0$  onde  $M(x, y) = p(x)y^2e^{2P(x)} - q(x)e^{2P(x)}$  e  $N(x, y) = ye^{2P(x)}$ . Basta, então, observar que  $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ .

**4.14.** (a)  $S(t) = \left( S_0 - \frac{f_0}{\lambda_0} - \frac{\lambda_0^2 f_1}{\lambda_0^2 + \omega^2} \right) e^{-\lambda_0 t} + \frac{f_0}{\lambda_0} + \frac{\lambda_0^2 f_1}{\lambda_0^2 + \omega^2} \left( \cos \omega t + \frac{\omega}{\lambda_0} \sin \omega t \right)$ ,  $t \geq 0$ .  
 (b)  $S^+ > \frac{f_0}{\lambda_0} + \frac{2\omega\lambda_0^2 f_1}{(\lambda_0^2 + \omega^2)^2}$ . (c)  $T = \frac{1}{\lambda_0} \ln \left( \frac{S_0 - \frac{f_0}{\lambda_0} - \frac{\lambda_0^2 f_1}{\lambda_0^2 + \omega^2}}{S^+ - \frac{f_0}{\lambda_0} - \frac{2\omega\lambda_0^2 f_1}{(\lambda_0^2 + \omega^2)^2}} \right)$ .

**4.15.** Aproximadamente oito dias.

**4.16.** Basta usar a regra da cadeia:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^2} (g(x)y + h(x)y^2) = -\frac{g(x)}{y} - h(x) = -g(x)z - h(x).$$

**4.17.** A solução geral é composta pelas soluções estacionárias  $y(x) = 0$ ,  $y(x) = 1$ , para  $x \in \mathbb{R}$ , e pelas soluções não-estacionárias  $y(x) = 1/(1 + Ce^x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ , se  $C > 0$ , e para  $x \neq \ln(-1/C)$ , se  $C < 0$ .

**4.18.** Basta usar a regra da cadeia:

$$\frac{dz}{dx} = (1 - \theta)y^{-\theta} \frac{dy}{dx} = (1 - \theta)y^{-\theta} (-g(x)y + h(x)y^\theta) = -(1 - \theta)z + (1 - \theta)h(x).$$

**4.19.** Basta derivar e substituir  $z' = 2yy' = 2y(ay + b/y) = 2ay^2 + 2b = 2az + 2b$ , logo  $z' - 2az = 2b$ . No caso  $a = b = 1/2$ , temos  $z' - z = 1$ , cuja solução geral é  $z(t) = Ce^t - 1$ . Para a solução particular, como  $y = z^{1/2}$  e  $C = z(0) + 1 = y_0^2 + 1$ , temos  $y(t) = \sqrt{(y_0^2 + 1)e^t - 1}$ ,

válida para  $t \geq -\ln(1 + y_0^2)$ . Observe que, ao tirarmos a raiz quadrada de  $z(t)$ , utilizamos o ramo positivo para a solução  $y(t)$  porque, em  $t = 0$ , temos  $y(t) = y_0 > 0$ , por hipótese.

**4.20.**  $x(t) = (Ce^{-\beta t/3} + \alpha/\beta)^3, \forall t \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário.

### Capítulo 5.

**1.1.** Solução geral:  $x(t) = C_0 + C_1 t^2/2, t \in \mathbb{R}$ , para  $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ .

**1.2.**  $x(t) = 2/(1 - 2t)$ , definida no intervalo  $t < 1/2$ .

**1.3.** Solução geral:  $x(t) = C_1 + C_2 e^{-kt} + t^2/2k - t/k^2$ , definida em  $t \in \mathbb{R}$ , para  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Solução particular:  $x(t) = x_0 + v_0/k + 1/k^3 - (v_0/k + 1/k^3)e^{-kt} + t^2/2k - t/k^2$ , definida em  $t \in \mathbb{R}$ .

**1.4.**  $v_0 \geq \sqrt{2gR^2/(R + h_0)}$ .

**1.5.**  $h = 2gR^2/(2gR - v_0^2) - R = Rv_0^2/(2gR - v_0^2) > 0$ .

**1.6.**  $x(t) = 2e^{3t}, t \in \mathbb{R}$ .

### Capítulo 8.

**2.4.** Para encontrar o vetor aceleração, basta derivar  $x(t) = l \cos(\theta(t))$  e  $y(t) = l \sin(\theta(t))$  duas vezes. Para encontrar a tensão  $T$ , lembre-se que a tensão sofrida pela haste é a reação à resultante normal das forças que agem no corpo, que são a força centrípeta  $F_c$  e a componente normal  $P_n$  do peso, ou seja  $T = -F_c - P_n$ . Como  $P_n$  é um múltiplo  $-mg \cos \theta$  do vetor unitário exterior à circunferência de movimento, temos

$$T = (ml(\theta')^2 + mg \cos \theta) \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|}.$$

Como o Hamiltoniano é constante ao longo das órbitas, temos  $l(\theta'(t))^2 = C + 2g \cos \theta(t), \forall t$ , para uma constante  $C = H(\theta(0), \theta'(0))$  que varia de órbita para órbita. Assim, a tensão pode ser escrita na forma

$$T = (3mg \cos \theta + H(\theta(0), \theta'(0))) \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|}.$$

Dessa forma, vemos que o máximo ocorrem em  $\theta = 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ , ou seja, quando o pêndulo está em sua posição mais baixa. (O mínimo ocorre quando o pêndulo está em sua posição mais alta, que pode ou não ocorrer em  $\theta = (2n + 1)\pi$ .)



## Referências Bibliográficas

- [1] D. K. Arrowsmith & C. M. Place, *Dynamical Systems - differential equations, maps, and chaotic behavior*, Chapman & Hall, London, 1992.
- [2] Rodney C. Bassanezi & Wilson C. Ferreira Jr., *Equações Diferenciais com Aplicações*, Editora Harbra Ltda, 1988.
- [3] William E. Boyce & Richard C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, John Wiley & Sons, Inc., 1977.
- [4] D. G. Figueiredo & A. V. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [5] T. Goldammer, *The Brewers' Handbook. The Complete Book to Brewing Beer*, KVP Publishers, Virginia, 1999.
- [6] G. F. Gause, *Struggle for Existence*, Hafner, New York, 1934.
- [7] J. Keener & J. Sneyd, *Mathematical Physiology*, Interdisciplinary Applied Mathematics vol. 8, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [8] R. E. Mickens, D. N. Brewley, and M. L. Russel, A model of dieting, *SIAM Review*, vol. 40 (1998), no. 3, 667–672.
- [9] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, 2nd edition, Biomathematics vol. 19, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [10] T. Schlick, *Molecular Modeling and Simulation: an interdisciplinary guide*, Interdisciplinary Applied Mathematics vol. 21, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [11] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books Publishing, Cambridge, 2000.



## Índice Remissivo

- arrasto, 13
- bifurcação, 81
  - diagrama de, 81
  - ponto de, 81
  - tipo sela-nó, 83
  - transcrítica, 84
  - tridente, 84
- catenária, 122
- ciclo limite, 252–255
- competição entre espécies, *veja* modelo
- condição de Euler, 101
- condições
  - de contorno, 26
  - iniciais, 23–25
- conjunto simplesmente conexo, 104, 210, 218
- continuidade Lipschitz, 42
- convergência para um ponto fixo
  - algébrica, 70, 79
  - em tempo finito, 69, 79
  - exponencial, 69, 79
- corda suspensa, *veja* modelo
- corpo em queda livre, 11, 22, 25, 32, 78, 119, 219
- crescimento populacional, 16
- decaimento radioativo, 13, 23, 28, 49, 60, 74, 99
- diagrama de bifurcação, *veja* bifurcação
- diagrama de fase, 59, 160
- dinâmica populacional, 16, 61, 63, 80, 88, 213, 250, 253
- energia
  - cinética, 219
  - potencial, 219, 226, 227, 229–231
- equação característica, 127
- equação diferencial, 10
  - autônoma, 11, 55
  - exata, 99
  - homogênea, 95
  - linear de primeira ordem, 107
  - linear de segunda ordem, 125
  - não-autônoma, 11, 49
  - ordem de uma, 10
  - separável, 27, 91
- equivalência qualitativa, 79
- explosão
  - algébrica, 66, 67
  - em tempo finito, 66
  - exponencial, 66
- fórmula de Liouville, 151
- fórmula de variação de parâmetros, 155
- fator de integração, 106
- hamiltoniano, 217
- Holling-Tanner, *veja* modelo
- integral (de um sistema conservativo), 210
- isóclinas, 49, 55, 240–255
- juros compostos, 23
- lei de ação das massas, 72
- lei de correntes de Kirchhoff, 133
- lei de Henry, 133
- lei de Hooke, 131, 225
- lei de Ohm, 133
- lei de voltagem de Kirchhoff, 133
- ligação de sela, 206
- linha de fase, 59, 65, 71
- Lotka-Volterra, *veja* modelo
- método
  - de Euler, 37
  - de Picard, 38, 40
- meia-vida (de um elemento radioativo), 14, 24, 31

- modelagem molecular, 233  
 modelo  
   da corda suspensa, 20, 25, 33, 121  
   de circuito elétrico, 132, 149, 254  
   de competição entre espécies, 241–247  
   de descompressão em mergulho, 115  
   de dieta, 78  
   de difusão de calor, 60, 109, 112  
   de difusão de substância tóxica, 113  
   de Duffing, 226, 235, 239  
   de filtragem industrial, 77  
   de Holling-Tanner, 254  
   de lançamento de projétil, 123  
   de propagação de doenças, 76  
   de queimada, 31  
   de reações químicas, 72, 76, 77, 89  
   de Solow para o crescimento econômico, 32, 64  
   de um forno industrial, 87  
   de Van der Pol, 254  
   do pêndulo amortecido, 238  
   do pêndulo em rotação, 225  
   do pêndulo não-amortecido, 220  
   do sistema massa-mola, 131, 137, 145, 149, 158, 160, 179, 225  
   logístico, 61–63, 80, 82, 84, 88  
   movimento de partícula em campo magnético, 184  
   predador-presa de Lotka-Volterra, 213  
  
 órbita, 58, 160, 163  
   heteroclínica, 206  
   homoclínica, 206  
   regular, 204  
  
 pêndulo, *veja* modelo  
 plano de fase, 160  
 polinômio característico, 127  
 ponto fixo, 58, 178, 181, 195  
   atrator, repulsor, conector, 60  
   atrator, repulsor, de sela, 200  
   foco, do tipo nó, 200  
   hiperbólico, 199, 248  
 pontos fixos, 197  
 ppm, 75  
 predador-presa, *veja* modelo  
 princípio da superposição, 127  
  
 quantidade conservada (de um sistema conservativo), 210  
  
 reações químicas, *veja* modelo  
 redução de ordem, 119, 122  
 ressonância, 147, 149  
  
 Saccharomyces  
   cerevisiae, 19  
 separatrizes de sela, 206  
 simplesmente conexo, *veja* conjunto simplesmente conexo  
 sistema  
   conservativo (ou integrável), 210–231  
   de equações diferenciais, 157  
   dissipativo, 237–239  
   hamiltoniano, 217–231  
   linear, 158  
     atrator, 178  
     autônomo homogêneo, 159  
     autônomo não-homogêneo, 159, 181  
     com autovalores complexos, 170, 172  
     com coeficientes constantes, 158  
     de sela, 179  
     degenerado, 179  
     diagonalizável, 164, 172  
     do tipo centro, 179  
     do tipo foco, 179  
     do tipo nó, 179  
     homogêneo, 158  
     não-diagonalizável com autovalores reais, 167, 172  
     repulsor, 179  
   não-conservativo, 237–255  
 solução  
   da equação homogênea, 139  
   geral, 23, 139  
   particular, 23, 138  
 soluções  
   existência de, 35–39, 196  
   não-unicidade de, 41–45, 65  
   unicidade de, 41–45, 65, 196  
  
 taxa de crescimento específico, 17  
 tempo de geração, 17  
 trajetórias ortogonais, 93, 95, 97  
  
 Van der Pol, *veja* modelo  
 Wronskiano, 151